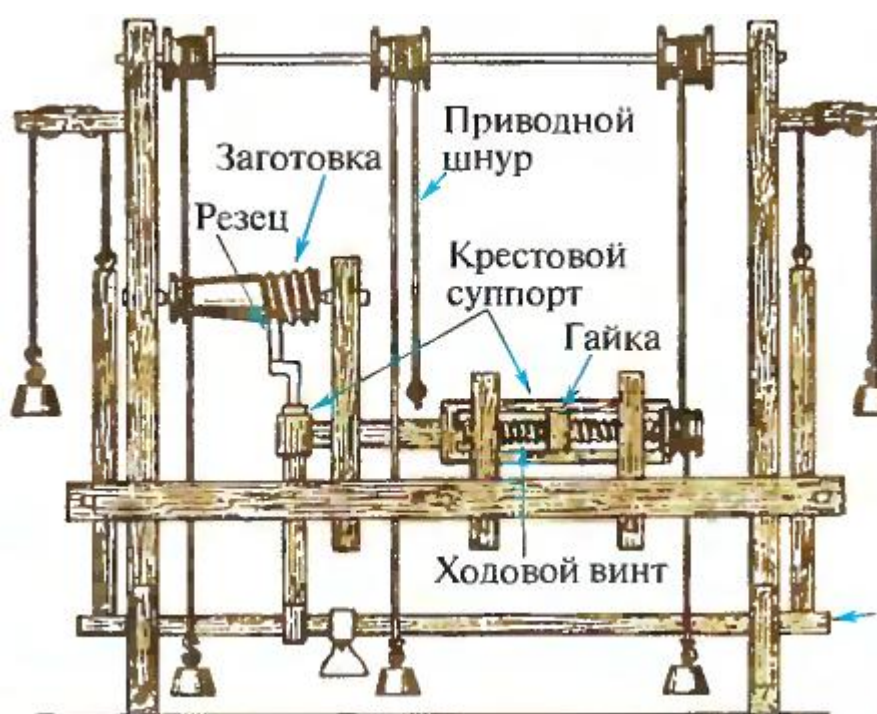


# СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ  
ПО САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ



Новосибирск 2020

Сопротивление материалов: учеб. пособие по самостоятельной работе/ Новосибир. гос. аграр. ун-т. Инженер. ин-т.; сост. А.А. Шибков, С.А. Булгаков, И.В. Тихонкин. – Новосибирск, 2020. – 84 с. изд. перераб. и доп.

Рецензент В.В.Коноводов, к.т.н., доц.

Учебное пособие по самостоятельной работе содержит теоретический и справочный материал для подготовки к практическим занятиям, рекомендации по решению типовых задач и указания по оформлению контрольных и расчетно-графических работ.

Предназначено для студентов очной и заочной форм обучения всех направлений подготовки Инженерного института (Агроинженерия, Технология транспортных процессов, Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов, Профессиональное обучение (по отраслям), Техносферная безопасность) при изучении и закреплении соответствующих тем дисциплин Сопротивление материалов и Механика.

Учебное пособие рекомендовано студентам других факультетов ФГБОУ ВО Новосибирский ГАУ, обучающимся по инженерным направлениям подготовки (Природообустройство и водопользование, Продукты питания из растительного сырья, Продукты питания животного происхождения, Технология продукции и организация общественного питания, Стандартизация и метрология, Строительство), изучающим соответствующие разделы и темы дисциплин Сопротивление материалов, Механика, Прикладная механика, согласно утвержденным учебным планам и рабочим программам дисциплин.

Утверждено и рекомендовано к изданию учебно-методическим советом Инженерного института (протокол от 29 сентября 2020 г. № 2)

ФГБОУ ВО Новосибирский ГАУ  
Инженерный институт, 2020

## СОДЕРЖАНИЕ

Виды самостоятельной работы.....	4
Оформление контрольных и расчетно-графических работ.....	4
Методические рекомендации по решению типовых задач.....	6
Геометрические характеристики плоских сечений.....	7
Расчет на прочность деталей, работающих на растяжение.....	14
Расчет на устойчивость сжатых элементов конструкций.....	15
Статически неопределимые фермы.....	22
Расчеты на прочность при срезе и смятии.....	26
Расчеты на прочность и жесткость при кручении.....	30
Расчет на прочность при плоском изгибе.....	33
Определение перемещений при изгибе .....	39
Расчет на прочность при сложных формах изгиба.....	46
Оценка прочности при сложном напряженном состоянии.....	50
Основы динамического расчета.....	58
Расчет статически неопределимых балок и рам методом сил.....	65
Приложение А. Геометрические характеристики некоторых простых сечений.....	77
Приложение Б. Допускаемые напряжения для углеродистых сталей при статической нагрузке.....	78
Приложение В. Нормальные линейные размеры.....	79
Приложение Г. Коэффициенты $\varphi$ уменьшения допускаемых напряжений для сталей $Ст0, Ст2, Ст3, Ст4$ .....	80
Приложение Д. Формулы для определения прогибов.....	81
Приложение Е. Значения коэффициента $\alpha$ приведения массы балки к точке удара.....	82

## ВИДЫ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Самостоятельная работа студентов по дисциплине «Сопротивление материалов» (разделу «Сопротивление материалов» дисциплины «Механика»), в соответствии с учебным планом и рабочей программой включает:

- изучение конспекта лекций перед практическими и лабораторными занятиями;
- углубленное изучение некоторых тем дисциплины по учебнику с составлением конспекта и отчетом по контрольным вопросам;
- самостоятельное изучение некоторых тем дисциплины по учебнику с составлением конспекта и отчетом по контрольным вопросам;
- решение типовых задач в аудитории под руководством преподавателя;
- выполнение, оформление и защиту контрольных работ;
- выполнение, оформление и защиту расчетно-графических работ
- оформление и защиту отчетов по лабораторным работам;
- подготовку к сдаче зачета;
- подготовку к сдаче экзамена;
- применение полученных навыков расчетов при выполнении курсовых работ и курсовых проектов по общепрофессиональным и специальным дисциплинам, а также конструкторской части выпускных квалификационных работ.

## ОФОРМЛЕНИЕ КОНТРОЛЬНЫХ И РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИХ РАБОТ

Основным видом самостоятельной работы студентов по сопротивлению материалов является выполнение контрольных и расчетно-графических работ.

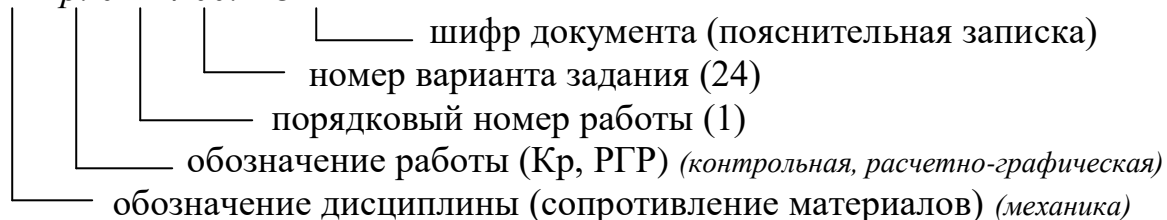
Работа оформляется в виде пояснительной записки с соблюдением ГОСТ ЕСКД.

Пояснительная записка включает: титульный лист, задание для расчета, схему, расчетную часть, список литературы.

Пример оформления титульного листа приведен на рисунке 1.

Пояснительная записка может быть выполнена с использованием офисных программ на персональном компьютере либо написана от руки черными чернилами или черной пастой с высотой цифр и букв не менее 2,5 мм на одной стороне листа белой бумаги формата А4 (210×297 мм). На первом листе записки помещается основная надпись формы 2 (рисунок 2), на последующих листах - формы 2а (рисунок 3) по ГОСТ 2.104-68. В графе 2 основной надписи указывается обозначение документа, выполненное по следующей схеме:

*СМ Кр. 01 24 00. ПЗ*

- 
- шифр документа (пояснительная записка)
  - номер варианта задания (24)
  - порядковый номер работы (1)
  - обозначение работы (Кр, РГР) (*контрольная, расчетно-графическая*)
  - обозначение дисциплины (сопротивление материалов) (*механика*)

Первый лист пояснительной записки должен содержать только задание для расчета: условие задачи, данные и расчетную схему.

Расчетная часть начинается со второго листа. Решение должно сопровождаться краткими, последовательными и грамотными, без сокращения слов, объяснениями, чертежами и графиками. Надо избегать многословных пояснений и пересказа учебника. Язык техники – чертеж и формула.

Все вычисления записываются по следующей схеме: символ вычисляемой величины = формула = численная подстановка всех величин в системе СИ без сокращений = окончательный результат вычислений с указанием размерности. Под формулой должны быть приведены пояснения всех символов, входящих в формулу. Не следует вычислять большое количество значащих цифр, вычисления должны соответствовать необходимой точности (обычно достаточно трех значащих цифр).

<p>ФГБОУ ВО Новосибирский ГАУ Инженерный институт</p> <p>Кафедра теоретической и прикладной механики</p> <p>КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №__ по сопротивлению материалов <i>«Расчет плоской фермы»</i></p> <p>Вариант_____</p> <p>Выполнил: студент __ группы _____ (Фамилия И. О.)</p> <p>Проверил _____ _____ (Фамилия И. О.)</p> <p>НОВОСИБИРСК 202__</p>	<p>ФГБОУ ВО Новосибирский ГАУ Инженерный институт</p> <p>Кафедра теоретической и прикладной механики</p> <p>РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА №__ по сопротивлению материалов <i>«Расчет вала на прочность при изгибе»</i></p> <p>Вариант_____</p> <p>Выполнил: студент __ группы _____ (Фамилия И. О.)</p> <p>Проверил _____ _____ (Фамилия И. О.)</p> <p>НОВОСИБИРСК 202__</p>
--	--

*Рисунок 1 – Пример оформления титульного листа*

					СМ РГР. 01 24 00. ПЗ			
Выполнил					Расчет вала на прочность при изгибе		Лист	Листов
Проверил							1	
						НГАУ		
						Группа ____		

Рисунок 2 – Форма 2 основной надписи (для первого листа)

					СМ РГР. 01 24 00. ПЗ	
						2

Рисунок 3 – Форма 2а основной надписи (для последующих листов)

## МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО РЕШЕНИЮ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

Любая конструкция должна обладать главным свойством – надежностью. Обеспечением надежности и последующей правильной ее реализацией занимаются практически все общепрофессиональные и специальные дисциплины инженерного образования. Методы сопротивления материалов позволяют закладывать в конструкцию на стадии ее разработки (проектирования) две важнейшие составляющие надежности: прочность и жесткость.

Объективными характеристиками нагруженности детали, по которым оценивается ее прочность, являются значения нормальных  $\sigma$  и касательных  $\tau$  напряжений, возникающих в материале детали. Определить напряжения в произвольном сечении детали через внешнюю нагрузку довольно сложно, поэтому первоначально методом сечений находят равнодействующие этих напряжений, которые называются внутренними силовыми факторами. В общем случае нагружения в сечении детали могут присутствовать шесть внутренних силовых факторов: продольная (нормальная) сила  $N$ , две поперечные силы  $Q_x$  и  $Q_y$ , момент кручения  $T_k$  и два изгибающих момента  $M_x$  и  $M_y$ . По найденным внутренним силовым факторам определяют значения напряжений и характеристики деформации детали.

Таким образом, последовательность расчета любой конструкции на прочность и жесткость следующая:

- определяется вся внешняя нагрузка, действующая на деталь, включая реакции связей;
- вычисляются методом сечений значения внутренних силовых факторов;
- определяются значения максимальных напряжений в опасном сечении детали;
- оценивается прочность детали путем сравнения значений напряжений в опасном сечении с допускаемыми (нормативными) напряжениями для используемого материала;

- определяются характеристики деформации детали;
- при необходимости оценивается жесткость конструкции путем сравнения значений деформации с допускаемыми (нормативными) значениями.

## ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

Прочность и жесткость деталей зависят не только от используемого материала, но и от формы, размеров поперечного сечения и его расположения относительно направления действия нагрузки (координатных осей). К основным характеристикам сечения, позволяющим количественно учесть перечисленные факторы, относят:

- площадь сечения  $A$ , размерность  $A - м^2$ . Площадь сечения является характеристикой прочности и жесткости сечения при растяжении, сжатии и срезе детали;
- статические моменты сечения:  $S_x$  и  $S_y$ ; размерность  $S - м^3$ . Статические моменты используются при определении координат центра составного сечения и для вычисления касательных напряжений при изгибе;
- моменты инерции сечения: осевые  $I_x$  и  $I_y$ , полярный  $I_p$ , центробежный  $I_{xy}$ ; размерность  $I - м^4$ . Осевые моменты инерции являются характеристикой жесткости сечения при изгибе, полярный момент инерции характеризует жесткость сечения при кручении, центробежный момент инерции самостоятельного значения не имеет и используется во вспомогательных расчетах;
- моменты сопротивления сечения: осевые  $W_x$  и  $W_y$ , полярный  $W_p$ ; размерность  $W - м^3$ . Осевые моменты сопротивления сечения являются характеристикой прочности сечения при изгибе, полярный момент сопротивления характеризует жесткость сечения при кручении;
- радиусы инерции сечения:  $i_x$  и  $i_y$ ; размерность  $i - м$ . Радиусы инерции сечения характеризуют устойчивость сечения при сжатии.

Центральное место в расчетах занимают так называемые главные оси инерции сечения и значения геометрических характеристик относительно этих осей. Главными называют оси, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю  $I_{xy}=0$ , а осевые моменты инерции экстремальны:  $I_1=I_{max}$  и  $I_2=I_{min}$  (главные моменты инерции сечения). Частным признаком главных осей инерции является наличие в сечении хотя бы одной оси симметрии. При проектировании деталей рекомендуется сечения выполнять симметричными.

Характеристики простых геометрических фигур вычисляются по расчетным формулам (например, *приложения А*). Геометрические характеристики стандартных профилей проката (уголков, двутавров, швеллеров) содержатся в таблицах сортамента проката, которые имеются во всех учебниках и задачниках по сопротивлению материалов, а также справочниках конструктора.

### Пример определения характеристик симметричного сечения

Вычислить значения геометрических характеристик сечения (рисунок 4), сваренного из двух неравнополочных уголков  $140 \times 90 \times 10$  мм, относительно главных центральных осей инерции.

#### Решение

Разбиваем сечение на простые составляющие: два одинаковых уголка 1 и 2. Уголок - профиль стандартного проката, поэтому используем таблицы сортамента ГОСТ 8510–86. Для одной из составляющих частей (рисунок 5) выписываем следующие данные (чтобы вычисления были более компактными, все данные берем в сантиметрах):

- габаритные размеры уголка –  $14 \times 9$  см;
- координаты центра профиля –  $C_1(4,58 \text{ см}; 2,12 \text{ см})$ ;
- площадь сечения –  $A_1 = 22,2 \text{ см}^2$ ;

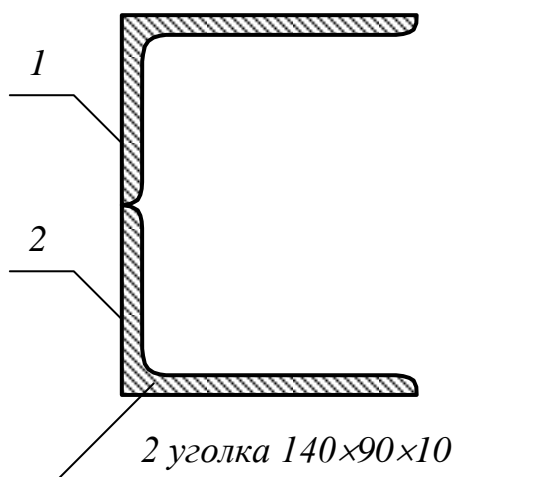


Рисунок 4

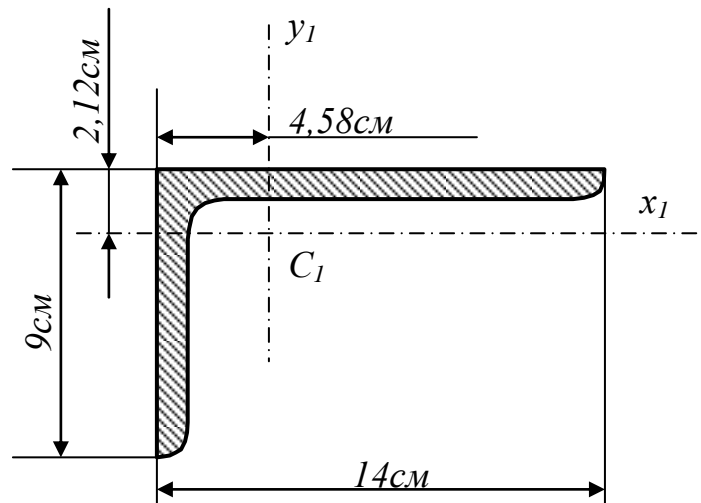


Рисунок 5

– моменты инерции уголка относительно его центральных осей, параллельных полкам (значения моментов инерции необходимо согласовать с обозначениями осей, принятыми нами) –  $I_{IX_1} = 146 \text{ см}^4$ ;  $I_{IY_1} = 444 \text{ см}^4$ .

Делаем чертеж всего сечения в масштабе (рисунок 6). Переносим на чертеж центры  $C_1$  и  $C_2$  обоих уголков.

Определяем характеристики всего сечения:

- габаритные размеры сечения  $14 \times 18$  см;
- центр всего сечения  $C$  расположен на пересечении оси симметрии сечения и отрезка  $C_1C_2$ ;



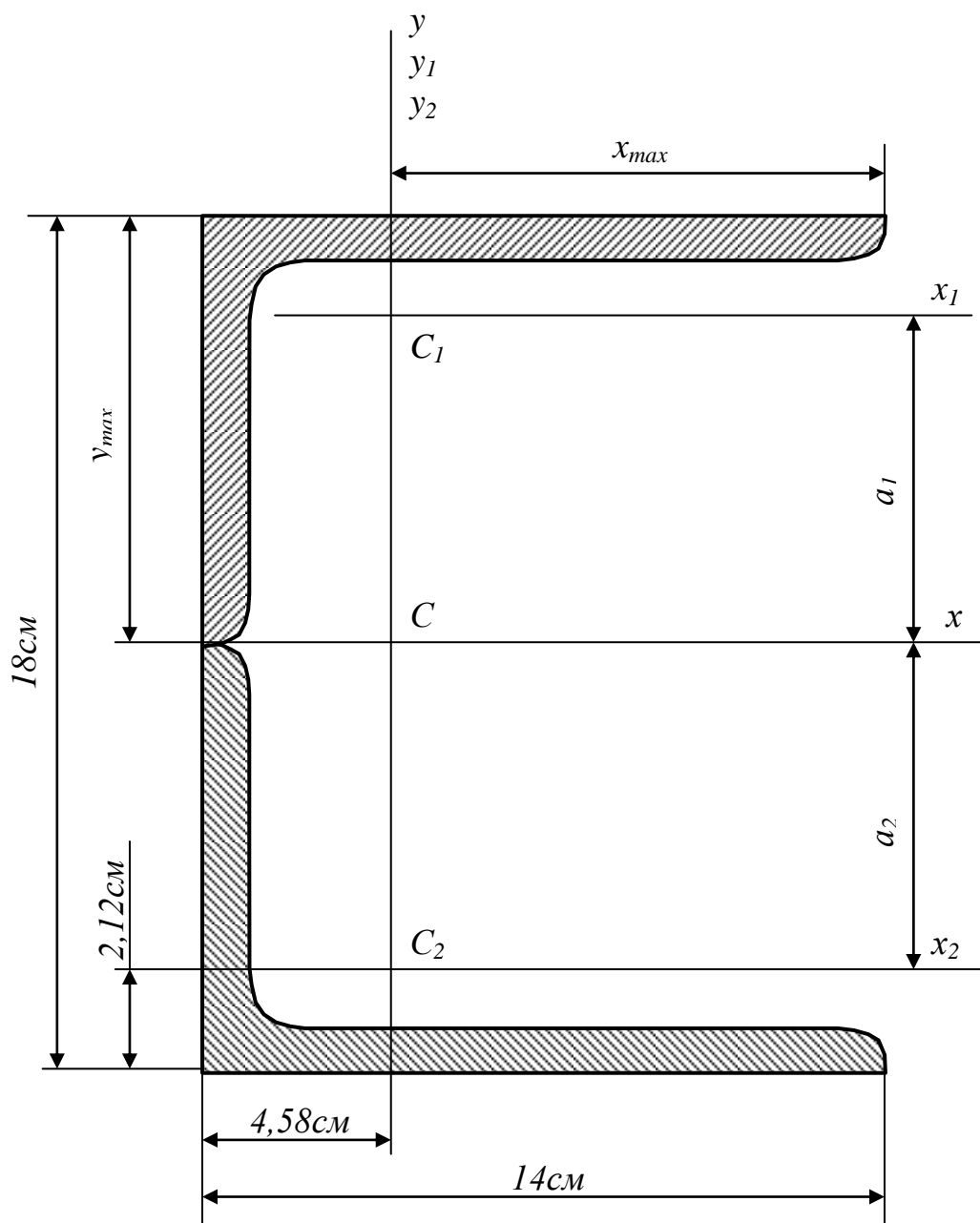


Рисунок 6

– площадь сечения  $A = A_1 + A_2 = 22,2 + 22,2 = 44,4 \text{ см}^2$ ;

– проводим координатные оси  $xCy$ ,  $x_1C_1y_1$ ,  $x_2C_2y_2$  и вычисляем расстояния между параллельными осями:

горизонтальными:  $a_1 = a_2 = 9 - 2,12 = 6,88 \text{ см}$ ;

вертикальными:  $b_1 = b_2 = 0$ ;

– вычисляем моменты инерции всего сечения по формулам для параллельных осей:

$$I_x = \sum [I_{ix_i} + A_i \cdot (a_i)^2] = I_{ix_1} + A_1 \cdot (a_1)^2 + I_{ix_2} + A_2 \cdot (a_2)^2 = 2(146 + 22,2 \cdot 6,88^2) = 2394 \text{ см}^4;$$

$$I_y = \sum [I_{iy_i} + A_i \cdot (b_i)^2] = 44,4 \cdot 2 = 888 \text{ см}^4;$$

$I_{xy} = 0$ , так как ось  $Cx$  является осью симметрии всего сечения;

–вычисляем моменты сопротивления сечения:

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}} = \frac{2394}{9} = 266 \text{ см}^3;$$

$$W_y = \frac{I_y}{x_{\max}} = \frac{888}{9,42} = 94,3 \text{ см}^3;$$

–вычисляем радиусы инерции сечения:

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \sqrt{\frac{2394}{44,4}} = 7,3 \text{ см};$$

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{888}{44,4}} = 4,5 \text{ см}.$$

### Пример определения характеристик несимметричного сечения

К стальной полосе (рисунок 7) прямоугольного сечения  $100 \times 20$  мм приварены швеллер №16 и равнополочный уголок  $35 \times 35 \times 4$  мм. Определить положение главных осей инерции полученного сечения и значения главных моментов инерции.

#### Решение

Разбиваем сечение на 3 составные части: 1–полоса; 2–уголок; 3–швеллер. Для каждой составной части находим: габаритные размеры; положение центра  $C_i$ ; площадь  $A_i$ ; центральные моменты инерции  $I_{ix_i}$ ;  $I_{iy_i}$ ;  $I_{ix_i y_i}$ . Все величины берем в сантиметрах.

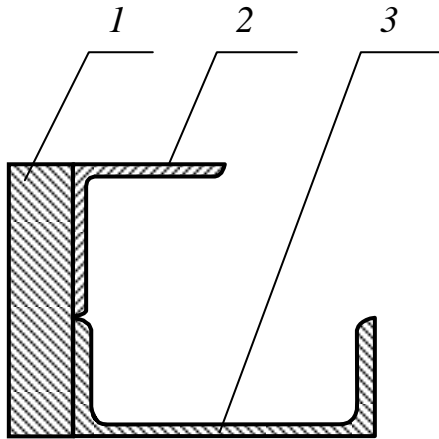


Рисунок 7

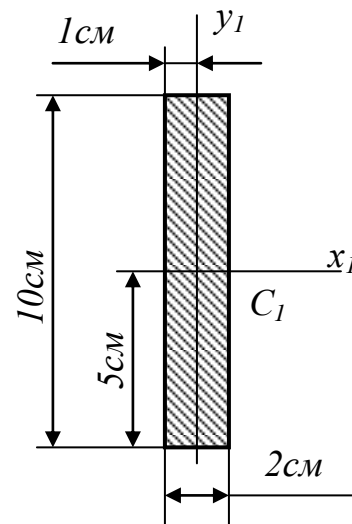


Рисунок 8

1 – полоса (рисунок 8). Габаритные размеры –  $2 \times 10$  см. Центр  $C_1$  расположен на пересечении осей симметрии прямоугольника. Площадь  $A_1 = 2 \cdot 10 = 20 \text{ см}^2$ .

Моменты инерции (приложение А):  $I_{1x_1} = \frac{bh^3}{12} = \frac{2 \cdot 10^3}{12} = 166,7 \text{ см}^4$ ;

$$I_{1y_1} = \frac{10 \cdot 2^3}{12} = 0,8 \text{ см}^4; \quad I_{1x_1 y_1} = 0 \text{ (оси симметрии)}.$$

2 – уголок равнополочный (рисунок 9). Габаритные размеры – 3,5×3,5 см. Остальные данные берем из сортамента проката ГОСТ 8509-93. Положение центра  $C_2$  показано на рисунке 9. Площадь  $A_2=2,17 \text{ см}^2$ . Осевые моменты инерции  $I_{2x_2}=I_{2y_2}=3,01 \text{ см}^4$ . Значение центробежного момента инерции можно взять из таблиц или вычислить по формуле обратного перехода:

$$I_{2x_2y_2} = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{2} \cdot \sin 2\beta = \frac{4,76 - 1,25}{2} \cdot \sin 2(+45^\circ) = +1,75 \text{ см}^4,$$

где  $I_{\max}$ ;  $I_{\min}$  – главные моменты инерции уголка (табличные значения);

$\beta$  – угол (со своим знаком) от главной максимальной оси инерции уголка (оси симметрии) до горизонтальной оси  $C_2x_2$ .

3 – швеллер (рисунок 10). Используем ГОСТ 8240–89. Габаритные размеры – 16×6,4 см. Положение центра  $C_3$  показано на рисунке 10. Площадь  $A_3=18,1 \text{ см}^2$ . Табличные значения моментов инерции швеллера согласовываем с обозначениями осей, принятыми нами:  $I_{3x_3}=63,3 \text{ см}^4$ ;  $I_{3y_3}=747 \text{ см}^4$ ;  $I_{3x_3y_3}=0$  (так как  $C_3y_3$  – ось симметрии).

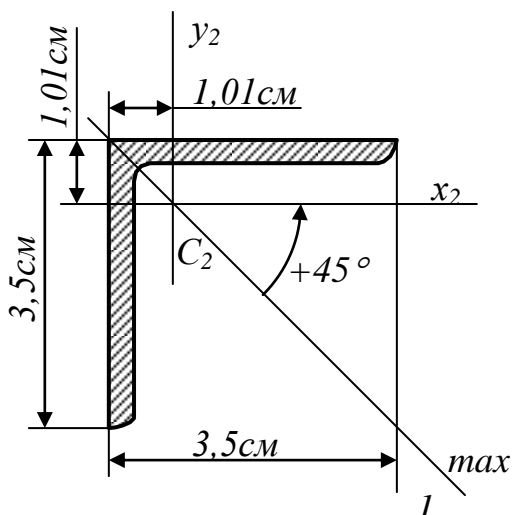


Рисунок 9

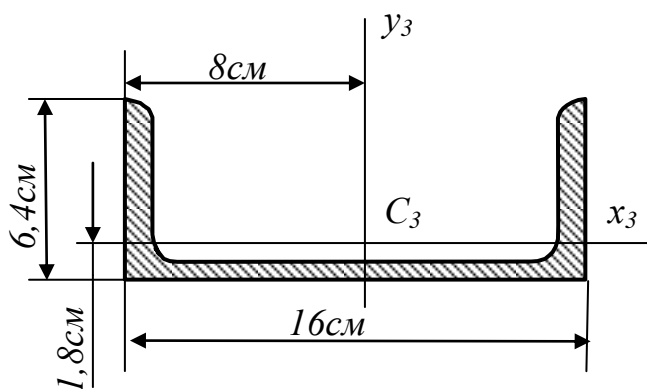


Рисунок 10

По эскизам составных частей (рисунки 8-10) делаем чертеж всего сечения в масштабе (рисунок 11).

На чертеж переносим центры  $C_1$ ;  $C_2$ ;  $C_3$  составных частей. Проводим координатные оси  $XOY$  так, чтобы все сечение оказалось в первом квадранте, и в этих осях находим координаты точек  $C_1$ ;  $C_2$ ;  $C_3$ :

$$x_{C_1} = 1 \text{ см}; x_{C_2} = 2 + 1,01 = 3,01 \text{ см}; x_{C_3} = 2 + 8 = 10 \text{ см}; y_{C_1} = 5 \text{ см};$$

$$y_{C_2} = 10 - 1,01 = 8,99 \text{ см}; y_{C_3} = 1,8 \text{ см}.$$

Определяем координаты центра  $C$  всего сечения:

$$x_C = \frac{\sum A_i \cdot x_{C_i}}{\sum A_i} = \frac{20 \cdot 1 + 2,43 \cdot 3,01 + 18,1 \cdot 10}{20 + 2,17 + 18,1} = 5,14 \text{ см};$$

$$y_C = \frac{\sum A_i y_{C_i}}{\sum A_i} = \frac{20 \cdot 5 + 2,43 \cdot 8,99 + 18,1 \cdot 1,8}{20 + 2,17 + 18,1} = 3,81 \text{ см}.$$

По полученным координатам откладываем точку  $C(5,14; 3,81)$  на чертеже, она должна находиться внутри треугольника  $C_1C_2C_3$ .

Проводим координатные оси  $x_1C_1y_1$ ;  $x_2C_2y_2$ ;  $x_3C_3y_3$ ;  $x_Cy_C$  и находим расстояния между параллельными осями:

$$a_1 = y_{1x_1} - y_C = 5 - 3,81 = +1,19 \text{ см};$$

$$a_2 = y_{C_2} - y_C = 8,99 - 3,81 = +5,15 \text{ см};$$

$$a_3 = y_{C_3} - y_C = 1,8 - 3,81 = -2,01 \text{ см};$$

$$b_1 = x_{C_1} - x_C = 1 - 5,14 = -4,14 \text{ см};$$

$$b_2 = x_{C_2} - x_C = 3,01 - 5,14 = -2,1 \text{ см};$$

$$b_3 = x_{C_3} - x_C = 10 - 5,14 = +4,86 \text{ см}.$$

Вычисляем моменты инерции всего сечения относительно центральных осей  $x_C$  и  $y_C$  по формулам для параллельных осей:

$$I_{x_C} = \sum [I_{ix_i} + A_i \cdot (a_i)^2] = 166,7 + 20 \cdot (+1,19)^2 + 3,01 + 2,17 \cdot (+5,15)^2 + 63,3 + 18,1 \cdot (-2,01)^2 = 399,2 \text{ см}^4;$$

$$I_{y_C} = \sum [I_{iy_i} + A_i \cdot (b_i)^2] = 0,8 + 20 \cdot (-4,14)^2 + 3,01 + 2,17 \cdot (-2,1)^2 + 747 + 18,1 \cdot (+4,86)^2 = 1532,1 \text{ см}^4;$$

$$I_{x_C y_C} = \sum (I_{ix_i y_i} + A_i \cdot a_i \cdot b_i) = 0 + 20 \cdot (+1,19) \cdot (-4,14) + 1,75 + 2,17 \cdot (+5,15) \cdot (-2,1) + 0 + 18,1 \cdot (-2,01) \cdot (+4,86) = -303,6 \text{ см}^4.$$

Вычисляем значения главных моментов инерции сечения:

$$I_{1,2} = \frac{I_{x_C} + I_{y_C}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_{x_C} - I_{y_C})^2 + 4 \cdot (I_{x_C y_C})^2} = \frac{399,2 + 1532,1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(399,2 - 1532,1)^2 + 4(-303,6)^2} = 965,7 \pm 642,7;$$

$$I_1 = I_{max} = 965,7 + 642,7 = 1608,4 \text{ см}^4;$$

$$I_2 = I_{min} = 965,7 - 642,7 = 323,0 \text{ см}^4.$$

Оба значения главных моментов инерции должны быть положительными и выполняться равенство:

$$I_1 + I_2 = I_{x_C} + I_{y_C}.$$

Определяем положение главных осей инерции:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{I_{x_C y_C}}{I_{y_C} - I_1} = \frac{-303,6}{1532,1 - 1608,4} = +3,9790; \quad \alpha_1 = \arctg(+3,9790) = +75^\circ 54',$$

где  $\alpha_1$  – угол между осью  $x_C$  и главной осью  $I$  (осью максимального момента инерции);

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{I_{x_C y_C}}{I_{y_C} - I_2} = \frac{-303,6}{1532,1 - 323,0} = -0,2511; \quad \alpha_2 = \arctg(-0,2511) = -14^\circ 06',$$

где  $\alpha_2$  – угол между осью  $x_C$  и главной осью  $2$  (осью минимального момента инерции).

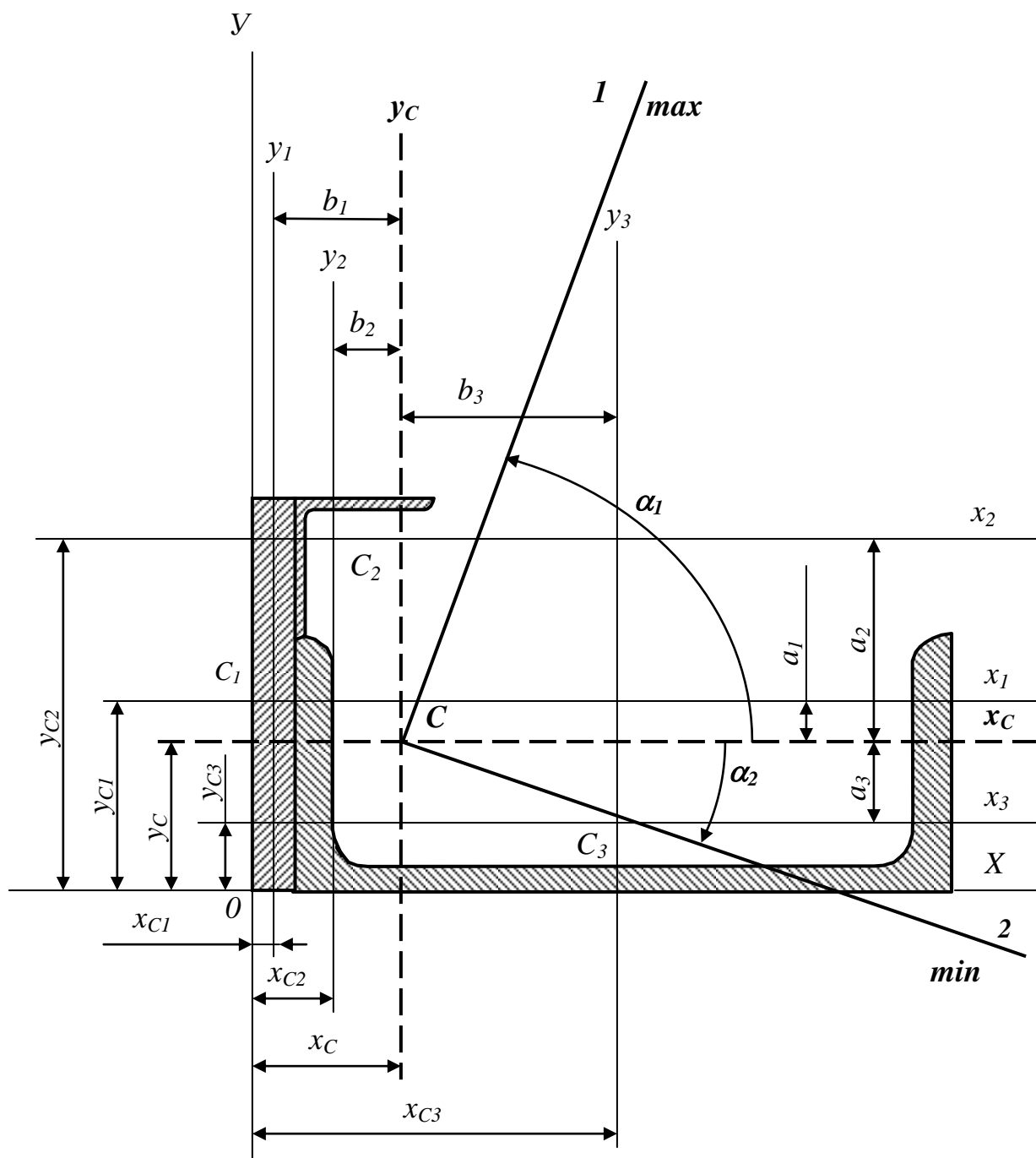


Рисунок 11

Главные оси должны быть взаимно перпендикулярными, то есть должно выполняться равенство

$$|\alpha_1| + |\alpha_2| \cong 90^\circ.$$

Откладываем главные оси на чертеже.

## РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ ДЕТАЛЕЙ, РАБОТАЮЩИХ НА РАСТЯЖЕНИЕ

При растяжении и сжатии в поперечных сечениях деталей из внутренних силовых факторов возникает только продольная сила  $N$ , которая на расчетных схемах направляется по внешней нормали от сечения. Поэтому при положительных значениях продольной силы деталь работает на растяжение, при отрицательной продольной силе происходит сжатие детали.

Продольная сила  $N$  является равнодействующей нормальных напряжений  $\sigma$ , которые при равномерном распределении по сечению определяются по формуле

$$\sigma = \frac{N}{A}, \quad (1)$$

где  $A$  – площадь поперечного сечения детали.

Следовательно, условием прочности растянутых деталей будет являться соблюдение следующего неравенства:

$$\sigma_{max} = \frac{N}{A} \leq [\sigma]_p, \quad (2)$$

где  $[\sigma]_p$  – величина допускаемых напряжений на растяжение для материала детали берется из справочных таблиц (**приложение Б**).

### Пример проектировочного расчета на растяжение

Плоская ферма (рисунок 12) состоит из двух стержней круглого поперечного сечения. Материал стержней – сталь Ст3. Определить необходимые размеры сечения стержней.

#### Решение

Определяем продольные силы в стержнях методом сечений. Для этого вырезаем узел  $B$  (рисунок 13), наносим векторы продольных сил  $N_1$  и  $N_2$  по направлению от сечений и составляем уравнения равновесия узла в виде сумм проекций сил на любые две взаимно перпендикулярные оси  $x$  и  $y$ :

$$\begin{cases} \Sigma X = -N_2 \cdot \cos 30^\circ + N_1 \cdot \cos 60^\circ = 0, \\ \Sigma Y = N_2 \cdot \sin 30^\circ + N_1 \cdot \sin 60^\circ - F = 0. \end{cases}$$

Решая совместно эти уравнения, получим значения продольных сил:

$$N_1 = 17,3 \text{ кН}; N_2 = 10,0 \text{ кН}.$$

Продольные силы положительные, следовательно, оба стержня работают на растяжение.

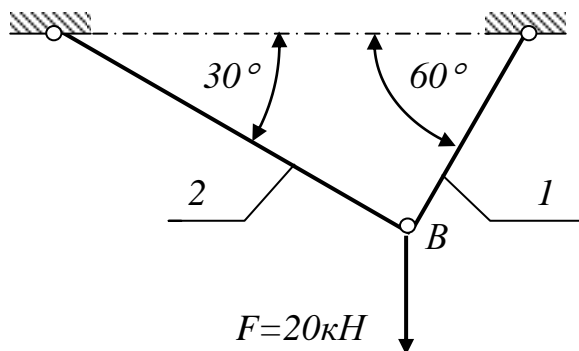


Рисунок 12

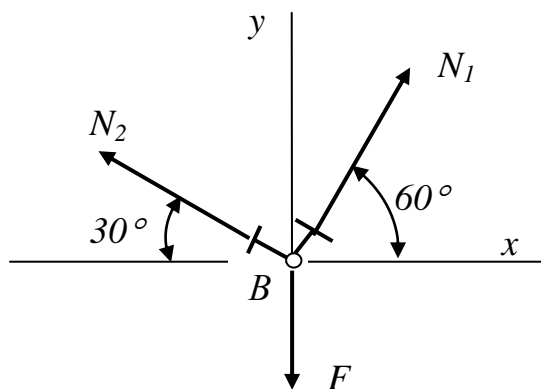


Рисунок 13

В условие прочности при растяжении (2) подставляем выражение площади круглого сечения  $A = \pi d^2 / 4$  и из полученного неравенства определяем диаметр сечения

$$d \geq \sqrt{\frac{4N}{\pi[\sigma]_p}}.$$

Из **приложения Б** выписываем величину допускаемых напряжений для стали Ст3 –  $[\sigma]_p = 125$  МПа и вычисляем диаметры сечения стержней:

$$d_2 \geq \sqrt{\frac{4 \cdot 10 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 125 \cdot 10^6}} = 0,0102 \text{ м} = 10,2 \text{ мм};$$

$$d_1 \geq \sqrt{\frac{4 \cdot 17,3 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 125 \cdot 10^6}} = 0,0133 \text{ м} = 13,3 \text{ мм}.$$

Полученные значения диаметров округляем до ближайших больших значений из рядов нормальных линейных размеров (**приложение В**).

Окончательно принимаем:  $d_2 = 11$  мм,  $d_1 = 14$  мм.

## РАСЧЕТ НА УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ

Признаком сжатия стержня является отрицательное значение возникающей в нем продольной силы  $N$ .

Важнейшей характеристикой сжатого стержня, определяющей характер разрушения, служит гибкость стержня  $\lambda$ :

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}}, \quad (3)$$

где  $l$  – длина стержня;

$i_{\min}$  – минимальный радиус инерции сечения;

$\mu$  – коэффициент приведения длины, зависит от способа закрепления стержня (рисунок 14).

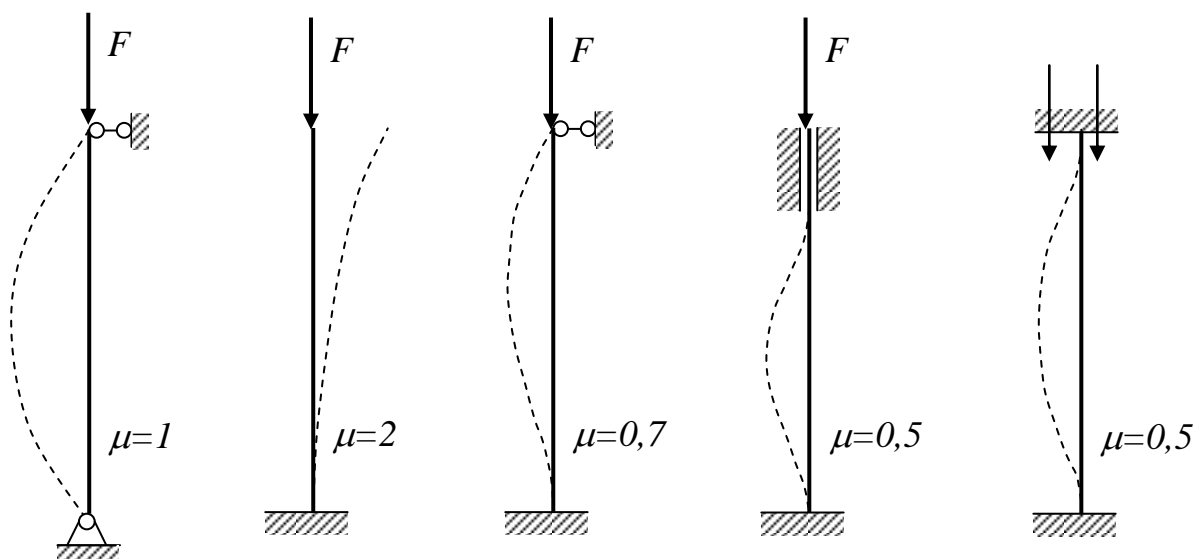


Рисунок 14

В зависимости от численных значений гибкости  $\lambda$  стержни подразделяются на три вида:

	малой гибкости:	средней гибкости:	большой гибкости:
$\lambda < \left\{ \begin{array}{l} 40 - \text{для стали} \\ 30 - \text{для дерева} \\ 20 - \text{для чугуна} \end{array} \right.$		$40 < \lambda < 100$ – для стали $30 < \lambda < 100$ – для дерева $20 < \lambda < 80$ – для чугуна	$\lambda > \left\{ \begin{array}{l} 100 - \text{для стали} \\ 100 - \text{для дерева} \\ 80 - \text{для чугуна} \end{array} \right.$

Стержни малой гибкости разрушаются при сжатии от недостатка прочности материала. Стержни средней и большой гибкости при сжатии внезапно изгибаются (теряют устойчивость). Значение сжимающей силы, при котором происходит потеря устойчивости, называется критической силой и обозначается  $F_{кр}$  или  $N_{кр}$ , а напряжения - критическими напряжениями  $\sigma_{кр}$ . Значения критических сил и напряжений для стержней большой гибкости вычисляются по формулам Эйлера:

$$\left\{ \begin{array}{l} F_{кр} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu l)^2}, \\ \sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}, \end{array} \right. \quad (4)$$

где  $E$  – модуль упругости материала;

$I_{\min}$  – минимальный момент инерции сечения.

Для стержней средней гибкости используется эмпирическая зависимость Ясинского:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{кр} = a - b\lambda + c\lambda^2, \\ F_{кр} = A(a - b\lambda + c\lambda^2), \end{array} \right. \quad (5)$$

где  $a, b, c$  – эмпирические коэффициенты, зависящие от материала.

При расчете сжатых стержней необходимо учитывать и прочностные свойства материала, и возможность потери устойчивости.



Условием, учитывающим оба фактора, является выполнение следующего неравенства:

$$\frac{|N|}{A} \leq \varphi [\sigma]_{сж}, \quad (6)$$

где  $\varphi$  – коэффициент уменьшения основного допускаемого напряжения (коэффициент продольного изгиба). Значения коэффициента  $\varphi$  берутся из **приложения Г** по гибкости  $\lambda$ ;

$[\sigma]_{сж}$  – допускаемые напряжения для материала стержня на сжатие.

Для хрупких материалов берутся из таблиц; для пластичных материалов принимаются равными допускаемым напряжениям на растяжение, то есть  $[\sigma]_{сж} = [\sigma]_p$ .

При проекторочном расчете сжатого стержня в условии устойчивости (6) содержится два неизвестных: площадь сечения  $A$  и коэффициент  $\varphi$ , поэтому сечение приходится подбирать, делая несколько попыток. Целенаправленный подбор сечения выполняется способом последовательных приближений.

### Пример проекторочного расчета на сжатие

Плоская ферма (рисунок 15) состоит из двух стержней круглого сечения. Материал – сталь **Ст3**. Определить необходимые размеры сечения стержней.

Решение

Определяем продольные силы  $N_1$  и  $N_2$  в стержнях методом сечений: вырезаем узел **B** (рисунок 16) и составляем уравнения его равновесия:

$$\begin{cases} \sum X = -N_2 \cos 30^\circ + N_1 \cos 60^\circ = 0; \\ \sum Y = -N_2 \sin 30^\circ - N_1 \sin 60^\circ - F = 0. \end{cases}$$

Решая уравнения совместно, получим:  $N_1 = -17,3$  кН;  $N_2 = -10,0$  кН. Продольные силы получились отрицательными, поэтому оба стержня работают на сжатие.

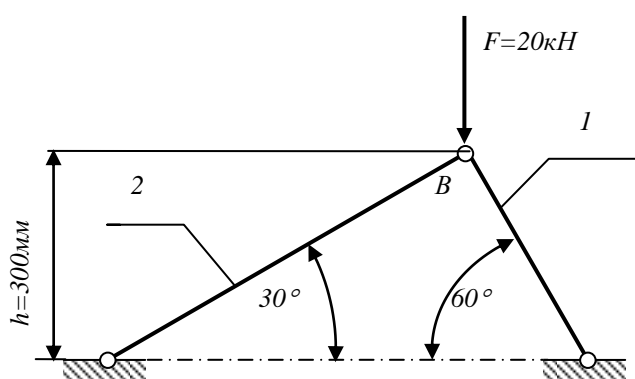


Рисунок 15

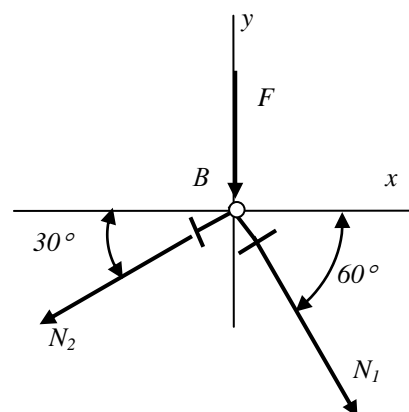


Рисунок 16

Для круглого сечения выписываем из **приложения А** расчетные формулы геометрических характеристик: площадь –  $A = \pi d^2/4$ ; минимальный момент инерции –  $I_{min} = \pi d^4/64$ ; минимальный радиус инерции –  $i_{min} = d/4$ . По формуле (3) определяем в общем виде гибкость  $\lambda = \mu l/i_{min} = 1 \cdot l \cdot 4/d = 4 \cdot l/d$ , где  $\mu = 1$  для

двухшарнирного закрепления (рисунок 14). Выражение площади подставляем в условие устойчивости (6) и из полученного неравенства выражаем диаметр сечения:

$$d \geq \sqrt{\frac{4|N|}{\pi\varphi[\sigma]_{-c}}} \quad (*)$$

Из приложения Б для стали **Ст3** –  $[\sigma]_{сж}=[\sigma]_p=125\text{МПа}$ .

В формуле (\*) два неизвестных: диаметр **d** и коэффициент **φ**, решаем способом последовательных приближений.

**РАСЧЕТ ПЕРВОГО СТЕРЖНЯ.**  $|N_I|=17,3\text{кН}$ ;  $l_1=h/\sin 60^\circ=300/0,866=346\text{мм}$

*Первый шаг приближений:*

– задаем  $\varphi_I=0,6$  (можно задать любое значение из интервала  $0<\varphi<1$ , почему именно 0,6 – обосновано ниже, *стр. 20*);

– вычисляем по формуле (\*) диаметр

$$d_I \geq \sqrt{\frac{4 \cdot 17,3 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 0,6 \cdot 125 \cdot 10^6}} = 0,0171\text{м} = 17,1\text{мм};$$

– округляем полученное значение до ближайшего большего из ряда нормальных размеров (**приложение В**):  $d_I=18\text{мм}$ ;

– вычисляем гибкость  $\lambda=4l/d=4 \cdot 346/18=77$ ;

– из **приложения Г** определяем коэффициент  $\varphi$ , соответствующий гибкости  $\lambda=77$ . Линейно интерполируя данные в промежутках между табличными, получим:  $\varphi_I^*=0,81-(0,81-0,75) \cdot 7/10=0,768$ ;

– сравниваем значения  $\varphi_I=0,6$  на входе в расчет и  $\varphi_I^*=0,768$  на выходе: разность  $\Delta=[(0,768-0,6)/0,6] \cdot 100\%=28\%$ , что значительно превосходит допустимую погрешность 5%.

Расчет повторяем в той же последовательности со значением коэффициента  $\varphi$ , равным среднему арифметическому на первом шаге:  $\varphi_{cp}=(0,6+0,768)/2=0,684$ .

*Второй шаг приближений.* Расчет ведем без дополнительных пояснений:

– принимаем  $\varphi_2=0,684$ ;

– вычисляем  $d_I \geq \sqrt{\frac{4 \cdot 17,3 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 0,684 \cdot 125 \cdot 10^6}} = 0,0161\text{м} = 16,1\text{мм}$ ;

– округляем  $d_I=17\text{мм}$ ;

– гибкость  $\lambda=4 \cdot 346/17=81$ ;

– коэффициент на выходе  $\varphi_2^*=0,75-(0,75-0,69) \cdot 1/10=0,744$ ;

– разность  $\Delta=[(0,744-0,684)/0,684] \cdot 100\%=9\%$ .

*Третий шаг приближений:*

– принимаем  $\varphi_3=0,714$ ;

– вычисляем  $d_I \geq \sqrt{\frac{4 \cdot 17,3 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 0,714 \cdot 125 \cdot 10^6}} = 0,0157\text{м} = 15,7\text{мм}$ ;

– округляем  $d_I=16\text{мм}$ ;

- гибкость  $\lambda=4\cdot346/16=86,5$ ;
- коэффициент на выходе  $\varphi_3^*=0,75-(0,75-0,69)\cdot6,5/10=0,711$ ;
- разность  $\Delta=[(0,714-0,711)/0,714]\cdot100\%=0,6\%$ .

На этом способ последовательных приближений заканчиваем с результатом  $d_1=16\text{мм}$ ,  $\lambda=86,5$ .

Проверяем первый стержень по коэффициенту запаса устойчивости. Для этого вычисляем критическую силу. Гибкость  $\lambda=86,5<100$ , поэтому используем формулу Ясинского (5)  $F_{кр}=A\cdot(a-b\lambda+c\lambda^2)$ , где для стали **Ст3**  $a=310\text{ МПа}$ ;  $b=1,14\text{ МПа}$ ;  $c=0$ . (для древесины, например, сосна  $a=28,7\text{ МПа}$ ,  $b=0,19\text{ МПа}$ )

$$F_{кр}=3,14\cdot(0,016)^2/4\cdot(310\cdot10^6-1,14\cdot10^6\cdot86,5)=42,5\text{кН}.$$

Коэффициент запаса устойчивости  $n_y=F_{кр}/|N_1|=42,5/17,3=2,5$ .

Нормативное значение коэффициента запаса устойчивости для стальных конструкций  $[n_y]=1,8\div3,0$ . Полученное значение фактического коэффициента запаса устойчивости входит в нормативный интервал.

Итак, диаметр сечения первого стержня  $d_1=16\text{мм}$ .

**РАСЧЕТ ВТОРОГО СТЕРЖНЯ.**  $|N_2|=10\text{кН}$ ;  $l_2=h/\sin 30^\circ=300/0,5=600\text{мм}$ .

Расчет аналогичен расчету первого стержня.

*Первый шаг приближений:*

- принимаем  $\varphi_1=0,6$ ;
- вычисляем диаметр  $d_2\geq\sqrt{\frac{4\cdot10\cdot10^3}{3,14\cdot0,6\cdot125\cdot10^6}}=0,0130\text{м}$ ;
- принимаем в соответствии с рядом нормальных размеров  $d_2=13\text{мм}$ ;
- гибкость  $\lambda=4\cdot600/13=185$ ;
- коэффициент  $\varphi_1^*=(0,23+0,21)/2=0,22$ ;
- разность  $\Delta=(0,6-0,22)/0,6\cdot100\%=63\%$ .

*Второй шаг приближений:*

- принимаем  $\varphi_2=(\varphi_1+\varphi_1^*)/2=0,6+0,22/2=0,41$ ;
- диаметр  $d_2\geq\sqrt{\frac{4\cdot10\cdot10^3}{3,14\cdot0,41\cdot125\cdot10^6}}=0,0158\text{м}$ ;
- округляем  $d_2=16\text{мм}$ ;
- гибкость  $\lambda=4\cdot600/16=150$ ;
- коэффициент  $\varphi_2^*=0,32$ ;
- разность  $\Delta=(0,41-0,32)/0,41\cdot100\%=22\%$ .

*Третий шаг приближений:*

- принимаем  $\varphi_3=(0,41+0,32)/2=0,365$ ;
- диаметр  $d_2\geq\sqrt{\frac{4\cdot10\cdot10^3}{3,14\cdot0,365\cdot125\cdot10^6}}=0,0167\text{м}$ ;
- округляем  $d_2=17\text{мм}$ ;
- гибкость  $\lambda=4\cdot600/17=141$ ;
- коэффициент  $\varphi_3^*=0,36-(0,36-0,32)\cdot1/10=0,356$ ;
- разность  $\Delta=(0,365-0,356)/0,365\cdot100\%=2,5\%$ .

На этом способ последовательных приближений заканчиваем с результатом  $d_2=17\text{мм}$  и  $\lambda=141$ .

Проверяем расчет по коэффициенту запаса устойчивости. Для вычисления критической силы используем формулу Эйлера (4), так как гибкость  $\lambda=141>100$ :

$$F_{кр}=\pi^2 \cdot E \cdot I_{min}/(\mu l)^2=3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 3,14 \cdot 0,017^4/[(1 \cdot 0,6)^2 \cdot 64]=22446\text{Н}=22,4\text{кН},$$

где  $E=2 \cdot 10^{11}\text{Па}$  – модуль упругости стали.

Фактический коэффициент запаса устойчивости  $n_y=F_{кр}/|N_2|=22,4/10=2,24$  входит в нормативный интервал. Итак, диаметр второго стержня  $d_2=17\text{мм}$ .

Полезно заметить, что диаметр второго стержня получился больше диаметра первого стержня, хотя продольная сила в нем значительно меньше усилия в первом стержне. Это является следствием того, что размеры сечения сжатых деталей зависят не только от нагрузки, но и от их длины.

Отметим также, что расчет второго стержня можно провести другим способом.

Начиная расчет со значения  $\phi_l=0,6$ , мы фактически исходим от значения гибкости  $\lambda=100$  (**приложение Г**), которое является граничным между областями применимости формул Эйлера и Ясинского. Поэтому первый шаг приближений определяет, в область применения какой из этих двух формул мы попадаем в результате расчета. Так, получив для второго стержня на первом шаге приближений значение гибкости  $\lambda=185>100$ , можно сразу воспользоваться формулой Эйлера. Зададим значение коэффициента запаса устойчивости из нормативного интервала  $[n_y]=1,8 \div 3,0$ , например  $n_y=1,8$ . Тогда критическая сила будет равна  $F_{кр}=n_y \cdot |N_2|=1,8 \cdot 10=18\text{кН}$ . Зная критическую силу, из формулы Эйлера (4) значение момента инерции сечения. (В данном случае получаем минимально возможное значение  $F_{кр}$ , при котором может произойти потеря устойчивости, при минимальном значении  $I_{min}$  и  $d_{min}$ )

$$I_{min}=F_{кр}(\mu l)^2/(\pi^2 E)=18 \cdot 10^3(1 \cdot 0,6)^2/(3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^{11})=0,384 \cdot 10^{-8}\text{м}^4.$$

Но для круга  $I_{min}=\pi d^4/64$ , откуда определяем диаметр сечения второго стержня

$$d_2=\sqrt[4]{\frac{64 I_{min}}{\pi}}=\sqrt[4]{\frac{64 \cdot 0,384 \cdot 10^{-8}}{3,14}}=0,0167\text{ м}.$$

Округляем в большую сторону, увеличивая тем самым запас устойчивости:  $d_2=17\text{мм}$ . Проверять расчет в этом случае нет необходимости.

Использовать подобный ход решения при значениях гибкости  $\lambda<100$  не предоставляется возможным, так как в формуле Ясинского (5) два неизвестных: площадь  $A$  и гибкость  $\lambda$ .

### Пример расчета на сжатие стандартного профиля

Стойка (рисунок 17) изготавливается из стандартного двутавра. Материал – сталь **Ст3**. Определить размеры поперечного сечения стойки, величину критической силы и коэффициент запаса устойчивости.

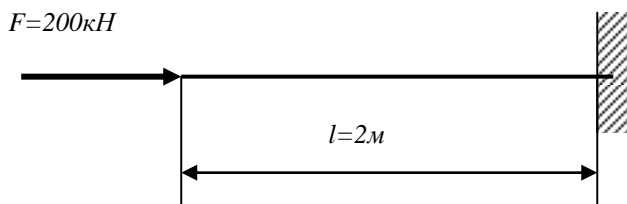


Рисунок 17

### Решение

При расчете на устойчивость стандартных профилей используются таблицы сортамента проката, в остальном расчет такой же, как в предыдущем примере.

Из условия устойчивости (6) выражаем площадь сечения  $A \geq N/(\varphi[\sigma]_{сж})$ .

Используем способ последовательных приближений.

*Первый шаг приближений:*

- принимаем  $\varphi_1 = 0,6$ ;
- вычисляем площадь  $A \geq (200 \cdot 10^3) / (0,6 \cdot 125 \cdot 10^6) = 26,7 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 26,7 \text{ см}^2$ ;
- по таблице сортамента двутавра (ГОСТ 8239-89) принимаем двутавр №20 ( $A = 26,8 \text{ см}^2$ ). Значение радиуса инерции берем также из таблиц  $i_{min} = i_y = 2,07 \text{ см}$ ;
- вычисляем значение гибкости  $\lambda = \mu l / i_{min} = 2 \cdot 200 / (2,07 \cdot 10^{-2}) = 193$ , где  $\mu = 2$  для данного способа закрепления (рисунок 14);
- из **приложения Г** при помощи линейного интерполирования находим значение коэффициента  $\varphi_1^* = 0,21 - (0,21 - 0,19) \cdot 3/10 = 0,204$ ;
- разность  $\Delta = (\varphi_1 - \varphi_1^*) / \varphi_1 \times 100\% = (0,6 - 0,204) / 0,6 \times 100\% = 66\%$ , что значительно превышает 5%.

*Второй шаг приближений:*

- принимаем  $\varphi_2 = (\varphi_1 + \varphi_1^*) / 2 = (0,6 + 0,204) / 2 = 0,402$ ;
- площадь  $A \geq (200 \cdot 10^3) / (0,402 \cdot 125 \cdot 10^6) = 39,8 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 39,8 \text{ см}^2$ ;
- принимаем двутавр №33 ( $A = 42,2 \text{ см}^2$ ;  $i_{min} = 2,79 \text{ см}$ );
- гибкость  $\lambda = (2 \cdot 2) / (2,79 \cdot 10^{-2}) = 143$ ;
- коэффициент на выходе  $\varphi_2^* = 0,36 - (0,36 - 0,32) \cdot 3/10 = 0,348$ ;
- разность  $\Delta = (0,402 - 0,348) / 0,402 \times 100\% = 13,4\%$ .

*Третий шаг приближений:*

- принимаем  $\varphi_3 = (0,402 + 0,348) / 2 = 0,375$ ;
- площадь  $A \geq (200 \cdot 10^3) / (0,375 \cdot 125 \cdot 10^6) = 42,6 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 42,6 \text{ см}^2$ ;
- двутавр №36 ( $A = 48,6 \text{ см}^2$ ;  $i_{min} = 2,89 \text{ см}$ );
- гибкость  $\lambda = (2 \cdot 2) / (2,89 \cdot 10^{-2}) = 138$ ;
- коэффициент  $\varphi_3^* = 0,40 - (0,40 - 0,36) \cdot 8/10 = 0,368$ ;
- разность  $\Delta = (0,375 - 0,368) / 0,375 \times 100\% = 2\%$ .

Расчет заканчиваем с результатом: двутавр №36, гибкость  $\lambda = 138$ , момент инерции сечения  $I_{min} = I_y = 516 \text{ см}^4$ .

Находим величину критической силы по формуле Эйлера (4):

$$F_{кр} = (\pi^2 E I_{min}) / (\mu l)^2 = (3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 516 \cdot 10^{-8}) / (2 \cdot 2)^2 = 634 \cdot 10^3 \text{ Н} = 634 \text{ кН}.$$

Коэффициент запаса устойчивости  $n_y = F_{кр} / F = 634 / 200 = 3,2$  превышает нормативные значения, поэтому проверяем меньший номер двутавра №33, у

которого гибкость  $\lambda=143$  (из второго шага приближений) и момент инерции  $I_{min}=419\text{см}^4$ .

Критическая сила

$$F_{кр}=(3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 419 \cdot 10^{-8})/(2 \cdot 2)^2=516\text{кН}.$$

Коэффициент запаса устойчивости  $n_y=516/200=2,58$ , что удовлетворяет нормативным значениям.

Окончательно принимаем двутавр №33

## СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ ФЕРМЫ

Продольные силы в стержнях фермы определяются методом сечений, в основе которого лежат уравнения статического равновесия. Рассмотрим пример плоской фермы (рисунок 18).

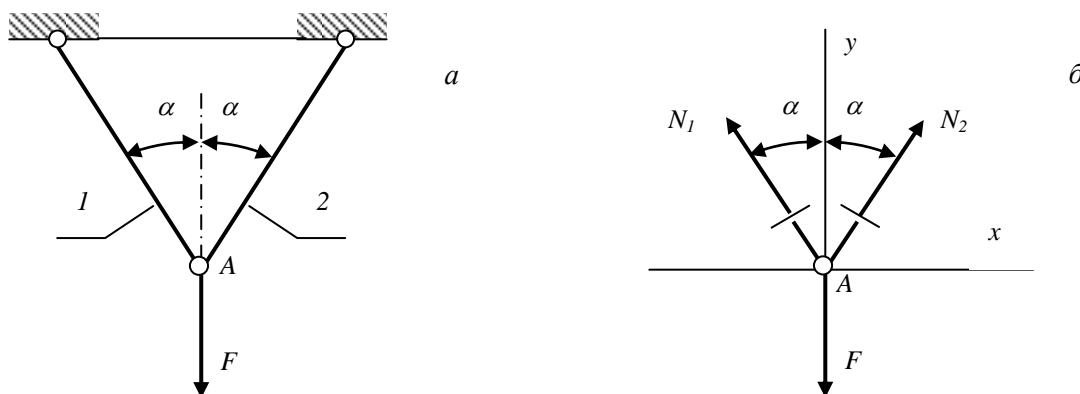


Рисунок 18

Чтобы закрепить груз  $F$  неподвижно в плоскости чертежа, очевидно, достаточно двух стержней 1 и 2 (рисунок 18,а). Вырезая узел А, получим систему сил (рисунок 18,б), сходящихся в одной точке, для которой, как известно, можно составить два независимых уравнения равновесия:

$$\sum X = -N_1 \sin \alpha + N_2 \sin \alpha = 0;$$

$$\sum Y = N_1 \cos \alpha + N_2 \cos \alpha = F,$$

решая которые совместно, получим:  $N_1 = N_2 = F/(2 \cos \alpha)$ .

Конструкции, в которых число неизвестных равно числу уравнений статики, называются *статически определенными*. Особенностью таких конструкций является то, что при разрушении одного элемента выходит из строя вся конструкция в целом.

Желая увеличить резерв прочности конструкции, введем в нее дополнительный стержень 3 (рисунок 19,а).

Теперь в двух уравнениях статического равновесия узла А (рисунок 19,б)

$$\sum X = -N_1 \sin \alpha + N_2 \sin \alpha = 0;$$

$$\sum Y = N_1 \cos \alpha + N_2 \cos \alpha + N_3 = F \quad (*)$$

будут содержаться три неизвестных. Так как число неизвестных больше, чем уравнений, то определить их невозможно, поэтому подобные конструкции

называют статически неопределимыми. Возникает необходимость составлять дополнительные уравнения. Рассмотрим деформацию конструкции под действием нагрузки (рисунок 20).

Считая реальные деформации малыми, можно не учитывать изменение угла  $\alpha$  между стержнями. Тогда из прямоугольного треугольника  $AA_1B$  следует:

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 \cos \alpha, \quad (**)$$

где  $\Delta l_1$  и  $\Delta l_2$  – абсолютные удлинения стержней.

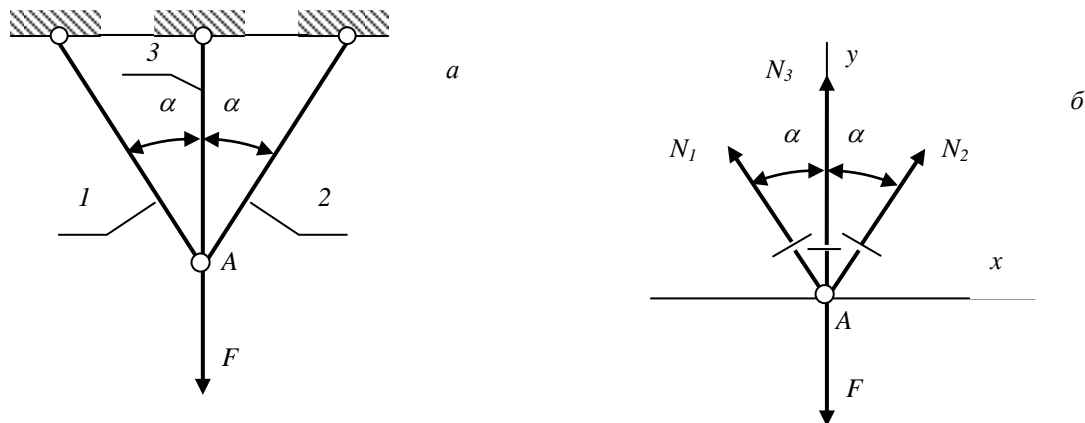


Рисунок 19

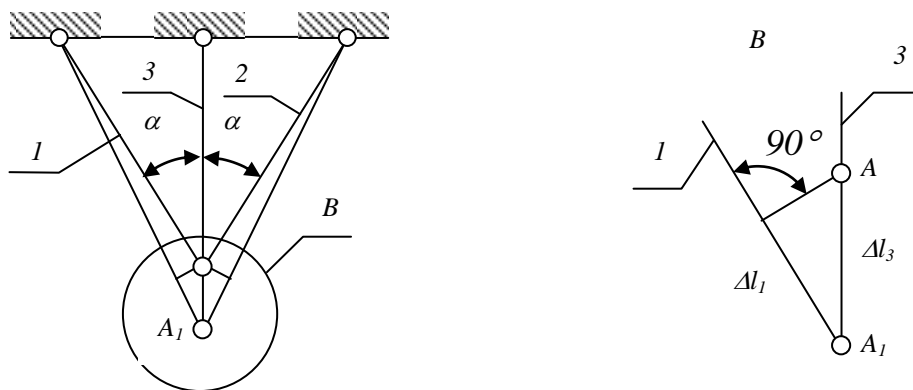


Рисунок 20

Уравнение (\*\*), связывающее деформации стержней 1 и 2, называется уравнением совместности деформаций.

Удлинения стержней при их растяжении и сжатии могут быть выражены через продольные силы по закону Гука:

$$\Delta l = \frac{Nl}{AE}. \quad (7)$$

Подставив в уравнение совместности деформаций (\*\*) выражения  $\Delta l_1 = N_1 l_1 / (AE)$  и  $\Delta l_3 = N_3 l_3 / (AE)$ , с учетом, что  $l_3 = l_1 \cos \alpha$ , получим:

$$N_1 = N_3 \cos^2 \alpha. \quad (***)$$

Таким образом, используя деформацию конструкции, получили дополнительное уравнение (\*\*\*), связывающее неизвестные продольные силы.

Теперь решаем совместно дополнительное уравнение (\*\*\*), с уравнениями статики (\*). Окончательно получим:

$$N_3 = F / (1 + \cos^3 \alpha); \quad N_1 = N_2 = F \cos^2 \alpha / (1 + 2 \cos^3 \alpha).$$

Таков путь определения продольных сил в статически неопределимых конструкциях (раскрытие статической неопределимости).

### Пример расчета несущей способности статически неопределимой конструкции

Жесткий горизонтальный брус (рисунок 21) опирается на неподвижную шарнирную опору **B** и удерживается от поворота двумя растяжками **KC** и **KD**, площади сечения которых известны:  $A_{KC} = A_1 = 100 \text{ мм}^2$ ;  $A_{KD} = A_2 = 200 \text{ мм}^2$ . Растяжки изготавливаются из стали **Ст3**. Определить несущую способность конструкции двумя методами расчета: по допускаемым напряжениям и по предельному состоянию.

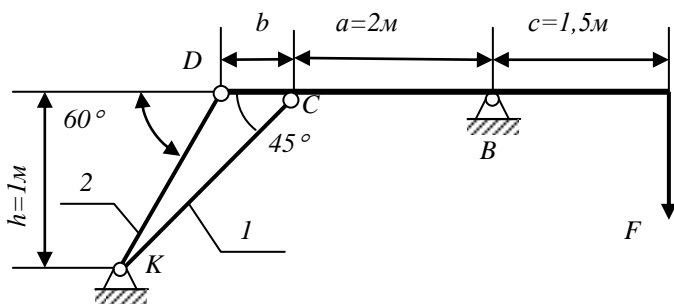


Рисунок 21

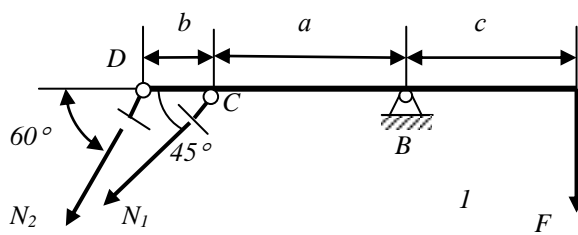


Рисунок 22

### Решение

Раскрытие статической неопределимости конструкции.

Пытаемся определить продольные силы в растяжках методом сечений. Для этого рассекаем тяги плоскостью, вводим обозначения возникающих в них продольных сил  $N_1$  и  $N_2$  (рисунок 22) и составляем одно уравнение равновесия горизонтального бруса:

$$\sum m_B = N_2 \sin 60^\circ (a+b) + N_1 \sin 45^\circ \cdot a - Fc = 0,$$

где  $b = h / \tan 45^\circ - h / \tan 60^\circ = 1/1 - 1/1,732 = 0,42 \text{ м}$ ,

или после подстановки числовых значений

$$2,1N_2 + 1,41N_1 = 1,5F. \quad (*)$$

Два других уравнения  $\sum X = 0$  и  $\sum Y = 0$  не используем, так как в них войдут реакции в шарнире **B**, которые также неизвестны и определять их нет необходимости.

В уравнении статики (\*) два неизвестных, следовательно, конструкция один раз статически неопределима.



Составляем уравнение совместности деформаций. Под действием силы  $F$  тяги удлинится, и горизонтальный брус повернется на некоторый угол (рисунок 23).

При малых деформациях можно считать, что точки  $C$  и  $D$  перемещаются вертикально. Тогда из подобия треугольников  $CC_1B$  и  $DD_1B$  следует пропорция:  $DD_1/CC_1=DB/CB$ .

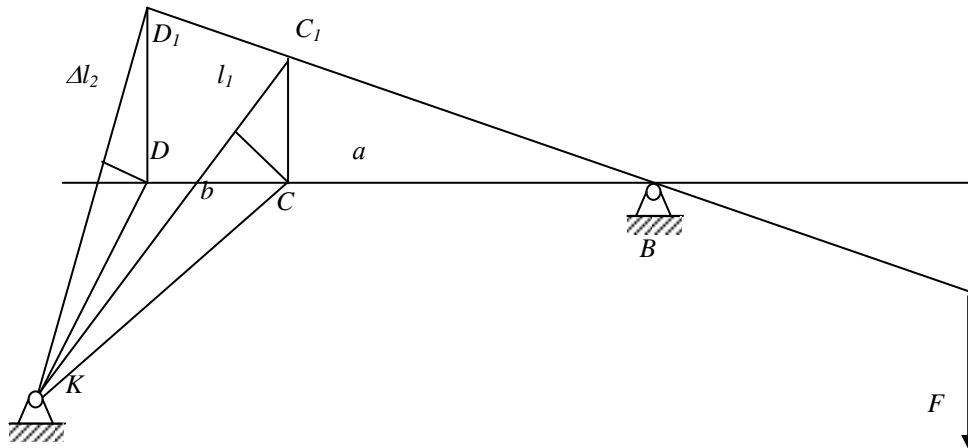


Рисунок 23

Перемещения  $DD_1$  и  $CC_1$  выражаем через удлинения растяжек:  $DD_1=\Delta l_2/\sin 60^\circ$ ;  $CC_1=\Delta l_1/\sin 45^\circ$  и подставляем в пропорцию, получаем уравнение совместности деформаций в виде:

$$\frac{\Delta l_2 \cdot \sin 45^\circ}{\sin 60^\circ \cdot \Delta l_1} = \frac{a+b}{a} \quad (**)$$

Выражаем удлинения тяг через продольные силы по формуле (7):

$$\Delta l_1 = N_1 l_1 / (AE) = N_1 h / (AE \cdot \sin 45^\circ);$$

$$\Delta l_2 = N_2 l_2 / (2AE) = N_2 h / (2AE \cdot \sin 60^\circ).$$

После подстановки в уравнение (\*\*) и преобразований окончательно получим дополнительное уравнение:

$$N_1 = 0,28 N_2 \quad (***)$$

Решая совместно дополнительное уравнение (\*\*\*) с уравнением статики (\*), получаем:  $N_1 = 0,17F$ ;  $N_2 = 0,60F$ , статическая неопределимость раскрыта.

Расчет конструкции на прочность по допускаемым напряжениям.

Определяем напряжения в тягах по формуле (1):

$$\sigma_1 = N_1 / A_1 = 0,17F / (100 \cdot 10^6) = 1700F;$$

$$\sigma_2 = N_2 / A_2 = 0,60F / (200 \cdot 10^6) = 3000F.$$

Сравнивая значения  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ , делаем вывод, что более нагружена тяга  $KD$ , то есть

$$\sigma_{\max} = \sigma_2 = 3000F.$$

Из условия прочности на растяжение (2)  $\sigma_{max} = \sigma_2 = 3000F \leq [\sigma]_p$  определяем несущую способность конструкции

$$[F] = [\sigma]_p / 3000 = 125 \cdot 10^6 / 3000 = 41,7 \cdot 10^3 \text{ Н} = 41,7 \text{ кН},$$

где  $[\sigma]_p = 125 \text{ МПа}$  – допускаемое напряжение на растяжение для стали **Ст3** (**приложение Б**).

#### Расчет конструкции на прочность по предельному состоянию.

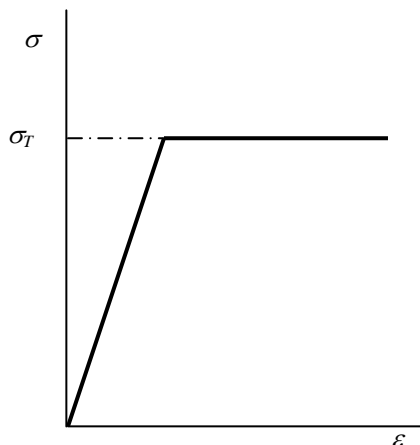


Рисунок 24

Используем схематизированную диаграмму растяжения Прандтля (рисунок 24).

При возрастании нагрузки на конструкцию сначала в тяге **KD**, а затем и в тяге **KC** напряжения достигнут предела текучести материала, то есть

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_m.$$

При этом значении напряжений полностью исчерпывается несущая способность конструкции. Это состояние называют предельным состоянием конструкции.

Продольные силы в тягах в этот момент

$$N_1 = \sigma_1 A_1 = \sigma_T A = 210 \cdot 10^6 \cdot 100 \cdot 10^{-6} = 21 \text{ кН};$$

$$N_2 = \sigma_2 A_2 = \sigma_T 2A = 210 \cdot 10^6 \cdot 200 \cdot 10^{-6} = 42 \text{ кН},$$

где  $\sigma_T = 210 \text{ МПа}$  – значение предела текучести для стали **Ст3**.

Подставив полученные значения продольных сил в уравнение статики (\*) и решая относительно **F**, получим предельное значение нагрузки, вызывающее текучесть обеих тяг:  $F_{пред} = 78,5 \text{ кН}$ . Поделив предельное значение силы  $F_{пред}$  на коэффициент запаса прочности по текучести  $n_T = 1,5$ , получаем допускаемое значение силы (несущую способность конструкции):

$$F_{дон} = F_{пред} / n_T = 78,5 / 1,5 = 52,4 \text{ кН}.$$

Сравнивая несущую способность  $F_{дон}$  по предельному состоянию с несущей способностью по допускаемым напряжениям  $[F]$ :

$$F_{дон} / [F] = 52,4 / 41,7 = 1,30,$$

делаем вывод, что расчет по предельному состоянию в данном случае на 30% эффективнее расчета по допускаемым напряжениям.

### **РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ СРЕЗЕ И СМЯТИИ**

При срезе (сдвиге) в поперечном сечении детали возникают только касательные напряжения  $\tau$ , равнодействующей которых является поперечная сила **Q**. Считая приближенно напряжения постоянными по всему сечению, получаем:

$$\tau = \frac{Q}{A_{ср}}, \quad (8)$$

где **Q** – срезающая (поперечная) сила;

$A_{ср}$  – площадь среза.

Поэтому условием прочности детали при срезе будет являться выполнение неравенства

$$\frac{Q}{A_{cp}} \leq [\tau]_{cp}, \quad (9)$$

где  $[\tau]_{cp}$  – допускаемые напряжения на срез (приложение Б).

Срез деталей разъемных соединений (болты, заклепки, пальцы, штифты, шпонки, шлицы) сопровождается смятием поверхностей контакта деталей. Поэтому подобные соединения рассчитываются дополнительно и на смятие.

Условие прочности на смятие:

$$\frac{Q}{A_{cm}} \leq [\sigma]_{cm}, \quad (10)$$

где  $[\sigma]_{cm}$  – допускаемые напряжения на смятие (приложение Б);

$A_{cm}$  – площадь либо поверхности смятия (если контакт деталей плоский), либо ее проекции (если контакт деталей по цилиндрической поверхности).

### Пример расчета цилиндрического шарнира

Тяга соединяется с кронштейном (рисунок 25) при помощи цилиндрического пальца. Материал всех деталей – сталь **Ст3**. Определить необходимые диаметр пальца  $d$  и толщину тяги  $t$ .

Решение

Палец работает на срез по двум плоскостям и смятие тягой и кронштейном (рисунок 26).

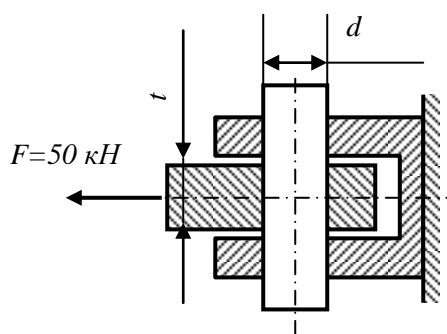


Рисунок 25

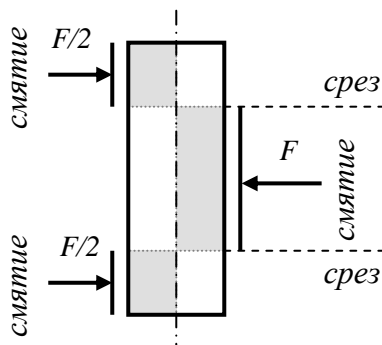


Рисунок 26

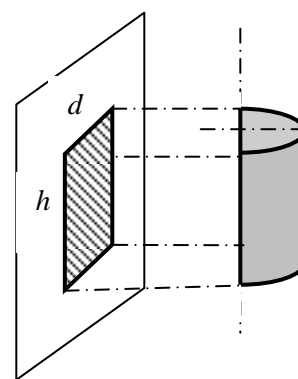


Рисунок 27

Срезающая сила, очевидно,  $Q=F$ . Общая площадь среза пальца  $A_{cp}=(\pi \cdot d^2/4) \cdot k$ , где  $d$  – диаметр сечения пальца;  $k=2$  – число плоскостей среза пальца. С учетом этих значений из условия прочности на срез (9) получаем:

$$d \geq \sqrt{\frac{4F}{\pi k [\tau]_{cp}}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 50 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 2 \cdot 75 \cdot 10^6}} = 0,0206 \text{ м},$$

где  $[\tau]_{cp}=75$  МПа – допускаемые напряжения на срез для стали **Ст3**.

Полученное значение диаметра округляем до нормального размера (**приложение В**):  $d = 22$  мм.

Смятие пальца происходит по цилиндрической поверхности (рисунок 27), поэтому в качестве величины  $A_{см}$  в условии прочности на смятие (10) принимаем площадь проекции поверхности смятия  $A_{см} = d \cdot t$ , тогда из (10)

$$t \geq Q / (d [\sigma]_{см}) = 50 \cdot 10^3 / (22 \cdot 10^{-3} \cdot 190 \cdot 10^6) = 0,0120 \text{ м},$$

где  $[\sigma]_{см} = 190$  МПа для стали **Ст3** (**приложение Б**).

Принимаем в соответствии с рядами нормальных размеров (**приложение В**)  $t = 12$  мм. Очевидно, что толщина планок кронштейна должна быть в 2 раза меньше:  $t/2 = 6$  мм.

### Пример расчета втулочной муфты

Два соосных вала диаметром  $D = 50$  мм соединяются между собой втулочной муфтой (рисунок 28). Муфта с одним валом соединяется цилиндрическим штифтом, к другому валу крепится угловым сварным швом. Соединение передает крутящий момент  $M = 600$  Н·м. Материал валов и муфты – сталь **45**. Определить: диаметр сечения штифта  $d$ , толщину втулки  $t$ , катет сварного шва  $h$ .

### Решение

Штифт (рисунок 29) работает на срез и смятие. Срезающая сила  $Q$  равна окружному усилию на поверхности вала:

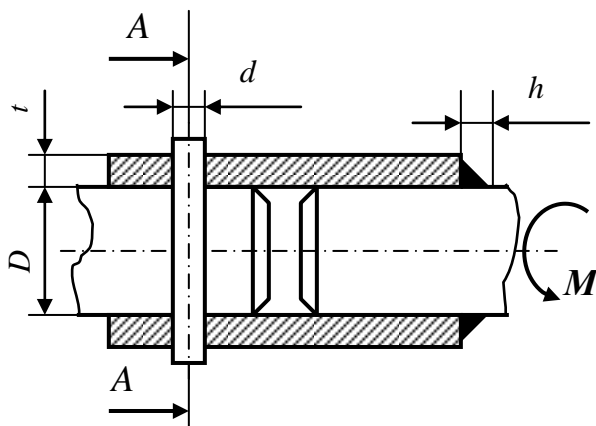


Рисунок 28

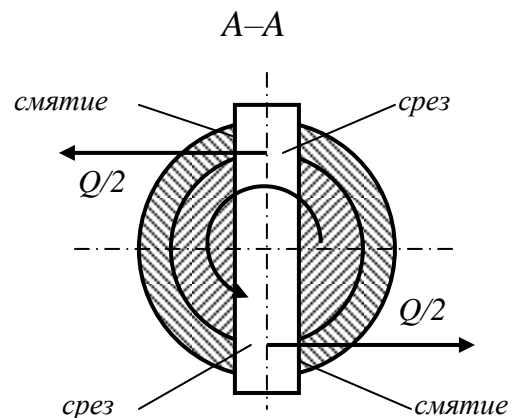


Рисунок 29

$$Q = M/R = 2M/D = 600 \cdot 2 / 0,050 = 24000 \text{ Н}.$$

Площадь среза штифта  $A \cong \pi d^2 / 4 \cdot k$ , где  $k = 2$ .

Из условия прочности на срез (9)

$$d \geq \sqrt{\frac{4Q}{\pi k [\tau]_{ср}}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 24000}{3,14 \cdot 2 \cdot 125 \cdot 10^6}} = 0,011 \text{ м},$$

где  $[\tau]_{ср} = 125$  МПа для стали **45** (**приложение Б**).

Полученное значение диаметра штифта соответствует нормальному размеру.

Толщину стенки муфты  $t$  определяем из условия прочности на смятие (10), подставив в него выражение  $A_{см} = t \cdot d \cdot k$  (смотри предыдущий пример):

$$t \geq Q / (dk[\sigma]_{см}) = 24000 / (0,011 \cdot 2 \cdot 300 \cdot 10^6) = 0,0036 \text{ м},$$

где  $[\sigma]_{см} = 300 \text{ МПа}$  для стали **45** (*приложение Б*).

Принимаем толщину стенки муфты  $t = 4 \text{ мм}$ .

Катет сварного шва  $h$  определяем из условия прочности на срез в наиболее узком месте (по биссектрисе). Площадь среза шва

$$A_{ср} = h \cdot \cos 45^\circ \cdot L = 0,7h\pi D,$$

где  $h \cdot \cos 45^\circ = 0,7h$  – наименьшая толщина шва;

$L = \pi D$  – длина шва по окружности вала.

Тогда из условия прочности (9)

$$h \geq Q / (0,7\pi D \cdot [\tau]_с) = 24000 / (0,7 \cdot 3,14 \cdot 0,050 \cdot 80 \cdot 10^6) = 0,0027 \text{ м},$$

где можно принять  $[\tau]_с = 80 \text{ МПа}$  для ручной сварки и  $[\tau]_с = 110 \text{ МПа}$  для автоматической.

Принимаем величину катета шва  $h = 3 \text{ мм}$ .

### Пример расчета фланцевой муфты

Два соосных вала диаметром  $D = 40 \text{ мм}$  соединяются фланцевой муфтой (рисунок 30). Число болтов – 4. Материал деталей – сталь **40**. Соединение передает крутящий момент  $M = 1700 \text{ Н·м}$ . Определить диаметр болтов  $d$  и толщину фланца  $t$ .

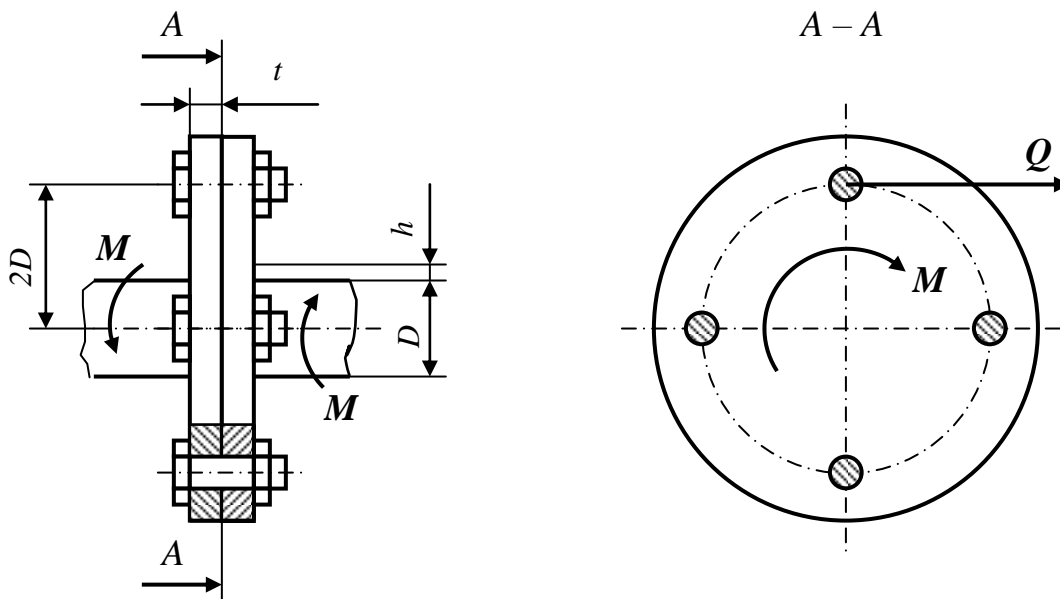


Рисунок 30

### Решение

Окружное усилие на удалении  $2D$  от оси вала, срезающее болты, равно:

$$Q = M / (2D) = 1700 / (0,04 \cdot 2) = 21250 \text{ Н}.$$

Площадь среза всех болтов

$$A_{ср} = (\pi d^2 / 4) k,$$

где  $k = 4$  – число плоскостей среза (*число болтов*).

Тогда из условия прочности на срез (9):

$$d \geq \sqrt{\frac{4Q}{\pi k[\tau]_{cp}}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 21250}{3,14 \cdot 4 \cdot 115 \cdot 10^6}} = 7,67 \cdot 10^{-3} \text{ м},$$

где  $[\tau]_{cp} = 115$  МПа для стали **40** (*приложение Б*).

Принимаем болт с метрической резьбой *M8*.

Толщину фланца  $t$  определяем из условия прочности на смятие (10), подставив в него выражение для  $A_{cm} = t \cdot d \cdot k$ :

$$t \geq Q / (d \cdot k \cdot [\sigma]_{cm}) = 21250 / (0,008 \cdot 4 \cdot 280 \cdot 10^6) = 0,0028 \text{ м},$$

где  $[\sigma]_{cm} = 280$  МПа для стали **40**.

Принимаем толщину фланца  $t = 4$  мм.

## РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ ПРИ КРУЧЕНИИ

При кручении в сечениях детали возникает только крутящий момент  $T_k$ , который считается положительным, если со стороны внешней нормали к сечению он действует против хода часовой стрелки. Это правило знаков используется при построении эпюры (графика изменения) крутящего момента. Деталь, работающая на кручение, называется валом. Внешние моменты на валу обычно обозначаются  $M_i$ , и стрелки моментов рисуются перед осью вала.

При кручении в поперечных сечениях возникают касательные напряжения  $\tau$ , которые достигают максимальных значений в наружных слоях вала и определяются по формуле

$$\tau_{max} = \frac{T_k}{W_p}, \quad (11)$$

где  $W_p$  – полярный момент сопротивления сечения (*приложение А*).

Поэтому **условие прочности при кручении** имеет вид:

$$\frac{T_k}{W_p} \leq [\tau]_{кр}, \quad (12)$$

где  $[\tau]_{кр}$  – допускаемые напряжения для материала на кручение.

Из условия прочности (12) определяется необходимый диаметр вала.

*Если по условиям работы конструкции требуется ограничить деформацию вала, то его дополнительно рассчитывают на жесткость.* При этом ограничивается некоторым нормативом относительный угол закручивания:

$$\theta = \frac{T_k}{GI_p} \times \frac{180^\circ}{\pi} \leq [\theta], \quad (13)$$

где  $\theta$  – угол закручивания вала длиной 1 м;

$G$  – модуль сдвига материала;

$I_p$  – полярный момент инерции сечения (*приложение А*);

$180^\circ/\pi$  – множитель для перевода радиан в градусы;

$[\theta]$  – величина допускаемого относительного угла закручивания, по нормам машиностроения  $[\theta]=0,2\div 1$  град/м.

Значения диаметра, полученные из условий прочности и жесткости, необходимо округлить до ближайшего большего нормального значения (**приложение В**) или до размера внутреннего кольца подшипника (кратное 5 мм). Расчет на жесткость, как правило, дает значение диаметра значительно большее, чем расчет на прочность, поэтому этот расчет следует проводить лишь при необходимости.

### Пример расчета вала на кручение

Трансмиссионный вал (рисунок 31) приводится в движение от двигателя через шкив 1. Шкивы 2, 3, 4 приводят в движение три механизма мощностью соответственно  $P_2=4$  кВт,  $P_3=3$  кВт,  $P_4=2$  кВт. Вал вращается со скоростью  $n=96$  оборотов в минуту. Материал – сталь 30. Определить размеры сечений вала по участкам.

### Решение

Находим моменты, которые передаются на вал через шкивы, по формуле  $M=P/\omega$ , где  $\omega=\pi n/30=3,14\cdot 96/30=10,0\text{с}^{-1}$  – угловая скорость вращения:

$$M_2=4\cdot 10^3/10=400\text{Н}\cdot\text{м};$$

$$M_3=3\cdot 10^3/10=300\text{Н}\cdot\text{м};$$

$$M_4=2\cdot 10^3/10=200\text{Н}\cdot\text{м}.$$

Момент на ведущем шкиве, очевидно, равен  $M_I=\sum M_i=900\text{Н}\cdot\text{м}$ .

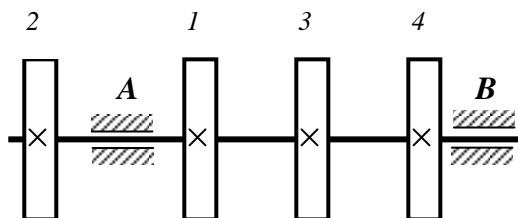


Рисунок 31

На расчетной схеме вала (рисунок 32) момент  $M_I$  должен иметь направление, обратное направлению моментов на ведомых шкивах.

Разбиваем вал на участки **I, II, III, IV** и строим эпюру внутреннего крутящего момента  $T_K$  (рисунок 32).

Проводим секущую плоскость на участке **I**. Правую от сечения часть вала отбрасываем. Для сохранения

равновесия в сечении прикладываем внутренний момент  $T_{K1}$ , направляя его против часовой стрелки со стороны внешней нормали к сечению. Составляем уравнение равновесия левой части

$$\sum m_o = T_{K1} + M_2 = 0.$$

Откуда определяем  $T_{K1} = -M_2 = -400\text{Н}\cdot\text{м}$ . Очевидно, что в любом сечении на первом участке  $T_{K1} = -400\text{Н}\cdot\text{м} = \text{const}$ . Строим график константы на первом участке и проводим вертикальную штриховку.

Рассекаем вал плоскостью на участке **II**, отбрасываем также правую часть, момент  $T_{K2}$  направляем против часовой стрелки, составляем уравнение равновесия

$$\sum m_o = T_{K2} - M_I + M_2 = 0,$$

из которого  $T_{K2} = M_I - M_2 = +500\text{Н}\cdot\text{м}$ . Строим график на втором участке.

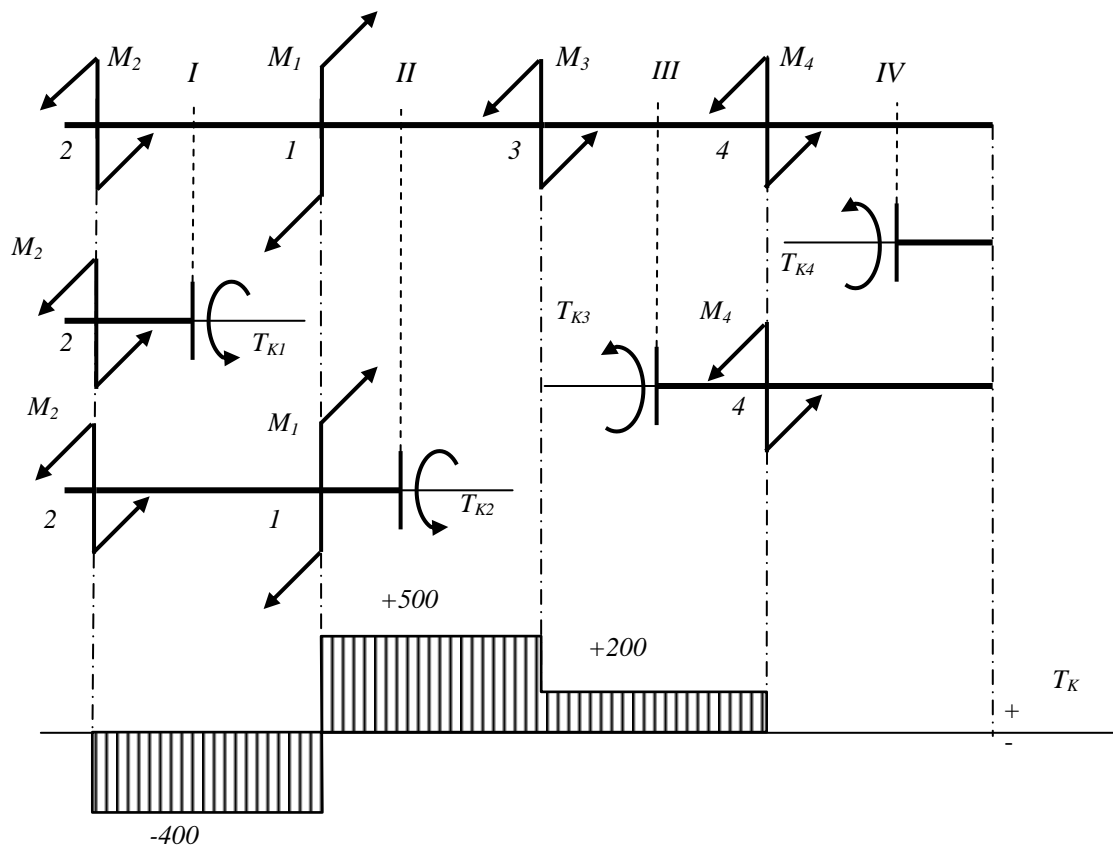


Рисунок 32

При рассмотрении участков **III** и **IV** выгоднее отбрасывать левую от сечения часть.

На третьем участке:  $\sum m_o = T_{K3} - M_4 = 0$ , откуда  $T_{K3} = M_4 = +200 \text{ Н}\cdot\text{м}$ .

На четвертом участке:  $\sum m_o = T_{K4} = 0$ , то есть этот участок на кручение не работает.

Полученная эпюра крутящего момента наглядно показывает, как нагружен вал по участкам.

Рассчитываем вал на прочность. В условие прочности при кручении (12)  $T_K / W_p \leq [\tau]_{кр}$  подставляем формулу для полярного момента сопротивления  $W_p = \pi d^3 / 16$  (приложение А) и выражаем диаметр:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16 T_K}{\pi [\tau]_{кр}}}$$

При расчете гладкого вала (одного диаметра по всей длине) в качестве  $T_K$  берется с эпюры максимальное абсолютное значение крутящего момента, при расчете ступенчатого вала диаметр на каждом участке вычисляется отдельно.

Из **приложения Б** выписываем значение  $[\tau]_{кр} = 125 \text{ МПа}$  для стали **30** и вычисляем диаметры по участкам:

$$d_1 \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 400}{3,14 \cdot 125 \cdot 10^6}} = 0,025 \text{ м};$$

$$d_2 \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 500}{3,14 \cdot 125 \cdot 10^6}} = 0,027 \text{ м};$$



$$d_3 \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 200}{3,14 \cdot 125 \cdot 10^6}} = 0,020 \text{ м};$$

$$d_4 \geq 0.$$

Полученные значения округляем (см. схему вала на рисунке 31):

- на первом участке – до размера подшипника:  $d_1 = 25 \text{ мм}$ ;
- на втором и третьем участках – до нормальных размеров:  $d_2 = 28 \text{ мм}$ ,  $d_3 = 20 \text{ мм}$ ;
- на четвертом участке можно принять любое значение диаметра, но с учетом установки подшипника и возможностью прохода при сборке шкива 4, например,  $d_4 = 17 \text{ мм}$ .

Рассчитываем вал на жесткость. В условие жесткости при кручении (13) подставим формулу для полярного момента инерции  $I_p = \pi d^4 / 32$  и выразим диаметр:

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 180 \cdot T_{\text{ж}}}{\pi^2 \cdot G \cdot [\Theta]}},$$

где  $G = 8 \cdot 10^{10} \text{ Па}$  – значение модуля сдвига для стали.

Определяем диаметры по участкам:

$$d_1 \geq \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 180 \cdot 400}{3,14^2 \cdot 8 \cdot 10^{10} \cdot 0,5}} = 0,0492 \text{ м};$$

$$d_2 \geq \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 180 \cdot 500}{3,14^2 \cdot 8 \cdot 10^{10} \cdot 0,5}} = 0,0520 \text{ м};$$

$$d_3 \geq \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 180 \cdot 200}{3,14^2 \cdot 8 \cdot 10^{10} \cdot 0,5}} = 0,0413 \text{ м};$$

$$d_4 \geq 0.$$

В расчете принято значение допускаемого относительного угла закручивания  $[\Theta] = 0,5 \text{ град/м}$ .

Округляем:  $d_1 = 50 \text{ мм}$ ;  $d_2 = 53 \text{ мм}$ ;  $d_3 = 42 \text{ мм}$ ;  $d_4 = 35 \text{ мм}$ .

## РАСЧЕТ НА ПРОЧОСТЬ ПРИ ПЛОСКОМ ИЗГИБЕ

Изгиб будет плоским (прямым), если силовая плоскость совпадает с одной из главных плоскостей инерции балки. В этом случае в сечении балки возникают два внутренних силовых фактора: изгибающий момент  $M_x$  и поперечная сила  $Q$ . Для определения опасных сечений, по которым производится дальнейший расчет балки на прочность, необходимо построить эпюры изгибающих моментов и поперечных сил.

Для построения эпюр используем метод сечений.

- Рассекаем балку плоскостью в произвольном месте участка (но не на его границах и желательно не посередине).

– Одну часть балки отбрасываем (обычно ее просто чем-нибудь закрывают), оставляя для рассмотрения ту часть, к которой приложено меньше сил.

– Длину рассматриваемой части балки (то есть координату сечения) обозначаем  $z$ , записываем пределы изменения  $z$  на данном участке:

$$a \leq z \leq a+l,$$

где  $a$  – координата начала участка;  $l$  – длина участка.

Записываем уравнение для изгибающего момента  $M_x$  в данном сечении, пользуясь следующим правилом: изгибающий момент в любом сечении балки равен алгебраической сумме моментов всех сил, лежащих по одну сторону от рассматриваемого сечения, то есть

$$M_x = \sum M_{\text{слева}} = \sum M_{\text{справа}}. \quad (14)$$

Знаки моментов в сумме должны соответствовать знакам кривизны изогнутой оси балки от этих моментов:



По полученному уравнению строим график изменения изгибающего момента (эпюру) на данном участке.

– Записываем уравнение для поперечной силы  $Q$  в рассматриваемом сечении, пользуясь следующим правилом: поперечная сила в любом сечении балки равна алгебраической сумме всех поперечных сил, лежащих по одну сторону от этого сечения, то есть

$$Q = \sum Q_{\text{слева}} = \sum Q_{\text{справа}}. \quad (15)$$

Знаки сил в сумме зависят от направления вращения: сила, действующая по ходу часовой стрелки, берется со знаком плюс, сила, действующая против часовой стрелки, – со знаком минус.

Уравнение поперечной силы можно получить другим способом, основанным на дифференциальной зависимости между изгибающим моментом и поперечной силой:

$$Q = \pm \frac{dM_x}{dz}, \quad (16)$$

то есть поперечная сила равна производной от уравнения изгибающих моментов, где знак плюс берется при рассмотрении левой части балки, знак минус ставится при рассмотрении правой части.

По полученному уравнению поперечной силы строим эпюру.

Таким же образом строятся эпюры  $M_x$  и  $Q$  на всех участках балки.

В опасных сечениях балки  $|M_x|_{\max}$  и  $|Q|_{\max}$  (сечения могут не совпадать).

В сечениях балки при изгибе возникают нормальные и касательные напряжения.

Нормальные напряжения достигают максимальных значений в точках сечения, наиболее удаленных от нейтрального слоя, и определяются по формуле

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x}, \quad (17)$$

где  $W_x$  – момент сопротивления сечения относительно нейтральной линии.

Касательные напряжения в сечениях с двумя осями симметрии достигают максимума в нейтральном слое и определяются по формуле Журавского

$$\tau_{\max} = \frac{Q \times S_x^*}{b^* \times I_x}, \quad (18)$$

где  $S_x^*$  – статический момент половины сечения относительно нейтральной линии:  $S_x^* = 0,5 \cdot A \cdot y_{\max}$ ;

$b^*$  – ширина нейтрального слоя;

$I_x$  – момент инерции сечения.

Так как нормальные и касательные напряжения имеют максимальные значения в разных точках сечения, оценку прочности можно проводить отдельно по каждому напряжению.

Так, условие прочности по нормальным напряжениям

$$\frac{|M_x|_{\max}}{W_x} \leq [\sigma]_{\text{изг}} \quad (19)$$

является при изгибе основным и служит для определения размеров поперечного сечения балки.

Условие прочности по касательным напряжениям

$$\frac{|Q|_{\max} \times S_x^*}{b^* \times I_x} \leq [\tau] \quad (20)$$

служит для проверки прочности, например, деревянных балок. Обычно же касательными напряжениями при изгибе пренебрегают.

### Пример расчета консольной балки

Консольная балка (рисунок 33) нагружена сосредоточенной силой  $F=3\text{кН}$  и равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью  $q=4\text{Н/м}$ . Балка деревянная, прямоугольного сечения с соотношением сторон  $h/b=1,5$ . Найти необходимые размеры сечения, если для дерева при изгибе  $[\sigma]_{\text{изг}}=8\text{МПа}$  и на скалывание вдоль волокон  $[\tau]_{\text{ск}}=1,2\text{МПа}$ .

#### Решение

Для консольной балки можно не вычислять реакции в заделке, но при построении эпюр в этом случае на всех участках необходимо рассматривать только свободный конец балки.

Нумеруем участки на балке **I, II, III** в порядке их последующего рассмотрения.

Проводим сечение на участке **I**. Рассматриваем правую от сечения часть балки (для наглядности рассматриваемые части балки в данном примере изображены отдельно на рисунке 33). Длину ее обозначаем  $z_I$ , пределы изменения которой на данном участке  $0 \leq z_I \leq a$  или  $0 \leq z_I \leq 1\text{м}$ . Записываем уравнение (14) для изгибающего момента в данном сечении

$$M_{xI} = \sum M_{\text{справа}} = +F \cdot z_I.$$

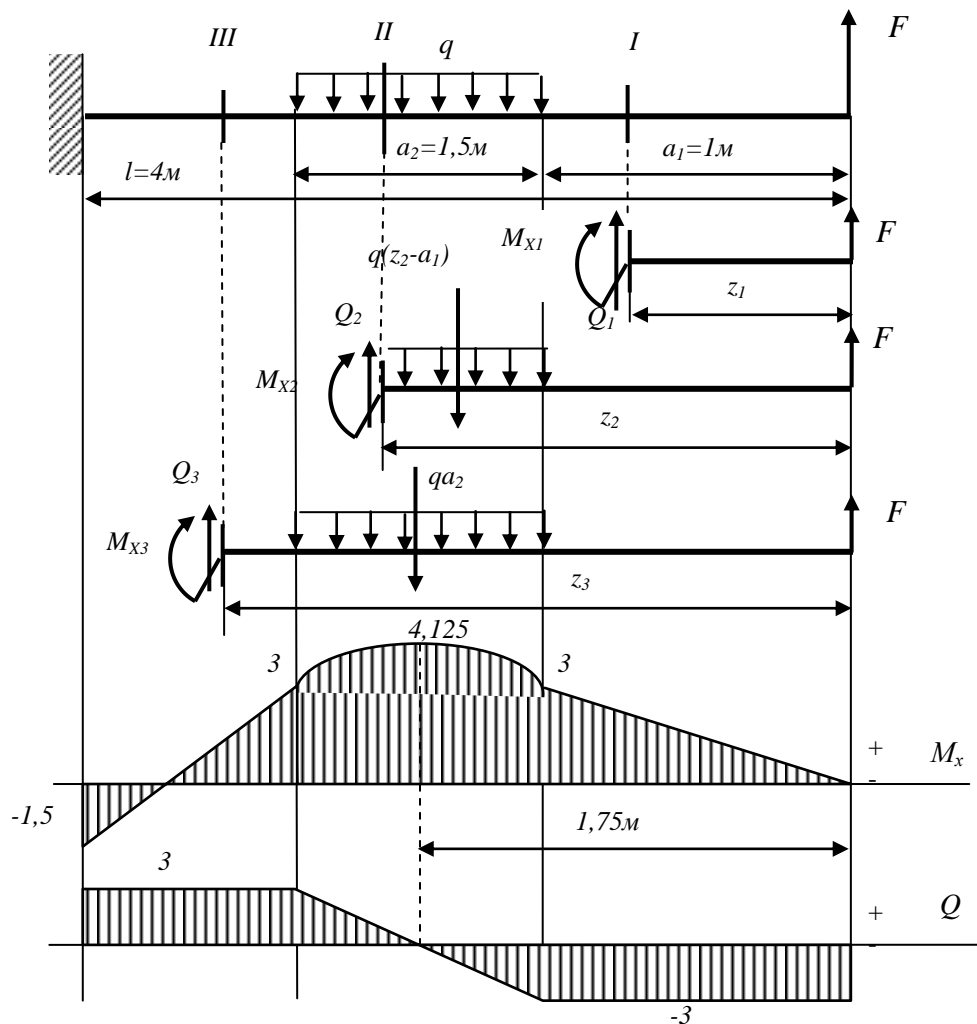


Рисунок 33

Получено, очевидно, уравнение прямой линии, график которой строим по двум значениям на границах участка:

при  $z_I=0$   $M_{XI}=0$ ; при  $z_I=1\text{ м}$   $M_{XI}=3 \cdot 1=3\text{ кН}\cdot\text{м}$ .

**Уравнение для поперечной силы (16) на первом участке**

$$Q_I = -dM_X/dz = -F = -3\text{ кН} = \text{const.}$$

Проводим сечение на втором участке. Рассматриваем правую часть балки  $z_2$ :  $a_1 \leq z_2 \leq (a_1 + a_2)$  или  $1\text{ м} \leq z_2 \leq 2,5\text{ м}$ .

Уравнение для изгибающего момента во втором сечении

$M_{X2} = \sum M_{\text{справа}} = +F \cdot z_2 - q(z_2 - a_1) \cdot (z_2 - a_1)/2 = +F \cdot z_2 - q(z_2 - a_1)^2/2$  — уравнение параболы с ветвями вниз. Находим ее значения на границах участка:

при  $z_2=1\text{ м}$   $M_{X2}=3 \cdot 1 - 0 = +3\text{ кН}\cdot\text{м}$ ; при  $z_2=2,5\text{ м}$   $M_{X2}=3 \cdot 2,5 - 4 \cdot (2,5 - 1)^2/2 = 3\text{ кН}\cdot\text{м}$ .

Исследуем параболу на экстремум. Берем производную и приравниваем к нулю:  $Q_2 = -dM_{X2}/dz = +F - q(z - a_1) = 0$ , откуда  $z = (F + qa_1)/q = +1,75\text{ м}$ . Полученное значение  $z=1,75\text{ м}$  входит в границы данного участка, поэтому парабола здесь имеет максимум. Находим его:

при  $z_2=1,75\text{ м}$   $M_{X2}=3 \cdot 1,75 - 4 \cdot (1,75 - 1)^2/2 = 4,125\text{ кН}\cdot\text{м}$ .

По трем точкам (на границах участка и максимума) проводим график параболы.

Уравнение для поперечной силы на втором участке:

$Q_2 = -dM_{x2}/dz = -F + q(z_2 - a_1)$  – уравнение прямой, график которой строим по ее значениям на границах участка: при  $z_2 = 1\text{м}$   $Q_2 = -3 + 0 = -3\text{кН}$ ; при  $z_2 = 2,5\text{м}$   $Q_2 = -3 + 4 \cdot (2,5 - 1) = +3\text{кН}$ .

Проводим сечение на третьем участке. Рассматриваем правую часть  $z_3$ :  
 $a_1 + a_2 \leq z_3 \leq l$  или  $2,5\text{м} \leq z_3 \leq 4\text{м}$ . Уравнение изгибающего момента:

$M_{x3} = \sum M_{справа} = +F \cdot z_3 - qa_2 \cdot (z_3 - a_1 - a_2/2)$  – уравнение прямой, график которой строим по двум значениям на границах участка:

при  $z_3 = 2,5\text{м}$   $M_{x3} = +3 \cdot 2,5 - 4 \cdot 1,5 \cdot (2,5 - 1 - 1,5/2) = +3\text{кН} \cdot \text{м}$ ;

при  $z_3 = 4\text{м}$   $M_{x3} = +3 \cdot 4 - 4 \cdot 1,5 \cdot (4 - 1 - 1,5/2) = -1,5\text{кН} \cdot \text{м}$ .

Уравнение поперечной силы  $Q_3 = -dM_{x3}/dz = -F + qa_2 = +3\text{кН} = \text{const}$ .

По эпюрам внутренних силовых факторов определяем их значения в опасных сечениях балки:

$$|M_x|_{\max} = 4,125\text{кН} \cdot \text{м}; \quad |Q|_{\max} = 3\text{кН}.$$

Определяем размеры сечения балки по нормальным напряжениям. Для прямоугольного сечения (приложение А)  $W_x = bh^2/6$ , или при соотношении  $h/b = 1,5$   $W_x = 2,25b^3/6$ , тогда из условия прочности (19)

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{6 \cdot |M_x|_{\max}}{2,25 \cdot [\sigma]_{\text{изг}}}} = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 4,125 \cdot 10^3}{2,25 \cdot 8 \cdot 10^6}} = 0,111\text{м}.$$

Округляем до  $b = 12\text{см}$ , тогда  $h = 12 \cdot 1,5 = 18\text{см}$ .

Проверяем сечение по касательным напряжениям. Для прямоугольного

сечения в формуле Журавского (рисунок 34):

$$I_x = bh^3/12; \quad b^* = b; \quad S_x^* = (b \cdot h/2) \cdot h/4 = bh^2/8.$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } \tau_{\max} &= \frac{|Q|_{\max} \cdot b \cdot h^2 / 8}{b \cdot bh^3 / 12} = \\ &= \frac{3 \cdot |Q|_{\max}}{2 \cdot b \cdot h} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 10^3}{2 \cdot 0,12 \cdot 0,18} = 0,21 \cdot 10^6 = \\ &= 0,21\text{МПа}, \text{ что меньше допускаемого} \end{aligned}$$

значения  $1,2\text{МПа}$ , следовательно, условие прочности по касательным напряжениям выполняется.

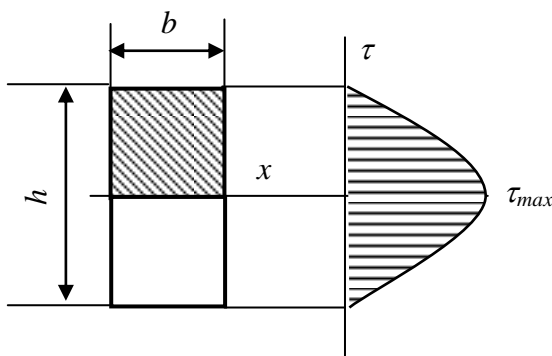


Рисунок 34

### Пример расчета двухопорной балки

Определить номер двутавра для двухопорной балки, изображенной на рисунке 35. Материал – сталь **Ст3**.

#### Решение

Для двухопорной балки в отличие от консоли определение реакций в опорах является обязательным. Составляем два уравнения равновесия в виде

сумм моментов относительно опор, тогда в каждом уравнении окажется только по одной неизвестной:

$$\sum m_A = -q \cdot l/2 \cdot l/4 + R_B \cdot l + M = 0;$$

$$\sum m_B = q \cdot l/2 \cdot 3l/4 - R_A \cdot l + M = 0;$$

решая которые, получим:  $R_A = +22,5 \text{ кН}$ ,  $R_B = -2,5 \text{ кН}$ .

Чтобы убедиться в правильности вычислений, делаем проверку:

$$\sum Y = R_A + R_B - q \cdot l/2 = 22,5 - 2,5 - 10 \cdot 2 = 0.$$

Строим эпюры внутренних силовых факторов  $M_x$  и  $Q$ .

Участок I. Слева.  $0 \leq z_I \leq l/2$  или  $0 \leq z_I \leq 2 \text{ м}$ .

Уравнение изгибающего момента

$M_{xI} = R_A \cdot z_I - q \cdot z_I \cdot z_I/2 = R_A \cdot z_I - q z_I^2/2$  – уравнение параболы. Ее значения на границах участка: при  $z_I = 0$   $M_{xI} = 0$ ; при  $z_I = 2 \text{ м}$   $M_{xI} = 22,5 \cdot 2 - 10 \cdot 2^2/2 = 25 \text{ кН} \cdot \text{м}$ .

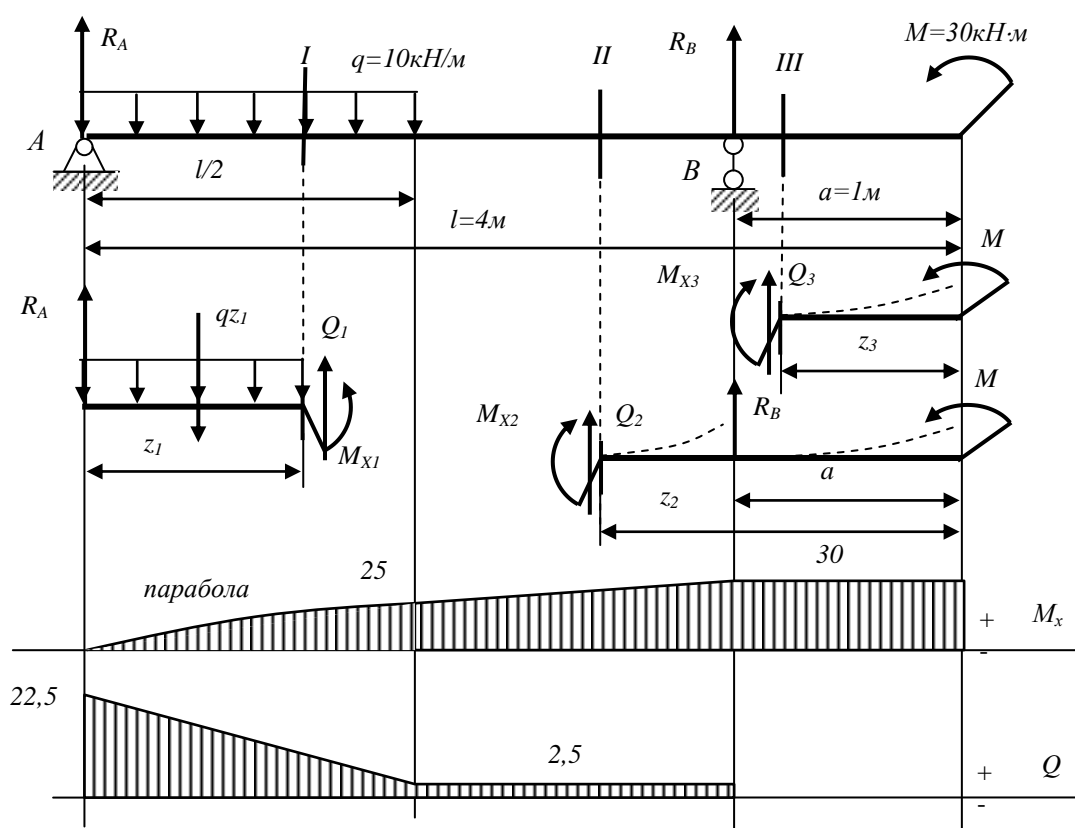


Рисунок 35

Исследуем параболу на экстремум: берем производную, приравниваем к нулю:  $dM_x/dz = R_A - qz_I = 0$ , откуда абсцисса экстремума  $z = R_A/q = 22,5/10 = 2,25 \text{ м}$ .

Полученное значение  $z$  лежит за пределами рассматриваемого участка, поэтому график параболы строим по двум точкам на границах участка в виде плавной кривой без экстремума.

Уравнение поперечной силы

$Q_I = dM_{xI}/dz = R_A - qz_I$  – уравнение прямой линии, график которой строим по двум точкам на границах участка: при  $z_I = 0$   $Q_I = R_A = 22,5 \text{ кН}$ ; при  $z_I = 2 \text{ м}$   $Q_I = 22,5 - 10 \cdot 2 = 2,5 \text{ кН}$ .

Участок **III**. Справа.  $0 \leq z_3 \leq a$  или  $0 \leq z_3 \leq 1\text{м}$ .

$$M_{X3} = +M = 30\text{кН}\cdot\text{м} = \text{const.}$$

$$Q_3 = -dM_{X3}/dz = 0 = \text{const.}$$

Участок **II**. Справа.  $a \leq z_2 \leq (a+l/2)$  или  $1\text{м} \leq z_2 \leq 3\text{м}$ .

$M_{X2} = M + R_B(z_2 - a)$  – уравнение прямой линии; при  $z_2 = 1\text{м}$   $M_{X2} = 30\text{кН}\cdot\text{м}$ ;

при  $z_2 = 3\text{м}$   $M_{X2} = 25\text{кН}\cdot\text{м}$ .

$$Q_2 = -dM_{X2}/dz = -R_B = +2,5\text{кН} = \text{const.}$$

Из эпюр:  $|M_X|_{\max} = 30\text{кН}\cdot\text{м}$ ;  $|Q|_{\max} = 22,5\text{кН}$ .

Из условия прочности по нормальным напряжениям (19)

$$W_X \geq \frac{|M_x|_{\max}}{[\sigma]_{\text{изг}}} = \frac{30 \cdot 10^3}{150 \cdot 10^6} = 0,2 \cdot 10^{-3} \text{м}^3 = 200 \text{см}^3,$$

где  $[\sigma]_{\text{изг}} = 150\text{МПа}$  – допускаемые напряжения на изгиб для стали **Ст3**.

По таблице сортамента двутавров (ГОСТ 8239-89) находим ближайшее большее значение момента сопротивления сечения:  $W_{\text{табл}} = 203 \text{см}^3$ , что соответствует двутавру №20а.

Проверять стандартный профиль по касательным напряжениям не обязательно.

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ПРИ ИЗГИБЕ

Деформация конструкции при изгибе характеризуется двумя величинами: прогибом  $y$  и углом поворота сечения  $\theta$ . Для их определения наиболее часто используются метод начальных параметров и метод Мора.

### Метод начальных параметров

В основе метода начальных параметров лежат два универсальных уравнения:

$$EI_x \cdot y = EI_x y_0 + EI_x \theta_0 \cdot z + \sum M_i \frac{(z - a_i)^2}{2} + \sum F_i \frac{(z - b_i)^3}{6} + \sum q_i \frac{(z - c_i)^4}{24} + \sum q_{ki} \frac{(z - d_i)^4}{24}; \quad (21)$$

$$EI_x \cdot \theta = EI_x \theta_0 + \sum M_i (z - a_i) + \sum F_i \frac{(z - b_i)^2}{2} + \sum q_i \frac{(z - c_i)^3}{6} + \sum q_{ki} \frac{(z - d_i)^3}{6}, \quad (22)$$

где  $y$  и  $\theta$  – соответственно прогиб и угол поворота в сечении с координатой  $z$  (начало координат в этом методе всегда располагается в крайней левой точке балки);

$y_0$  и  $\theta_0$  – соответственно прогиб и угол поворота сечения в начале координат (начальные параметры);

$M_i$ ;  $F_i$ ;  $q_i$  – нагрузки на балке, лежащие только слева от рассматриваемого сечения; знак усилий проставляется в зависимости от знака кривизны изогнутой оси балки от этой нагрузки;

$q_{ki}$  – компенсирующая распределенная нагрузка, которая вводится в том случае, когда основная нагрузка  $q_i$  не доходит до рассматриваемого сечения;

$a_i$  – координата точки приложения момента  $M_i$ ;

$b_i$  – координата точки приложения силы  $F_i$ ;

$c_i$  – координата начала распределенной нагрузки  $q_i$ ;

$d_i$  – координата начала распределенной компенсирующей нагрузки  $q_{ki}$ .

Последовательность определения перемещений методом начальных параметров следующая:

- вычисляются все усилия, включая реакции в опорах, действующие на балку;

- вычисляются начальные параметры  $y_0$  и  $\theta_0$ . Здесь возможны три случая:

1. В крайней левой точке балки (в начале координат) имеется заделка. Очевидно, что в заделке невозможны перемещения, то есть  $y_0=0$  и  $\theta_0=0$ ;

2. В начале координат находится шарнирная опора. В шарнире прогиб отсутствует ( $y_0=0$ ), но поворот возможен ( $\theta_0 \neq 0$ ). Чтобы найти второй начальный параметр  $\theta_0$ , необходимо составить уравнение (21) для прогиба на правой опоре и приравнять его к нулю;

3. В крайней левой точке балки отсутствует любая опора. В этом случае отличны от нуля оба начальных параметра. Для их определения необходимо составить два уравнения (21) для обеих опор и, приравняв к нулю, решить совместно относительно  $y_0$  и  $\theta_0$ ;

- после нахождения значений начальных параметров составляются уравнения (21) или (22) для определения перемещений в произвольной точке.

Для определения прогибов в простейших случаях можно воспользоваться формулами **приложения Д**.

### Пример определения перемещений при изгибе методом начальных параметров

Найти прогиб и угол поворота балки (рисунок 36) в сечении  $C$ . Балка стандартного двутаврового профиля №22.

#### Решение

Определяем значения реакций на опорах балки (рисунок 37).

$$\sum m_A = -M - q \cdot 2 \cdot 2/2 + R_B \cdot 2 = 0; \text{ откуда } R_B = 25 \text{ кН.}$$

$$\sum m_B = -M - R_A \cdot 2 + q \cdot 2 \cdot 2/2 = 0; \text{ откуда } R_A = -5 \text{ кН.}$$

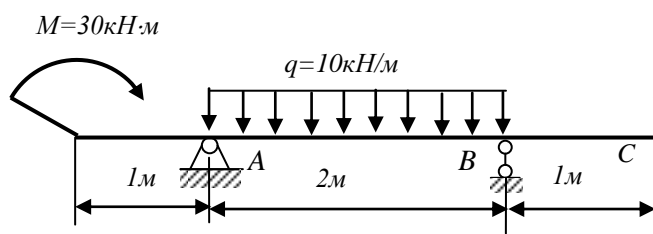


Рисунок 36

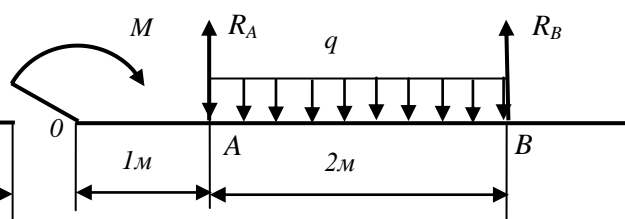


Рисунок 37



Проверяем правильность вычислений:

$$\sum Y = R_A + R_B - q \cdot 2 = 0.$$

Находим значения начальных параметров  $y_0 \neq 0$  и  $\theta_0 \neq 0$ . Для этого составляем уравнения (21) прогибов на опорах балки (рисунок 37).

На опоре **A**:  $y_A = 0$ ;  $z_A = 1\text{м}$ ;

$$EI_x \cdot y_A = EI_x \cdot y_0 + EI_x \cdot \theta_0 \cdot 1 + M \cdot (1-0)^2/2 = 0, \text{ или после подстановки}$$

$$EI_x \cdot y_0 + EI_x \cdot \theta_0 = -15. \quad (*)$$

На опоре **B**:  $y_B = 0$ ;  $z_B = 3\text{м}$ ;

$EI_x \cdot y_B = EI_x \cdot y_0 + EI_x \cdot \theta_0 \cdot 3 + M \cdot (3-0)^2/2 + R_A \cdot (3-1)^3/6 - q \cdot (3-1)^4/24 = 0$ , или после подстановки численных значений

$$EI_x \cdot y_0 + 3 \cdot EI_x \cdot \theta_0 = -121,7. \quad (**)$$

Решая совместно уравнения (\*) и (\*\*), получим:

$$EI_x \cdot y_0 = 38,3 \text{ кН} \cdot \text{м}^3; \quad EI_x \cdot \theta_0 = -53,3 \text{ кН} \cdot \text{м}^2.$$

Теперь, зная значения начальных параметров, определяем прогиб и угол поворота балки в заданном сечении **C**. Так как распределенная нагрузка  $q$  не доходит до этого сечения, мы ее сами должны продлить до этой точки, но при этом ввести компенсирующую нагрузку  $q_k = q$  противоположного направления (рисунок 38).

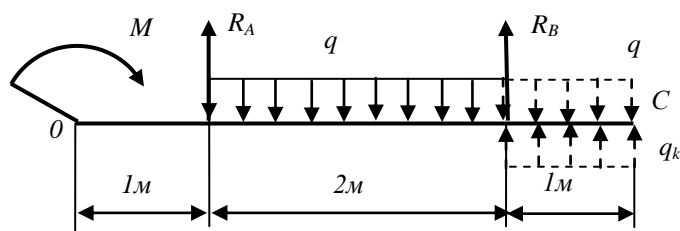


Рисунок 38

Составляем уравнение (21) прогибов для точки **C** ( $z_C = 4\text{м}$ ).

$$\begin{aligned} EI_x \cdot y_C = & EI_x \cdot y_0 + EI_x \cdot \theta_0 \cdot 4 + M \cdot (4-0)^2/2 + R_A \cdot (4-1)^3/6 + R_B \cdot (4-3)^3/6 - \\ & - q \cdot (4-1)^4/24 + q_k \cdot (4-3)^4/24 = 38,3 - 53,3 \cdot 4 + 30 \cdot 16/2 - 5 \cdot 27/6 + 25 \cdot 1/6 - \\ & - 10 \cdot 81/24 + 10 \cdot 1/24 = +13,4 \text{ кН} \cdot \text{м}^3. \end{aligned}$$

Отсюда

$$y_C = 13,4 / (EI_x) = 13,4 \cdot 10^3 / (2 \cdot 10^{11} \cdot 2550 \cdot 10^{-8}) = +0,00263 \text{ м} \approx +2,6 \text{ мм},$$

где  $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ МПа}$  – модуль упругости стали;

$I_x = 2550 \text{ см}^4$  – момент инерции двутавра №22.

Знак плюс у значения прогиба показывает, что прогиб направлен вверх.

Составляем для сечения **C** уравнение (22) угла поворота

$$\begin{aligned} EI_x \cdot \theta_C = & EI_x \cdot \theta_0 + M \cdot (4-0) + R_A \cdot (4-1)^2/2 + R_B \cdot (4-3)^2/2 - q \cdot (4-1)^3/6 + q_k \cdot (4-3)^3/6 = \\ = & -53,3 + 30 \cdot 4 - 5 \cdot 9/2 + 25 \cdot 1/2 - 10 \cdot 27/6 + 10 \cdot 1/6 = +13,4 \text{ кН} \cdot \text{м}^2. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\theta_C = 13,4 / (EI_x) = +13,4 \cdot 10^3 / (2 \cdot 10^{11} \cdot 2550 \cdot 10^{-8}) = +0,0026 \text{ рад} \approx +0,15 \text{ град},$$

знак плюс показывает, что сечение **C** при изгибе поворачивается против хода часовой стрелки.

### Метод Мора для определения перемещений

Одним из простых и эффективных способов определения перемещений (деформаций) при любом виде нагружения является метод, основанный на использовании интегралов Мора. Так как в большинстве случаев нагружения влиянием поперечных сил можно пренебречь, то с учетом деформации растяжения (сжатия), кручения и изгиба интегралы Мора имеют следующий вид:

$$\Delta_{iP} = \sum \int \frac{N \bar{N} dz}{EA} + \sum \int \frac{T_k \bar{T}_k dz}{GI_p} + \sum \int \frac{M_x \bar{M}_x dz}{EI_x} + \sum \int \frac{M_y \bar{M}_y dz}{EI_y}, \quad (23)$$

где  $\Delta_{iP}$  – перемещение точки  $i$  от внешней нагрузки;

$N, T_k, M_x, M_y$  – уравнения (эпюры) внутренних силовых факторов в сечении детали от действия только внешней нагрузки (грузовые эпюры);

$\bar{N}, \bar{T}_k, \bar{M}_x, \bar{M}_y$  – уравнения (эпюры) внутренних силовых факторов в этом же сечении детали от действия единичной фиктивной обобщенной силы, приложенной в точке определения перемещения в направлении искомого перемещения (единичные эпюры);

$E$  – модуль упругости материала;

$G$  – модуль сдвига материала;

$A$  – площадь сечения;

$I_p, I_x, I_y$  – моменты инерции сечения.

Интегрирование производится на каждом участке отдельно, результаты алгебраически суммируются.

Применительно к плоскому изгибу выражение (23) принимает вид:

$$\left. \begin{matrix} y_{iP} \\ \theta_{iP} \end{matrix} \right\} = \sum \int \frac{M_x \bar{M}_x dz}{EI_x}, \quad (24)$$

где  $y_{iP}; \theta_{iP}$  – соответственно искомые прогиб и угол поворота сечения  $i$ ;

$M_x$  – грузовая эпюра изгибающих моментов;

$\bar{M}_x$  – единичная эпюра моментов от действия либо единичной фиктивной силы (если определяется прогиб), либо единичного фиктивного момента (если определяется угол поворота сечения), приложенных в точке  $i$ .

Для практического вычисления интегралов Мора при условии постоянной жесткости стержня в пределах участка используется графоаналитический способ Верещагина (способ «перемножения» эпюр), который основан на том, что единичная эпюра обычно является линейной функцией.

В этом случае интеграл от произведения двух эпюр равен произведению площади грузовой эпюры на высоту единичной эпюры под центром грузовой, то есть

$$\int M_x \bar{M}_x dz = \{A\} \times [\bar{M}(z_C)], \quad (25)$$

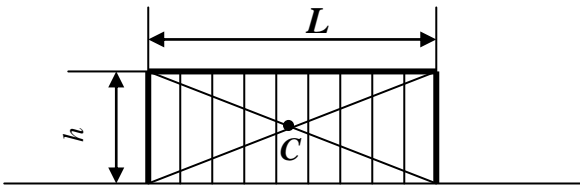
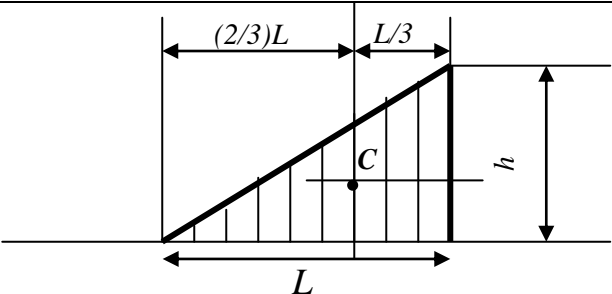
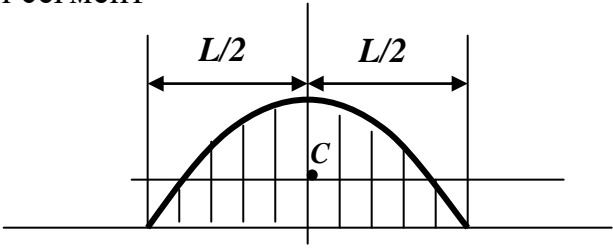
где  $\{A\}$  – площадь грузовой эпюры (для удобства при записи вычислений принято заключать в фигурные скобки);

$[\bar{M}_x(z_C)]$  – значение единичной эпюры, взятое под центром грузовой эпюры (при записи вычислений заключается в квадратные скобки).

Знак произведения берется плюс, если обе эпюры (грузовая и единичная) имеют одинаковые знаки; если грузовая и единичная эпюры имеют противоположные знаки, то их произведение берется со знаком минус.

Перед перемножением грузовая эпюра разбивается на простые геометрические фигуры (таблица 1). Примеры разбивки сложных эпюр приведены на рисунке 39. Далее каждая составляющая грузовой эпюры отдельно перемножается с единичной эпюрой, результаты алгебраически складываются.

Таблица 1 – Простые составляющие эпюр

Фигура	Площадь
<p>Прямоугольник</p> 	$A = Lh$
<p>Треугольник</p> 	$A = \frac{1}{2} Lh$
<p>Параболический сегмент</p> 	$A = \frac{q(L)^3}{12},$ где $q$ – интенсивность равномерно распределенной нагрузки

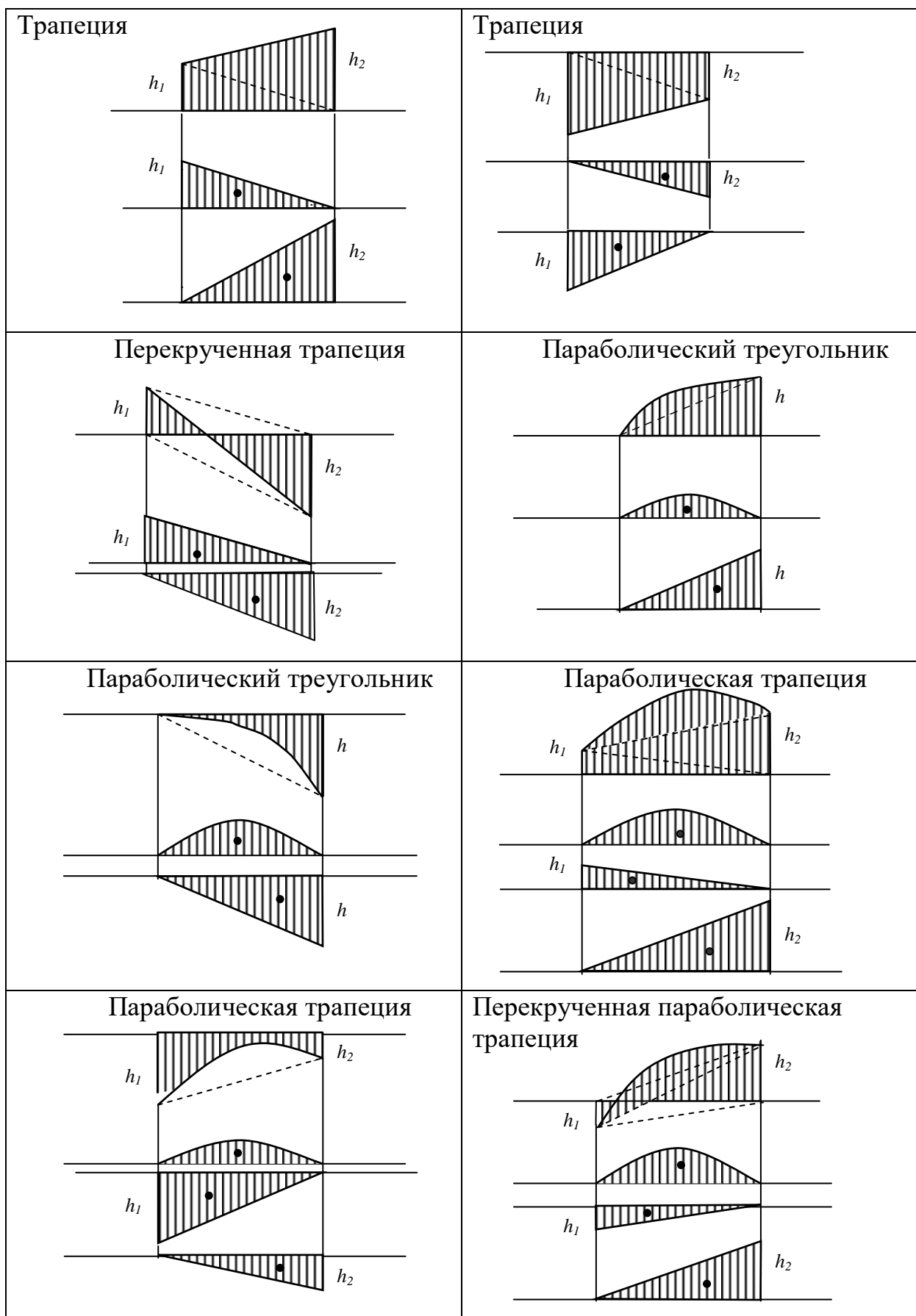


Рисунок 39. Примеры разбивки сложных эпюр на простые составляющие

## Пример определения перемещений методом Мора

Рассмотрим пример определения прогиба балки (рисунок 37), решенный ранее методом начальных параметров.

Реакции опор определены:

$$R_B = 25 \text{ кН}; R_A = -5 \text{ кН}.$$

Строим грузовую эпюру изгибающих моментов (рисунок 40).

$$0 \leq z_1 \leq 1 \text{ м};$$

$$M_{x1} = +M = 30 \text{ кН} \cdot \text{м} = \text{const.}$$

$$1 \text{ м} \leq z_2 \leq 3 \text{ м};$$

$$M_{x2} = M + R_A \cdot (z_2 - 1) - q(z_2 - 1)^2 / 2;$$

$$\text{при } z_2 = 1 \text{ м } M_{x2} = 30 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$\text{при } z_2 = 3 \text{ м } M_{x2} = 0;$$

$$0 \leq z_3 \leq 1 \text{ м } M_{x3} = 0.$$

Разбиваем грузовую эпюру моментов на простые составляющие: прямоугольник, треугольник и параболический сегмент.

Для определения прогиба в точке «С» к балке прикладываем единичную фиктивную силу. Строим единичную эпюру моментов. Из центров простых составляющих грузовой эпюры моментов опускаем перпендикуляры на единичную эпюру. Вычисляем прогиб балки, используя интеграл Мора и способ Верещагина:

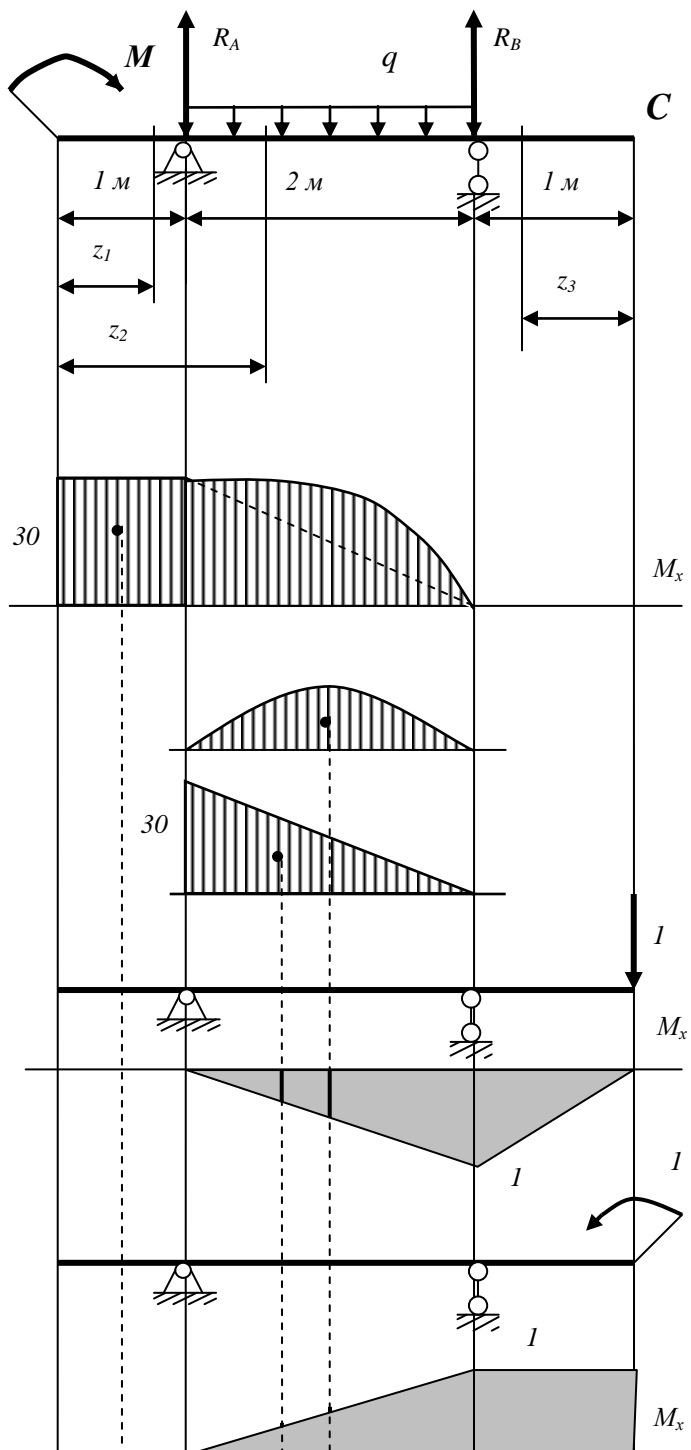


Рисунок 40

$$y_C = \sum \int \frac{M_x \bar{M}_x dz}{EI_x} =$$

$$= \frac{1}{EI_x} \left( \{30 \cdot 1\} [0] - \left\{ \frac{10 \cdot 2^3}{12} \right\} \left[ \frac{1}{2} \cdot 1 \right] - \left\{ \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 2 \right\} \left[ \frac{1}{3} \cdot 1 \right] \right) =$$

$$= -\frac{13,33 \text{ кН}}{EI_x} = -\frac{13,33 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 2550 \cdot 10^{-8}} = -0,00261 \text{ м.}$$

Знак минус показывает, что прогиб направлен против единичной фиктивной силы.

Для определения угла поворота сечения «С» к балке необходимо приложить единичный фиктивный момент, построить единичную эпюру моментов и перемножить ее с грузовой эпюрой изгибающих моментов:

$$\theta_C = \sum \int \frac{M_x M_x dz}{EI_x} =$$

$$= \frac{1}{EI_x} \left( \{30 \cdot 1\} [0] + \left\{ \frac{10 \cdot 2^3}{12} \right\} \left[ \frac{1}{2} \cdot 1 \right] + \left\{ \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 2 \right\} \left[ \frac{1}{3} \cdot 1 \right] \right) =$$

$$= +\frac{13,33}{EI_x} = +\frac{13,33 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 2550 \cdot 10^{-8}} = +0,00261 \text{ рад} = \frac{0,00261 \cdot 180}{\pi} = 0,15 \text{ град.}$$

Знак плюс у угла поворота сечения показывает, что сечение поворачивается в направлении единичного фиктивного момента.

## РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ СЛОЖНЫХ ФОРМАХ ИЗГИБА

Сложными (неплоскими) видами изгиба являются кривой изгиб и изгиб пространственный.

Кривой изгиб вызывается нагрузкой, расположенной в одной плоскости (силовая плоскость), но эта плоскость не совпадает ни с одной из главных плоскостей инерции балки. В этом случае изогнутая ось балки является плоской кривой, не лежащей в силовой плоскости, поэтому изгиб и назван кривой.

Если на балку действует нагрузка, не лежащая в одной плоскости, ее изогнутая ось является пространственной кривой, поэтому изгиб называется пространственным.

Оба вида сложного изгиба, по сути, являются суммой двух плоских изгибов в главных плоскостях инерции балки. Поэтому максимальные напряжения в сечении будут определяться суммой напряжений от каждого плоского изгиба:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y}, \quad (26)$$

где  $M_x$  и  $M_y$  — изгибающие моменты в сечении относительно главных осей инерции;

$W_x$  и  $W_y$  — моменты сопротивления сечения относительно его главных осей инерции.

Тогда условием прочности при сложных формах изгиба будет служить неравенство

$$\sigma_{max} = M_x/W_x + M_y/W_y \leq [\sigma]_{изг},$$

или в виде, более удобном для практических расчетов:

$$\frac{1}{W_x} \left( M_x + \frac{W_x}{W_y} M_y \right) \leq [\sigma]_{изг} . \quad (27)$$

Для расчета балки на прочность при косом изгибе необходимо:

- построить одну эпюру изгибающего момента  $M_{изг}$  для силовой плоскости;
- определить опасное сечение балки, в котором  $|M_{изг}|_{max}$ ;
- найти проекции максимального изгибающего момента относительно главных осей инерции опасного сечения

$$M_x = |M_{изг}|_{max} \cdot \sin \alpha;$$

$$M_y = |M_{изг}|_{max} \cdot \cos \alpha ,$$

где  $\alpha$  – угол между силовой плоскостью и главной осью инерции  $Cx$ ;

- воспользоваться условием прочности (26) или (27).

При пространственном изгибе последовательность расчета будет следующей:

- все действующие на балку усилия раскладываются на направления главных осей инерции;
- рассматривая отдельно главные плоскости инерции, строят две эпюры изгибающих моментов  $M_x$  и  $M_y$ ;
- находят положение опасного сечения балки, в котором напряжения достигают максимального значения. Для этого обычно приходится находить напряжения в нескольких предполагаемых сечениях;
- оценивается прочность балки по условию (26) или (27), где в качестве  $M_x$  и  $M_y$  берутся абсолютные значения моментов в опасном сечении.

### Пример расчета при косом изгибе

Двутавровая балка №60 перекрытия предназначена для работы на изгиб в вертикальной плоскости. При установке балки на опоры ее ось симметрии отклонилась от вертикали на 2 градуса. Как отразится неточность, допущенная при монтаже балки, на ее прочности?

### Решение

При правильной установке балки (рисунок 41,а) изгиб, очевидно, будет плоским, и максимальные напряжения в ней будут определяться по формуле (17):

$$\sigma_a = M_{изг}/W_x ,$$

где  $M_{изг}$  – изгибающий момент в вертикальной плоскости.

При наклонной установке двутавра (рисунок 41,б) изгиб становится косым, и максимальные напряжения должны вычисляться по формуле (27):

$$\begin{aligned} \sigma_b &= 1/W_x \cdot (M_x + W_x/W_y \cdot M_y) = M_{изг}/W_x \cdot (\sin 88^\circ + W_x/W_y \cdot \cos 88^\circ) = \\ &= M_{изг}/W_x \cdot (0,9994 + 2560/182 \cdot 0,0349) = 1,49 M_{изг}/W_x = 1,49 \cdot \sigma_a , \end{aligned}$$

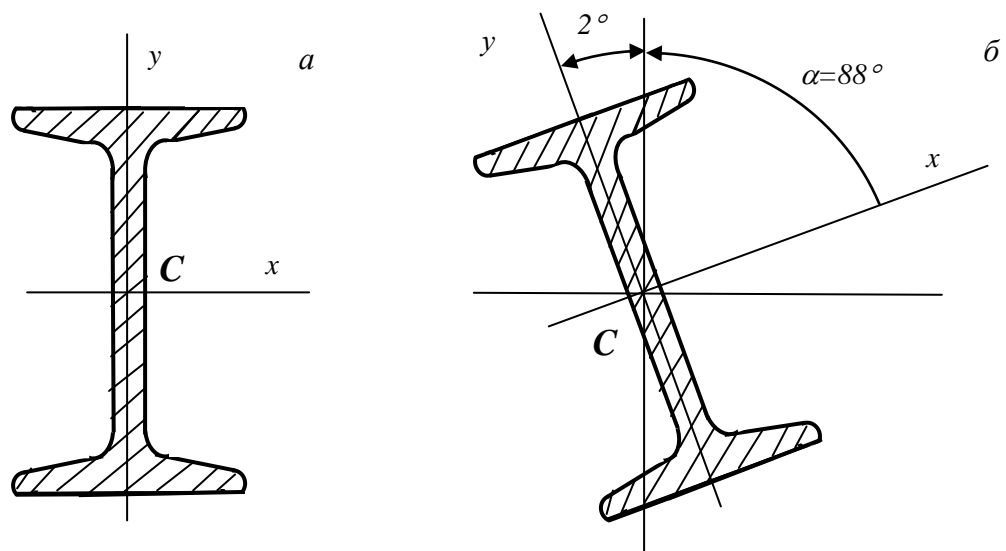


Рисунок 41

где  $\alpha = 88^\circ$ ;

$$\sin 88^\circ = 0,9994;$$

$$\cos 88^\circ = 0,0349;$$

$W_x = 2560 \text{ см}^3$ ,  $W_y = 182 \text{ см}^3$  – моменты сопротивления двутавра №60.

Таким образом, напряжения от ошибки при монтаже возрастут в 1,49 раза, следовательно, прочность балки уменьшится в 1,49 раз.

### Пример расчета при пространственном изгибе

К деревянному брусу (рисунок 42) приложены две одинаковые поперечные силы  $F_1 = F_2 = 10 \text{ кН}$ . Сила  $F_1$  направлена вертикально, сила  $F_2$  – под углом  $30^\circ$  к горизонту. Сечение бруса прямоугольное с соотношением сторон  $h/b = 1,5$ . Допускаемые напряжения для дерева на изгиб  $[\sigma]_{изг} = 10 \text{ МПа}$ . Определить необходимые размеры сечения бруса.

### Решение

Раскладываем силу  $F_2$  на направления главных осей инерции сечения

$$X_2 = F_2 \cdot \cos 30^\circ = 10 \cdot 0,866 = 8,66 \text{ кН};$$

$$Y_2 = F_2 \cdot \sin 30^\circ = 10 \cdot 0,5 = 5,0 \text{ кН}.$$

Рассматриваем отдельно изгиб балки в вертикальной и горизонтальной плоскостях.

Определяем реакции опор в вертикальной плоскости (рисунок 43).

$$\sum m_A = -F_1 \cdot 1 - Y_2 \cdot 2 + Y_B \cdot 3 = 0, \text{ откуда } Y_B = 6,67 \text{ кН}.$$

$$\sum m_B = F_1 \cdot 2 + Y_2 \cdot 1 - Y_A \cdot 3 = 0, \text{ откуда } Y_A = 8,33 \text{ кН}.$$

$$\text{Делаем проверку: } \sum Y = Y_A + Y_B - F_1 - Y_2 = 0.$$

Строим эпюру изгибающего момента в вертикальной плоскости  $M_x$ , которая будет являться ломаной прямой без разрывов.

На первом участке:  $0 \leq z_1 \leq 1 \text{ м}$ ;  $M_{x1} = Y_A \cdot z_1$ . При  $z_1 = 0$   $M_{x1} = 0$ ; при  $z_1 = 1 \text{ м}$   $M_{x1} = 8,33 \text{ кН} \cdot \text{м}$ .



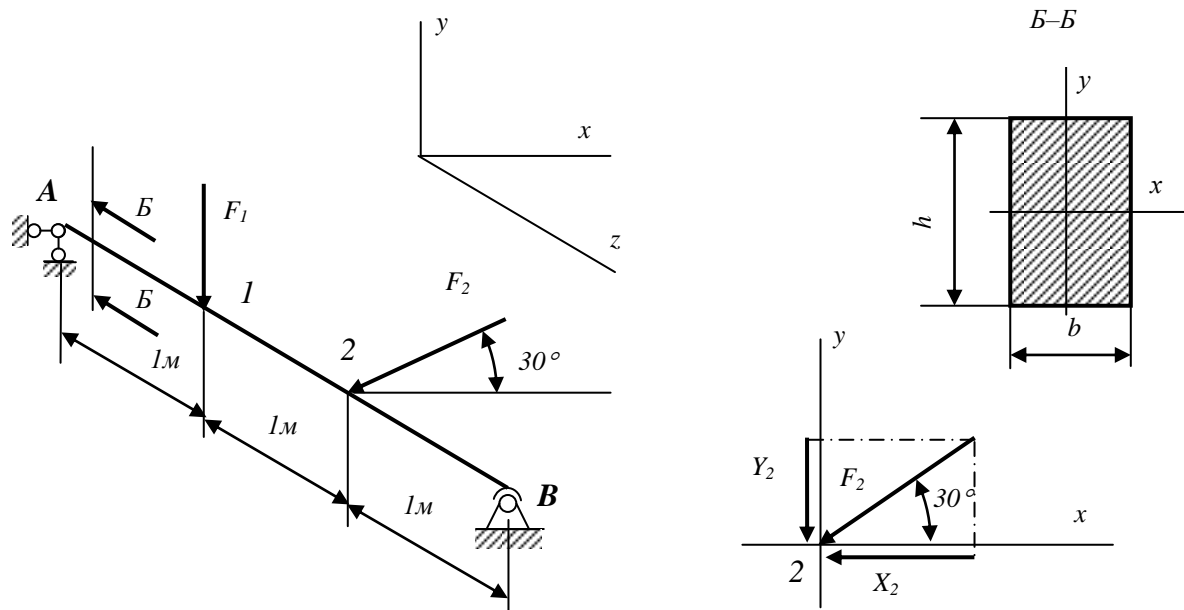


Рисунок 42

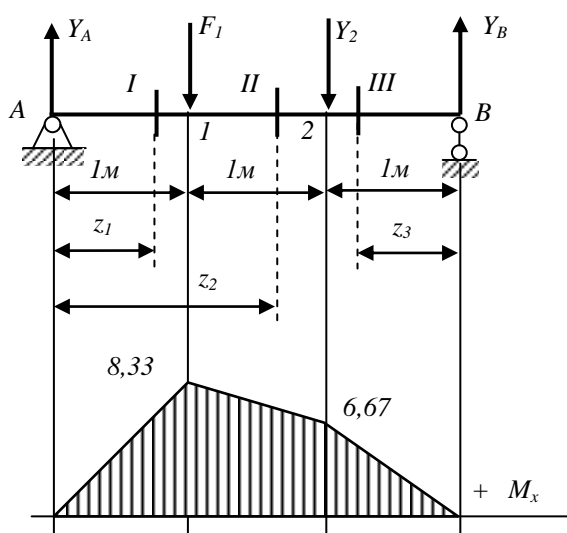


Рисунок 43

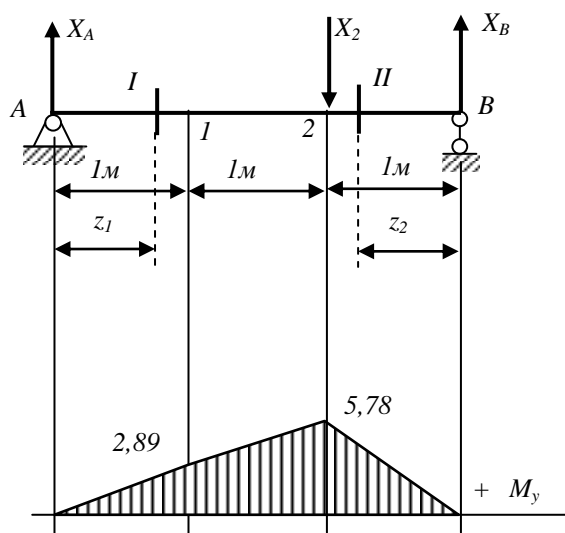


Рисунок 44

На втором участке:  $1\text{ м} \leq z_2 \leq 2\text{ м}$ ;  $M_{x2} = Y_A \cdot z_2 - F_1 \cdot (z_2 - 1)$ . При  $z_2 = 1\text{ м}$   $M_{x2} = 8,33\text{ кН} \cdot \text{м}$ ; при  $z_2 = 2\text{ м}$   $M_{x2} = 6,66\text{ кН} \cdot \text{м}$ .

На третьем участке:  $0 \leq z_3 \leq 1\text{ м}$ ,  $M_{x3} = Y_B \cdot z_3$ . При  $z_3 = 0$   $M_{x3} = 0$ ; при  $z_3 = 1\text{ м}$   $M_{x3} = 6,67\text{ кН} \cdot \text{м}$ .

Определяем реакции опор в горизонтальной плоскости, рассматривая вид балки сверху (рисунок 44):

$$\sum m_A = -X_2 \cdot 2 + X_B \cdot 3 = 0, \text{ откуда } X_B = 5,77\text{ кН};$$

$$\sum m_B = X_2 \cdot 1 - X_A \cdot 3 = 0, \text{ откуда } X_A = 2,89\text{ кН}.$$

$$\text{Делаем проверку: } \sum X = X_A + X_B - X_2 = 0.$$

Строим эпюру изгибающего момента в горизонтальной плоскости  $M_y$ .

На первом участке:  $0 \leq z_1 \leq 2\text{м}$ ,  $M_{y1} = X_A \cdot z_1$ . При  $z_1 = 0$   $M_{y1} = 0$ ; при  $z_1 = 1\text{м}$   $M_{y1} = 2,89\text{кН}\cdot\text{м}$ ; при  $z_1 = 2\text{м}$   $M_{y1} = 5,78\text{кН}\cdot\text{м}$ .

На втором участке:  $0 \leq z_2 \leq 1\text{м}$ ,  $M_{y2} = X_B \cdot z_2$ . При  $z_2 = 0$   $M_{y2} = 0$ ; при  $z_2 = 1\text{м}$   $M_{y2} = 5,77\text{кН}\cdot\text{м}$ .

Определяем положение опасного сечения. Для этого, сравнивая эпюры моментов  $M_x$  и  $M_y$ , видим, что опасным сечением может быть либо сечение 1, либо сечение 2. Находим напряжения в этих сечениях по формуле (27). Так как для прямоугольного сечения (*приложение А*)  $W_x = bh^2/6$  и  $W_y = hb^2/6$ , то отношение  $W_x/W_y = h/b = 1,5$ . Тогда

$$\sigma_1 = 1/W_x \cdot (M_{x1} + W_x/W_y \cdot M_{y1}) = 1/W_x \cdot (8,33 + 1,5 \cdot 2,89) = 12,67/W_x;$$

$$\sigma_2 = 1/W_x \cdot (M_{x2} + W_x/W_y \cdot M_{y2}) = 1/W_x \cdot (6,67 + 1,5 \cdot 5,78) = 15,34/W_x.$$

Сравнивая напряжения в точках 1 и 2, приходим к выводу, что опасным сечением является сечение 2.

Расчетом на прочность по опасному сечению определяем его размеры. В условие прочности (27) выражение момента сопротивления  $W_x$  подставляем с учетом соотношения  $h/b = 1,5$ :  $W_x = bh^2/6 = 2,25b^3/6$ , тогда

$$\sigma_{\max} = \sigma_2 = 15,34/W_x = 15,34 \cdot 6 / (2,25b^3) \leq [\sigma]_{\text{изг}}, \text{ откуда}$$

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 15,34 \cdot 10^3}{2,25 \cdot [\sigma]_{\text{изг}}}} = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 15,34 \cdot 10^3}{2,25 \cdot 10^7}} = 0,16 \text{ м} = 16 \text{ см}.$$

Тогда  $h = 1,5 \cdot b = 1,5 \cdot 16 = 24 \text{ см}$ .

## ОЦЕНКА ПРОЧНОСТИ ПРИ СЛОЖНОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ

Сложное напряженное состояние характеризуется наличием в материале и нормальных  $\sigma$ , и касательных  $\tau$  напряжений и возникает при совместном действии двух или нескольких простых видов деформации (растяжения-сжатия, сдвига, кручения, изгиба).

Отдельные составляющие напряжений  $\sigma$  и  $\tau$  определяются по соответствующим формулам простых напряженных состояний.

Общая оценка прочности при сложном напряженном состоянии производится с использованием так называемых гипотез предельных состояний (гипотез прочности). Сущность этого метода состоит в следующем. Сложное напряженное состояние аналитически заменяется эквивалентным ему по опасности разрушения одноосным растяжением-сжатием, условие прочности которого  $\sigma_{\text{экв}} \leq [\sigma]$ . Выражение эквивалентного напряжения  $\sigma_{\text{экв}}$  через напряжения  $\sigma$  и  $\tau$  сложного напряженного состояния зависит от того, какой критерий выбран для оценки равной опасности разрушения. Этим и отличаются между собой различные гипотезы прочности. Из большого количества существующих гипотез прочности чаще всего используются в расчетах: гипотеза максимальных касательных напряжений (третья гипотеза), энергетическая (четвертая гипотеза) и

гипотеза прочности Мора. Условия прочности по этим гипотезам имеют следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{по третьей гипотезе} \\ \sigma_{\text{экв}}^{\text{III}} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma], \\ \text{по четвертой гипотезе} \\ \sigma_{\text{экв}}^{\text{IV}} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_1\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3} \leq [\sigma], \\ \text{по гипотезе Мора} \\ \sigma_{\text{экв}}^{\text{M}} = \sigma_1 - k\sigma_3 \leq [\sigma], \end{array} \right. \quad (28)$$

где  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  – главные напряжения сложного напряженного состояния;

$k = (\sigma_B)_p / (\sigma_B)_{\text{сж}}$  – коэффициент неравнопрочности материала.

Для хрупких материалов  $k < 1$ , для пластичных  $k = 1$ ;

$(\sigma_B)_p$  – предел прочности материала на растяжение;

$(\sigma_B)_{\text{сж}}$  – предел прочности материала на сжатие.

*Третью и четвертую гипотезы прочности можно применять только для пластичных материалов, гипотеза Мора – универсальная.*

### Расчет оболочек вращения

Для расчета оболочек, имеющих форму тел вращения, стенки которых тонки, не имеют резких переходов и изломов, при действии внутреннего, нормального к стенкам давления, обладающего осевой симметрией, используется безмоментная (мембранная) теория расчета. В соответствии с этой теорией нормальные напряжения, возникающие в оболочке в кольцевом и меридиальном направлениях (рисунок 45), связаны между собой уравнением Лапласа:

$$\frac{\sigma_t}{\rho_t} + \frac{\sigma_m}{\rho_m} = \frac{p}{\delta}, \quad (29)$$

где  $\sigma_m$  – меридиональное нормальное напряжение, направленное по касательной к меридиану радиуса  $\rho_m$ ;

$\sigma_t$  – окружное (кольцевое) нормальное напряжение, направленное по касательной к окружности радиуса  $\rho_t$ ;

$p$  – внутреннее давление на оболочку;

$\delta$  – толщина оболочки.

Для определения двух неизвестных  $\sigma_m$  и  $\sigma_t$  одного уравнения Лапласа недостаточно. Второе уравнение получается из условия равновесия части оболочки, отсеченной сечением, перпендикулярным меридианам на уровне рассматриваемой точки:

$$\sigma_m \delta 2\pi r \cos \alpha = p \pi r^2 + Q_{\text{ж}} + Q_p, \quad (30)$$

где  $r$  – радиус окружности кольцевого сечения на данном уровне;

$\alpha$  – угол между осью  $z$  и касательной к меридиану на данном уровне;

$Q_{\text{ж}}$  – вес жидкости или сыпучего груза, находящихся в нижней части сосуда;

$Q_p$  – собственный вес нижней части сосуда.

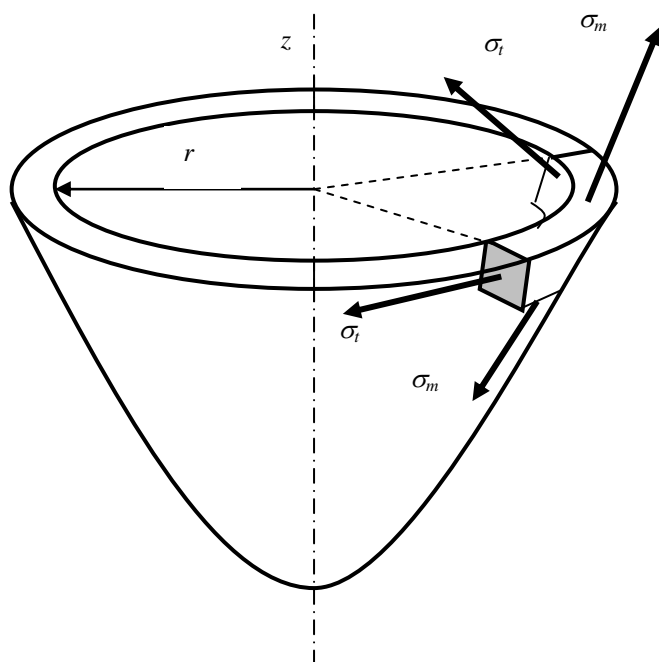


Рисунок 45

Из уравнения (30) определяется меридиональное нормальное напряжения  $\sigma_m$ , затем из уравнения (29) вычисляется окружное нормальное напряжения  $\sigma_t$ . Так как в меридиональных и окружных сечениях касательные напряжения отсутствуют, то полученные нормальные напряжения являются главными, то есть

$$\sigma_1 = \sigma_t;$$

$$\sigma_2 = \sigma_m;$$

$$\sigma_3 = p \approx 0.$$

Рассмотрим наиболее простые примеры расчета оболочек.

**Сферический сосуд радиуса  $R$  с внутренним давлением  $p$  (рисунок 46).**

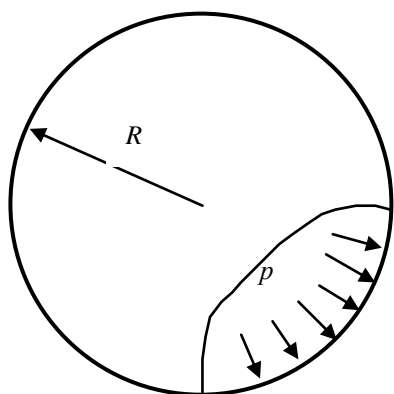


Рисунок 46

Из симметрии сферы следует, что

$$\rho_m = \rho_t = R, \text{ и } \sigma_m = \sigma_t = \sigma.$$

Тогда из уравнения Лапласа (29) получим

$$\sigma = \sigma_1 = \sigma_2 = \frac{pR}{2\delta};$$

$$\sigma_3 = p \approx 0.$$

Подставив выражения главных напряжений в (28), получим по трем гипотезам прочности одно и то же условие прочности сферического сосуда:

$$\frac{pR}{2\delta} \leq [\sigma]_p. \quad (31)$$

Цилиндрический сосуд радиуса  $R$  с внутрен-

ним давлением  $p$  (рисунок 47).

Рассекаем сосуд вертикальной плоскостью и составляем уравнение равновесия (30) для одной из частей:

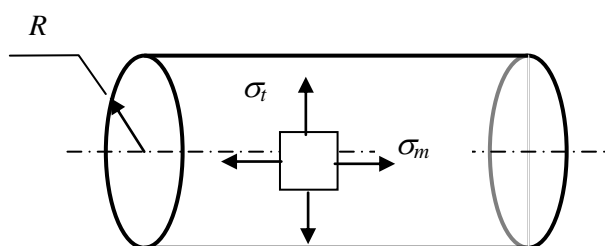


Рисунок 47

$$\sigma_m \delta 2\pi R = p \pi R^2,$$

откуда определяем величину меридиональных напряжений

$$\sigma_m = \frac{pR}{2\delta}.$$

Подставив в уравнение Лапласа значения  $\sigma_m$ ,  $\rho_t = R$ ,  $\rho_m = \infty$ , получим

$$\sigma_t = \frac{pR}{\delta},$$

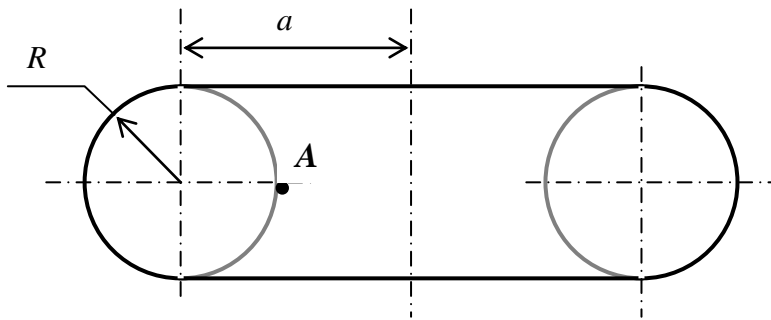
то есть в два раза больше величины  $\sigma_m$ , следовательно

$$\sigma_1 = \sigma_t = \frac{pR}{\delta}; \quad \sigma_2 = \frac{pR}{2\delta}; \quad \sigma_3 = p \approx 0.$$

Тогда по гипотезам прочности третьей и Мора получаем условие прочности цилиндрического сосуда в следующем виде:

$$\frac{pR}{\delta} \leq [\sigma]_p. \quad (32)$$

**Торовая оболочка** (рисунок 48) с равномерным внутренним давлением.



Величина окружных напряжений определяется формулой

$$\sigma_t = \frac{pR}{2\delta}. \quad (33)$$

Максимальные меридиональные напряжения возникают в точках A, расположенных на внутренней окружности тора

Рисунок 48

$$(\sigma_m)_{\max} = \frac{pR(2a - R)}{2\delta(a - R)}. \quad (34)$$

Формулы (33), (34) достаточно точны при  $a \geq (2 \div 3)R$ .

### Оценка прочности при одновременном действии нормальных и касательных напряжений

Применение гипотез к расчету часто встречающегося одновременного действия нормальных и касательных напряжений (сочетание сдвига или кручения с растяжением, сжатием или изгибом) дает следующие условия прочности:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{по третьей гипотезе} \\ \sigma_{\text{экв}}^{\text{III}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma], \\ \text{по четвертой гипотезе} \\ \sigma_{\text{экв}}^{\text{IV}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma], \\ \text{по гипотезе Мора} \\ \sigma_{\text{экв}}^{\text{M}} = \frac{1-k}{2} \sigma + \frac{1+k}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma], \end{array} \right. \quad (35)$$

где  $\sigma$  и  $\tau$  – напряжения в опасной точке сечения.

Так как нормальные и касательные напряжения зависят от различных геометрических характеристик сечения, то использовать условия прочности (35) для проекторочных расчетов в большинстве случаев невозможно, поэто-

му их применяют в основном в поверочных расчетах. Исключение составляют лишь некоторые частные случаи нагружения, для которых удастся выразить из условий прочности (35) в явном виде размеры сечения. К их числу относится расчет вала круглого сечения на изгиб с кручением.

Для изгиба с кручением условия прочности (35) преобразуются к виду:

$$\frac{M_p}{W} \leq [\sigma]_{изг}, \quad (36)$$

где  $W = \pi d^3 / 32$  – осевой момент сопротивления круглого сечения;

$[\sigma]_{изг}$  – допускаемые напряжения на изгиб;

$M_p$  – так называемый расчетный (приведенный) момент – величина абстрактная, зависящая от изгибающего и крутящего моментов в сечении вала.

Определяется расчетный момент по формулам гипотез прочности:

$$M_p = \begin{cases} \sqrt{M_{изг}^2 + T_k^2} & \text{– по третьей гипотезе;} \\ \sqrt{M_{изг}^2 + 0,75T_k^2} & \text{– по четвертой гипотезе;} \\ \frac{1-k}{2} M_{изг} + \frac{1+k}{2} \sqrt{M_{изг}^2 + T_k^2} & \text{– по гипотезе Мора,} \end{cases} \quad (37)$$

где  $M_{изг}$  и  $T_k$  – соответственно изгибающий и крутящий моменты в опасном сечении вала.

### Пример расчета на прочность вала при изгибе с кручением

На вал (рисунок 49), вращающийся со скоростью  $n=960$  об/мин, через шкив 1 подается мощность  $P=40$  кВт. Два других шкива 2 и 3 передают потребителям мощность  $P/2$  каждый. Требуется определить необходимый диаметр вала при следующих данных: размеры участков  $a=0,2$  м,  $b=0,3$  м,  $c=0,4$  м; диаметры шкивов  $D_1=0,8$  м,  $D_2=D_3=0,5$  м; углы наклона ветвей ремня на шкивах:  $\alpha_1=60^\circ$ ,  $\alpha_2=\alpha_3=30^\circ$ ; пониженные значения допускаемых напряжений для материала вала на изгиб  $[\sigma]_{изг}=70$  МПа.

### Решение

*Приводим усилия в ременной передаче к центру вала.*

– Крутящие моменты на шкивах  $M=P/\omega$ , где угловая скорость вращения вала  $\omega=\pi n/30=3,14 \cdot 960/30=100 \text{ с}^{-1}$ .

На ведущем шкиве  $M_1=40 \cdot 10^3/100=400 \text{ Н} \cdot \text{м}$ ;

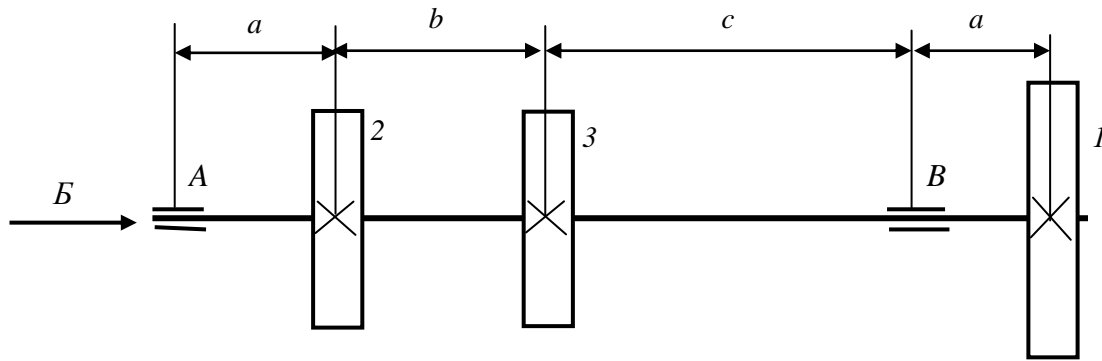
на ведомых  $M_2=M_3=20 \cdot 10^3/100=200 \text{ Н} \cdot \text{м}$ .

На расчетной схеме вала момент на ведущем шкиве  $M_1$  и моменты на ведомых шкивах  $M_2$  и  $M_3$  направляются в противоположные стороны.

– Усилия в ветвях ременной передачи определяем, используя приближенное соотношение  $T \approx 2 \cdot t$ , где  $T$  – усилие в ведущей ветви,  $t$  – усилие в ведомой ветви. Тогда  $M=T \cdot D/2 - t \cdot D/2 = 2t \cdot D/2 - t \cdot D/2 = t \cdot D/2$ ,

откуда  $t=2M/D$ .

На ведущем шкиве  $t_1 = 2M_1/D_1 = 2 \cdot 400/0,8 = 1000 \text{ Н} = 1 \text{ кН}$ ,  $T_1 = 2t_1 = 2 \text{ кН}$ ;



Б

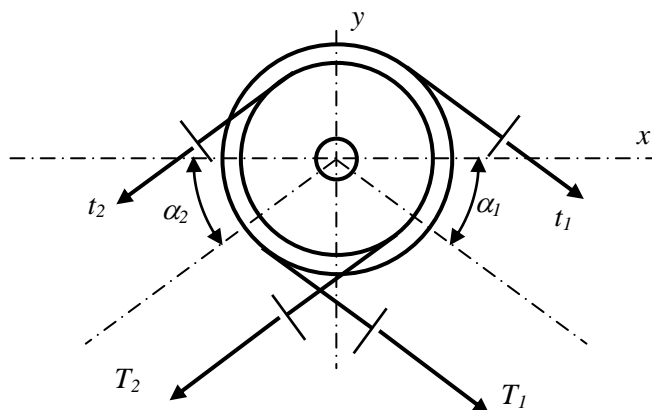


Рисунок 49

на ведомых  $t_2 = t_3 = 2 \cdot 200/0,5 = 800 \text{ Н}$ ,  $T_2 = T_3 = 1,6 \text{ кН}$ .

– Усилия в ветвях заменяем равнодействующими  $F = T + t$ .

На ведущем шкиве  $F_1 = 1 + 2 = 3 \text{ кН}$ ;

на ведомых  $F_2 = F_3 = 0,8 + 1,6 = 2,4 \text{ кН}$ .

– Раскладываем равнодействующие на вертикальную и горизонтальную составляющие:

$$X_1 = F_1 \cdot \cos \alpha_1 = 3 \cdot \cos 60^\circ = 1,50 \text{ кН};$$

$$Y_1 = F_1 \cdot \sin \alpha_1 = 3 \cdot \sin 60^\circ = 2,60 \text{ кН};$$

$$X_2 = X_3 = F_2 \cdot \cos \alpha_2 = 2,4 \cdot \cos 30^\circ = 2,08 \text{ кН};$$

$$Y_2 = Y_3 = F_2 \cdot \sin \alpha_2 = 2,4 \cdot \sin 30^\circ = 1,20 \text{ Н}.$$

В результате расчета определены усилия, которые передаются на вал через шкивы (рисунок 50).

Рисуем расчетную схему вала (рисунок 51), на которой вал изображен его осью; шкивы убраны, и места их расположения обозначены точками 1, 2, 3, в которые с рисунка 46 переносим соответствующие усилия. Таким образом, вал испытывает два плоских изгиба в вертикальной и горизонтальной плоскостях и кручение. Рассматриваем отдельно эти простые виды деформации. Последующие схемы и эпюры размещаем для наглядности столбиком.

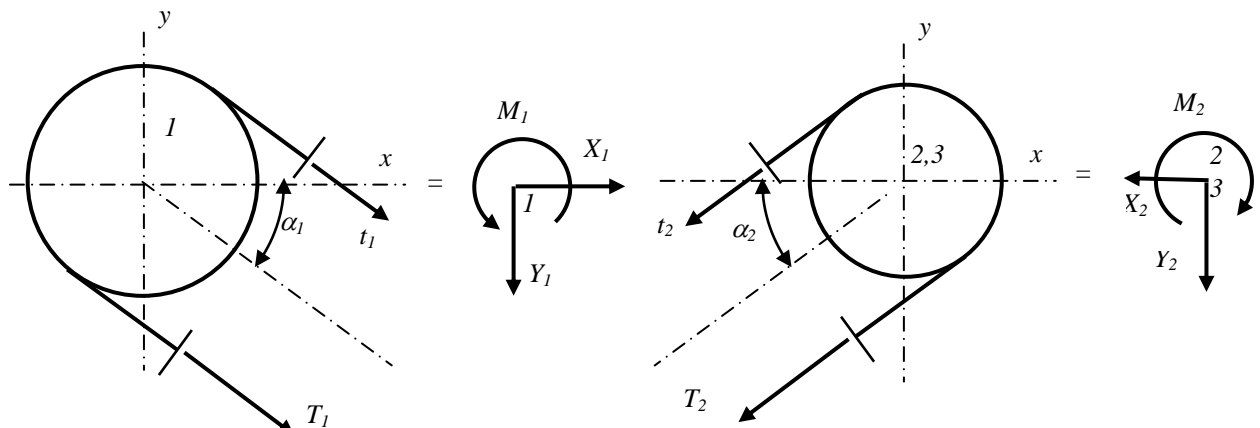


Рисунок 50

*Изгиб в вертикальной плоскости.*

Расчетная схема включает только вертикальные силы. Подшипники заменяем шарнирными опорами **A** и **B**.

– Определяем вертикальные реакции в опорах:

$$\sum m_A = -Y_2 \cdot a - Y_3 \cdot (a+b) + Y_B \cdot (a+b+c) - Y_1 \cdot (a+b+c+a) = 0, \text{ отсюда } Y_B = 4,11 \text{ кН};$$

$$\sum m_B = -Y_A \cdot (a+b+c) + Y_2 \cdot (b+c) + Y_3 \cdot c - Y_1 \cdot a = 0, \text{ отсюда } Y_A = 0,89 \text{ кН}.$$

Проверка:  $\sum Y = Y_A + Y_B - Y_1 - Y_2 - Y_3 = 0$ .

– Строим эпюру изгибающего момента в вертикальной плоскости  $M_x$ . Так как на балке нет распределенной нагрузки и сосредоточенных изгибающих моментов, то эпюра будет представлять ломаную линию без скачков. Для ее построения достаточно знать значения момента  $M_x$  на границах участков:

$$M_{xA} = 0;$$

$$M_{x2} = Y_A \cdot a = 0,18 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{x3} = Y_A \cdot (a+b) - Y_2 \cdot b = 0,09 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{xB} = -Y_1 \cdot a = -0,52 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{xI} = 0.$$

*Изгиб в горизонтальной плоскости.*

Расчетная схема содержит только горизонтальные силы.

– Определяем горизонтальные реакции в опорах:

$$\sum m_A = X_2 \cdot a + X_3 \cdot (a+b) + X_B \cdot (a+b+c) - X_1 \cdot (a+b+c+a) = 0, \text{ отсюда } X_B = 2,2 \text{ кН};$$

$$\sum m_B = -X_A \cdot (a+b+c) - X_2 \cdot (b+c) - X_3 \cdot c - X_1 \cdot a = 0, \text{ отсюда } X_A = -2,88 \text{ кН}.$$

Проверка:  $\sum X = X_A + X_B - X_1 + X_2 + X_3 = 0$ .

Значения момента  $M_y$  на границах участков:

$$M_{yA} = 0;$$

$$M_{y2} = X_A \cdot a = -0,58 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{y3} = X_A \cdot (a+b) + X_2 \cdot b = -0,82 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{yB} = -X_1 \cdot a = -0,3 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{yI} = 0.$$



# Расчетная схема вала

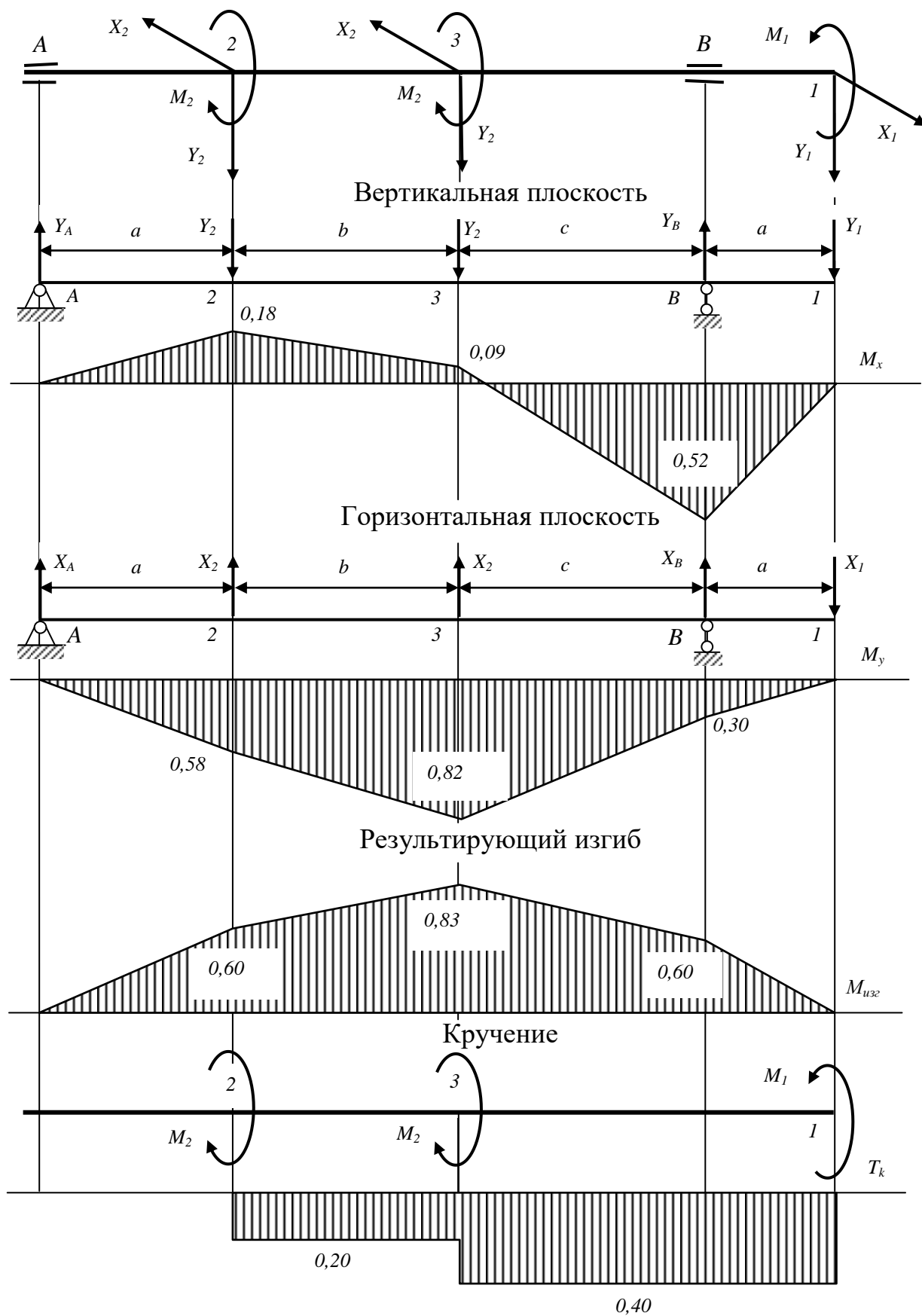


Рисунок 51

Строим эпюру результирующего изгибающего момента  $M_{изг}$ , складывая геометрически его проекции  $M_x$  и  $M_y$ , то есть  $M_{изг} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$ .

$$(M_{изг})_A = 0;$$

$$(M_{изг})_2 = \sqrt{(0,18)^2 + (-0,58)^2} = 0,60 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$(M_{изг})_3 = \sqrt{(0,09)^2 + (-0,82)^2} = 0,83 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$(M_{изг})_B = \sqrt{(-0,52)^2 + (-0,30)^2} = 0,60 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$(M_{изг})_I = 0.$$

*Кручение вала.*

К валу прикладываем только крутящие моменты  $M_1, M_2, M_3$ , потерями в подшипниках пренебрегаем. Строим эпюру внутренних крутящих моментов  $T_k$ . Значения моментов кручения  $T_k$  на участках постоянны:

$$T_{kI} = 0;$$

$$T_{kII} = -M_2 = -0,2 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$T_{kIII} = -M_2 - M_3 = -M_1 = -0,4 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

*Определяем положение опасного сечения*, пользуясь двумя последними эпюрами изгибающего момента  $M_{изг}$  и  $T_k$ . Так как обе эпюры имеют максимальные значения в одной и той же точке 3, то именно сечение 3 и будет наиболее опасным. Вычисляем для опасного сечения величину расчетного момента по четвертой гипотезе прочности (37):

$$M_P^{IV} = \sqrt{M_{изг}^2 + 0,75 T_k^2} = \sqrt{(0,83)^2 + 0,75(-0,4)^2} = 0,89 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

*Расчет вала на прочность* проводим по условию прочности на изгиб с кручением (36). Подставив в него формулу для момента сопротивления круглого сечения  $W = \pi d^3 / 32$ , выражаем значение диаметра вала

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 M_P}{\pi [\sigma]_{изг}}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 0,89 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 70 \cdot 10^6}} = 0,051 \text{ м} = 51 \text{ мм}.$$

Полученное значение округляем до ближайшего нормального размера  $d = 53 \text{ мм}$ . При условии установки вала в подшипниковых узлах  $d = 55 \text{ мм}$

## ОСНОВЫ ДИНАМИЧЕСКОГО РАСЧЕТА

Нагруженность детали при ее движении или действие на деталь изменяющейся во времени нагрузки имеют две существенные особенности:

*во-первых*, это приводит к возникновению сил инерции, которые являются причиной появления в материале детали дополнительных напряжений,

*во-вторых*, действие переменных напряжений вызывает особый вид разрушения – усталость материала.

Расчет деталей с учетом этих факторов называется **динамическим расчетом**.

### Учет сил инерции

Действие сил инерции на конструкцию учитывают в соответствии с принципом Даламбера, согласно которому движущееся тело или систему тел можно рассматривать в состоянии мгновенного равновесия, если приложить все внешние силы и силы инерции. Силы инерции определяются по известным формулам теоретической механики. Дальнейший расчет на прочность не отличается от рассмотренных ранее статических задач.

### Ударная нагрузка

Особым видом динамического нагружения является ударное действие нагрузки. При ударе в короткий промежуток времени развиваются значительные ударные силы, которые приводят к резкому всплеску напряжений и деформаций. Рост напряжений и деформаций при ударе определяют при помощи динамического коэффициента  $k_D$ , который показывает, во сколько раз возрастут напряжения и деформации при ударе по сравнению со статическим приложением той же нагрузки, то есть:

$$k_D = F_{дин}/F_{ст} = \sigma_{дин}/\sigma_{ст} = \Delta_{дин}/\Delta_{ст} > 1,$$

где  $\sigma_{ст}$ ;  $\Delta_{ст}$  – соответственно напряжения и деформации при статическом приложении нагрузки  $F_{ст}$ ;

$\sigma_{дин}$ ;  $\Delta_{дин}$  – соответственно напряжения и деформации при ударе.

Если можно считать удар абсолютно неупругим, то значение динамического коэффициента определяется по формуле

$$k_D = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{ст}}}, \quad (38)$$

где  $h$  – высота падения груза;

$\Delta_{ст}$  – перемещение точки удара при статическом приложении нагрузки.

В том случае, когда к моменту удара известна скорость движения груза  $v$ ,

$$k_D = 1 + \sqrt{1 + \frac{v^2}{g \cdot \Delta_{ст}}}, \quad (39)$$

где  $g$  – ускорение свободного падения.

Формулы (38), (39) дают завышенное значение динамического коэффициента, так как не учитывают массу самой конструкции.

При приближенном расчете собственная масса конструкции  $M$  заменяется некоторой массой  $M_{прив}$ , приведенной к точке удара. Величина приведенной массы должна обладать такой же кинетической энергией, что и сама конструкция. Определяется по формуле

$$M_{прив} = \alpha \cdot M, \quad (40)$$

где  $\alpha$  – коэффициент приведения массы к точке удара (*приложение Е*).

Тогда значение динамического коэффициента

$$k_D = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot h}{\Delta_{ст} \cdot (1 + M_{прив}/m)}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{v^2}{g \cdot \Delta_{ст} \cdot (1 + M_{прив}/m)}}, \quad (41)$$

где  $m$  – масса падающего груза.

## Вынужденные колебания конструкций

Динамический расчет колебательных систем под действием периодически меняющейся возмущающей нагрузки сводится к решению двух задач:

а) к частотному анализу колебательной системы на отсутствие резонанса.

Так, например, для системы с одной степенью свободы круговая частота собственных колебаний определяется по формуле

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{cm}}}, \quad (42)$$

где  $g$  – ускорение свободного падения;

$\Delta_{cm}$  – перемещение точки приложения возмущающей силы от действия статической составляющей нагрузки.

Практикой установлено, что для предотвращения резонанса упругой системы нужно, чтобы частоты собственных и вынужденных колебаний отличались друг от друга на 20–30%;

б) к определению характеристик цикла напряжений и расчету колебательной системы на выносливость.

Амплитуда цикла напряжений при установившемся режиме вынужденных колебаний

$$\sigma_a = \beta \sigma_{cm}$$

где  $\beta$  – коэффициент нарастания колебаний;

$\sigma_{cm}$  – напряжения от действия статически приложенного амплитудного значения возмущающей силы

Вначале определяется коэффициент нарастания колебаний

$$\beta = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}, \quad (43)$$

где  $\omega$  – круговая частота установившихся вынужденных колебаний.

Затем вычисляется динамический коэффициент

$$k_D = 1 + \frac{F_{ин}}{F_{cm}} \beta, \quad (44)$$

где  $F_{cm}$  – статическая составляющая нагрузки;

$F_{ин}$  – амплитуда возмущающей силы.

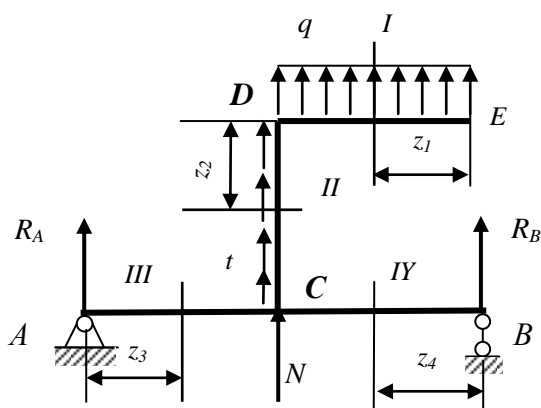
Наибольшее напряжение в опасном сечении от динамической нагрузки

$$\sigma_D = k_D \cdot \sigma_{cm}$$

сравнивается со значением допускаемого напряжения для материала  $[\sigma]$ .

Плоская рамка (рисунок 52), изготовленная из прутка круглого сечения диаметром  $d=20\text{мм}$ , равномерно вращается с угловой скоростью  $\omega=50\text{с}^{-1}$  вокруг оси  $AB$ . Построить эпюру изгибающего момента  $M_{изг}$  от сил инерции и определить коэффициент запаса прочности  $n_m$  в опасном сечении. Материал – сталь **Ст3**. Плотность стали  $\rho=7,8\cdot 10^3\text{ кг/м}^3$ .

Определяем нагрузки, действующие на рамку (рисунок 53). При вращении рамки вокруг оси  $AB$  на участках  $DE$  и  $CD$  будут возникать силы инерции, вызы-



вающие изгиб рамки и растяжение участка  $CD$ .

На участке  $DE$  интенсивность центробежной силы инерции

$$q = m \cdot a_n = \rho \cdot A \cdot \omega^2 \cdot a = 7,8 \cdot 10^3 \cdot 3,14 \cdot 10^{-4} \times \\ \times 50^2 \cdot 0,3 = 1837 \text{ H/M},$$

где  $m=\rho \cdot A$  – масса единицы длины прутка;

$A$  – площадь сечения прутка;  
 $A = \pi d^2/4 = \pi(0,020)^2/4 = 3,14 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$ ;  
 $a_n = \omega^2 R$  – величина нормального (центростремительного ускорения) на расстоянии  $R=a$  от оси вращения.

Интенсивность  $t$  распределенной продольной нагрузки на участке  $CD$  меняется по линейному закону пропорционально удалению от оси вращения. В точке  $C$  она равна нулю, в точке  $D$  достигает максимального значения

$$t_{max}=\rho \cdot A \cdot \omega^2 \cdot a=1837 \text{H/M}.$$

### Равнодействующая этой нагрузки

$$N=0,5 \cdot (\rho \cdot A \cdot \omega^2 \cdot a) \cdot a=0,5 \cdot 1837 \cdot 0,3=275,5 \text{H}$$

действует на участок  $AB$  как сосредоточенная поперечная сила.

Определяем реакции, возникающие в подшипниках  $A$  и  $B$  при вращении рамки.

$$\Sigma M_A = q a \cdot 1,5 a + N a + R_B 2 a = 0;$$

$$\Sigma M_B = -R_A 2a - N_a q a \cdot 0,5a = 0.$$

Отсюда:  $R_A = -275,6 \text{ Н}$ ;  $R_B = -551,1 \text{ Н}$ .

Проверка:

$$\Sigma Y = R_{A+} R_{B+} N + qa = -275,6 - 551,1 + 275,5 + 1837 \cdot 0,3 \cong 0.$$

Строим эпюру изгибающих моментов на участках рамки.

Участок ED.  $0 \leq z_1 \leq a$ ; или  $0 \leq z_1 \leq 0,3\text{м}$ .

$M_{x1} = +q(z_1)^2/2$  – парабола с минимумом при  $z_1=0$ .

При  $z_1=0$   $M_{X1}=0$ ; при  $z_1=0,3\text{ м}$   $M_{X1}=1837(0,3)^2/2=82,7\text{ Нм}$ .

Участок DC.  $0 \leq z_2 \leq a$ ; или  $0 \leq z_2 \leq 0,3\text{м}$

$$M_{x2} = +q(a)^2/2 = 82,7 \text{ Нм} = \text{const.}$$

Участок AC.  $0 \leq z_3 \leq a$ ; или  $0 \leq z_3 \leq 0,3\text{м}$

$M_{x3} = R_A \cdot z_3$  – прямая линия.

При  $z_3=0$   $M_{x3}=0$ ; при  $z_3=0,3\text{м}$   $M_{x1} = -275,6 \cdot 0,3 = -82,7 \text{ Нм}$ .

Участок BC.  $0 \leq z_4 \leq a$ ; или  $0 \leq z_4 \leq 0,3\text{м}$

$M_{x3} = R_B \cdot z_4$  – прямая линия.

При  $z_4=0$   $M_{x4}=0$ ; при  $z_4=0,3\text{м}$   $M_{x1} = -551,1 \cdot 0,3 = -165,3 \text{ Нм}$ .

По полученным данным строим графики, откладывая значения на сжатом волокне рамки (рисунок 54).

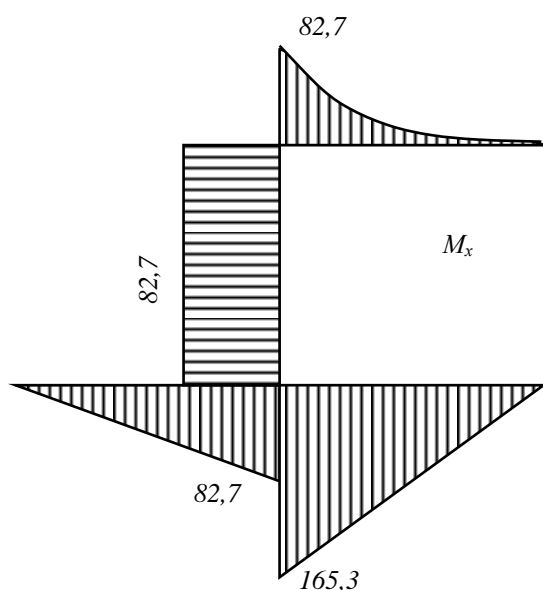


Рисунок 54

Опасное сечение рамки находится справа от точки C. Максимальный изгибающий момент в опасном сечении

$$|M_x|_{\max} = 165,3 \text{ Н·м.}$$

Находим максимальные нормальные напряжения в опасном сечении

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= |M_x|_{\max} / W_x = 32 |M_x|_{\max} / (\pi \cdot d^3) = \\ &= 32 \cdot 165,3 / [\pi \cdot (0,02)^3] = 211 \cdot 10^6 \text{ Па} = \\ &= 211 \text{ МПа,} \end{aligned}$$

где  $W_x = \pi \cdot d^3 / 32$  – момент сопротивления круглого сечения.

Значение предела текучести для стали **Ст3**  $\sigma_T = (210 \div 240) \text{ МПа}$  практически совпадает с величиной максимальных напряжений. Коэффициент запаса прочности

$$n_T = \sigma_T / \sigma_{\max} \approx 1,$$

что явно недопустимо.

Вывод:

для данной рамки заданная скорость вращения является недопустимой.

### Пример определения напряжений при ударе

На консольную балку (рисунок 55) длиной  $l=2\text{м}$  в середине пролета падает груз массой  $m=10 \text{ кг}$  с высоты  $h=0,5\text{м}$ . Сечение балки – двутавр №10, материал – сталь **Ст3**. Определить максимальные напряжения, возникающие в балке при ударе.

### Решение

Строим эпюру изгибающего момента  $M_x$  от статического приложения веса груза  $F = m \cdot g \approx 10 \cdot 10 = 100 \text{ Н}$  (рисунок 56). Максимальные напряжения, возникающие при этом:

$$\sigma_{cm} = |M_x|_{\max} / W_x = 100 / (39,7 \cdot 10^{-6}) = 2,52 \text{ МПа,}$$

где  $W_x = 39,7 \text{ см}^3$  – момент сопротивления двутавра №10.

Величина прогиба в точке приложения силы (**приложение Д**)

$$y_{cm} = F \cdot (0,5l)^3 / (3 \cdot EI_x) = (100 \cdot 1) / (3 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 198 \cdot 10^{-8}) = 8,42 \cdot 10^{-5} \text{ м.}$$

То есть при статическом расположении на балке массы 10 кг напряжения и деформации пренебрежительно малы.

Сначала определим напряжения в балке при ударе без учета массы самой балки. Динамический коэффициент по формуле (38)

$$k_D = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot h}{y_{cm}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 0,5}{8,42 \cdot 10^{-5}}} = 110.$$

Тогда напряжения при ударе

$$\sigma_{дин} = \sigma_{ст} \cdot k_D = 2,52 \cdot 110 = 277,2 \text{ МПа}$$

превысят не только допускаемые значения для этой стали, но и значение предела текучести  $\sigma_T = 240 \text{ МПа}$ . Следовательно, можно ожидать пластической деформации балки (возникновения остаточного изгиба).

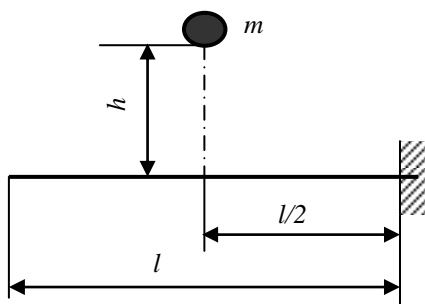


Рисунок 55

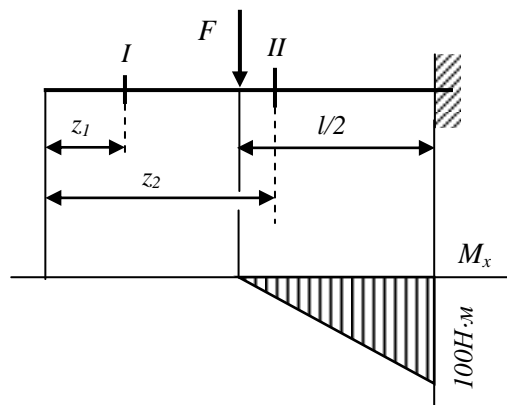


Рисунок 56

Проведем расчет с учетом массы балки. Масса самой балки

$$M_B = m_B \cdot l = 9,46 \cdot 2 = 18,92 \text{ кг},$$

где  $m_B = 9,46 \text{ кг}$  – масса 1 м двутавра №10 (из таблиц сортамента проката).

Коэффициент приведения массы балки к точке удара определяем по формулам приложения Е:

$$\alpha = \frac{105 - 105c + 35c^2 - 2c^3}{140c^2} = 1,74 ,$$

где  $c = 0,5$  для заданной схемы.

Приведенная масса по формуле (40)

$$M_{прив} = \alpha \cdot M_B = 1,74 \cdot 18,92 = 32,97 \text{ кг}.$$

Значение динамического коэффициента по формуле (41)

$$\begin{aligned} k_D &= 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot h}{y_{cm} \cdot (1 + M_{прив} / m)}} = \\ &= 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 0,5}{8,42 \cdot 10^{-5} \cdot (1 + 32,97 / 10)}} = 54 \end{aligned}$$

Тогда напряжения при ударе  $\sigma_{дин} = 2,52 \cdot 54 = 135 \text{ МПа}$ , конечно, возрастают, но оказываются все же меньше допускаемого значения  $[\sigma]_{изг} = 150 \text{ МПа}$ .

Таким образом, учет собственной массы конструкции существенно повлиял на результаты расчета и на прогнозируемые последствия удара.

### Пример динамического расчета при вынужденных колебаниях

На двутавровой балке №10 из стали **Ст3** (рисунок 57) установлен механизм массой  $m=50\text{кг}$ , имеющий ротор с частотой вращения  $n=900$  оборотов в минуту. Центробежная сила инерции, возникающая при вращении ротора вследствие его неуравновешенности, равна  $F_{ин}=0,6\text{кН}$ . Определить величину наибольших нормальных напряжений в балке при ее вибрации, пренебрегая собственным весом балки и силами сопротивления.

#### Решение

Определяем статическую составляющую нагрузки (сила собственного веса механизма):

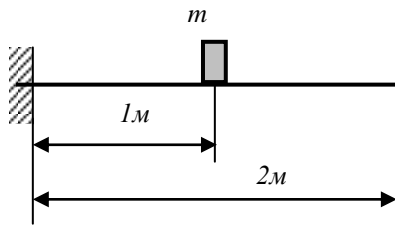


Рисунок 57

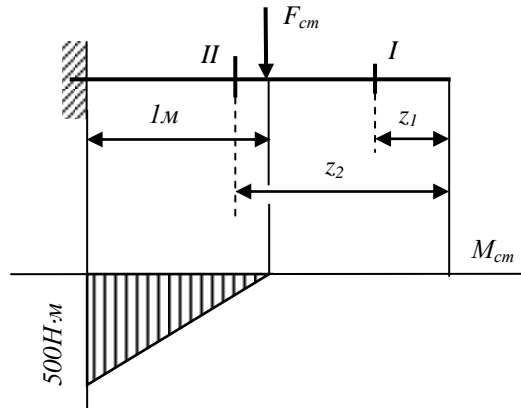


Рисунок 58

$$F_{cm} = m \cdot g \cong 50 \cdot 10 = 500 \text{ Н.}$$

Строим эпюру изгибающего момента в балке от действия силы веса механизма (рисунок 58).

Максимальные статические напряжения в балке

$$\sigma_{cm} = |M_{cm}|_{\max} / W_x = 500 / (39,7 \cdot 10^{-6}) = 12,6 \text{ МПа,}$$

где  $W_x = 39,7 \text{ см}^3$  – момент сопротивления двутавра №10.

Величина прогиба балки в точке крепления механизма (**приложение Д**)

$$y_{cm} = F_{cm} \cdot (l)^3 / (3 \cdot EI_x) = (500)(1)^3 / (3 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 198 \cdot 10^{-8}) = 0,42 \cdot 10^{-3} \text{ м,}$$

где  $I_x = 198 \text{ см}^4$  – момент инерции двутавра №10.

Круговая частота возмущающей силы

$$\omega = \pi n / 30 = \pi \cdot 900 / 30 = 94,2 \text{ с}^{-1}.$$

Собственная частота колебательной системы (42)

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{cm}}} = \sqrt{\frac{9,81}{0,42 \cdot 10^{-3}}} = 154,3 \text{ с}^{-1}.$$

«Отстройка» от резонанса составляет

$$(154,3 - 94,2) / 154,3 \cdot 100\% = 39,0\%,$$

что удовлетворяет существующим нормам.

Коэффициент нарастания колебаний (43)

$$\beta = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} = \frac{1}{1 - \left(\frac{94,2}{154,3}\right)^2} = 1,59.$$



### Величина динамического коэффициента (44)

$$k_{\mathcal{D}} = 1 + \frac{F_{uH}}{F_{cm}} \beta = 1 + (600/500) \cdot 1,59 = 2,91.$$

## Наибольшие напряжения при вибрации

$$\sigma_{\text{II}} = k_{\text{II}} \cdot \sigma_{cm} = 2,91 \cdot 12,6 = 36,6 \text{ МПа}$$

значительно ниже допускаемого напряжения для стали *Ст3*.

# РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ БАЛОК И РАМ МЕТОДОМ СИЛ

В основе определения опорных реакций конструкции и внутренних силовых факторов в сечениях ее элементов лежат уравнения статического равновесия либо конструкции в целом, либо ее отсеченной части. Если число неизвестных соответствует числу уравнений статики, конструкция называется статически определимой. Если число неизвестных превышает число уравнений, задача становится неопределимой, и конструкцию называют статически неопределимой. Различают статическую неопределимость внешнюю и внутреннюю. При внешней неопределимости «лишними» неизвестными являются опорные реакции; если «лишними» неизвестными будут внутренние силовые факторы, то и статическую неопределимость называют внутренней.

Для раскрытия статической неопределимости в машиностроении обычно используют метод сил, сущность которого состоит в следующем:

1. Первым шагом при раскрытии статической неопределимости является переход от заданной статически неопределимой конструкции к конструкции статически определимой путем отбрасывания «лишних» связей (переход к эквивалентной расчетной схеме). Обобщенные силы в отброшенных связях обозначают  $X_1$ ;  $X_2$ ; ...;  $X_n$ . Полученная статически определимая конструкция называется основной системой. Так как любую связь можно принять за «лишнюю», то для статически неопределимой конструкции существует, как правило, несколько вариантов основных систем. Основная система должна быть кинематически неизменяемой и обеспечивать простоту дальнейших вычислений.
2. Затем записывают систему канонических уравнений метода сил по числу имеющихся неизвестных:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + ... + \delta_{1n}X_n + \Delta_{1F} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + ... + \delta_{2n}X_n + \Delta_{2F} = 0 \\ ..... \\ \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + ... + \delta_{nn}X_n + \Delta_{nF} = 0 \end{cases}, \quad (45)$$

где  $X_i$  – неизвестная обобщенная сила;

$\delta_{ij}$  – перемещение точки  $i$  в направлении действия обобщенной силы  $X_i$  от действия единичной силы  $X_j=1$  (единичные коэффициенты канонических уравнений);

$\Delta_{iF}$  – перемещение точки  $i$  в направлении действия обобщенной силы  $X_i$  от действия всех внешних обобщенных сил (грузовые коэффициенты канонических уравнений).

Для вычисления коэффициентов канонических уравнений как перемещений используется интеграл Мора и способ Верещагина.

3. Строятся необходимые для вычисления коэффициентов эпюры изгибающих моментов в основной системе:

- грузовая эпюра  $M_F$  – основная система загружается только внешними силами;

- единичные эпюры по числу неизвестных:  $\overline{M}_1; \overline{M}_2; \dots; \overline{M}_n$  – основная система загружается поочередно единичными силами  $X_1=1; X_2=1; \dots; X_n=1$ .

4. Вычисляются коэффициенты канонических уравнений:

- грузовые коэффициенты получают путем перемножения грузовой эпюры на соответствующую единичную, то есть

$$\Delta_{iF} = \sum \int \frac{M_F \overline{M}_i}{EI_x} dz; \quad (46)$$

- главные единичные коэффициенты (с одинаковыми индексами) получают перемножением соответствующей единичной эпюры саму на себя:

$$\delta_{ii} = \sum \int \frac{\overline{M}_i \overline{M}_i}{EI_x} dz; \quad (47)$$

- единичные коэффициенты с разными индексами определяют перемножением соответствующих единичных эпюр:

$$\delta_{ij} = \delta_{ji} = \sum \int \frac{\overline{M}_i \overline{M}_j}{EI_x} dz = \sum \int \frac{\overline{M}_j \overline{M}_i}{EI_x} dz. \quad (48)$$

5. Найденные значения коэффициентов подставляются в канонические уравнения. Решение системы канонических уравнений позволяет определить значения «лишних» неизвестных  $X_i$ .

6. Строится окончательная (истинная) эпюра моментов  $M_x$ . Для этого основная система загружается внешней нагрузкой и найденными «лишними» неизвестными.

7. Для проверки вычислений строится суммарная единичная эпюра  $\overline{M}_\Sigma$ . Для ее построения основную систему загружают одновременно всеми единичными силами  $X_1=1; X_2=1; \dots; X_n=1$ .

Выполняется кинематическая проверка решения, заключающаяся в том, что при правильном решении перемещения по направлению всех отброшенных связей должны отсутствовать, то есть результат от перемножения окончательной эпюры моментов  $M_x$  на суммарную единичную  $\overline{M}_\Sigma$  должен равняться нулю:

$$\sum \int \frac{M_x \overline{M}_\Sigma}{EI_x} dz = 0. \quad (49)$$

Дальнейший расчет балки или рамы на прочность или жесткость производится по окончательной эпюре изгибающих моментов  $M_x$ .

The diagram illustrates the construction of the bending moment diagram for a continuous beam with two supports, a uniformly distributed load, and an end moment. The beam is divided into three segments: I (length  $a$ ), II (length  $2a$ ), and III (length  $a$ ). The total length is  $4a$ .

**а** **Основная система**: The beam is shown with a uniformly distributed load  $q$  and a fixed support at the right end. The segments are labeled I, II, and III. The total length is  $4a$ .

**б** **Грузовая эпюра моментов**: The bending moment diagram for the uniformly distributed load is shown. The maximum moment at the right support is  $M_F$ . The diagram is divided into three parts: I, II, and III. The values  $10$ ,  $25,4$ , and  $40,7$  are indicated at the boundaries of the segments.

**в** **Разбивка грузовой эпюры**: The bending moment diagram for the uniformly distributed load is shown, divided into three parts: I, II, and III. The values  $10$ ,  $25,4$ , and  $40,7$  are indicated at the boundaries of the segments.

**г** **Единичные эпюры моментов**: The unit bending moment diagrams for the uniformly distributed load are shown. The values  $1,6$ ,  $2,4$ , and  $0,8$  are indicated at the boundaries of the segments.

**д** **Основная система**: The beam is shown with a uniformly distributed load  $q$  and a fixed support at the right end. The segments are labeled I, II, and III. The total length is  $4a$ .

**е** **Грузовая эпюра моментов**: The bending moment diagram for the uniformly distributed load is shown. The maximum moment at the right support is  $M_F$ . The diagram is divided into three parts: I, II, and III. The values  $10$ ,  $25,4$ , and  $40,7$  are indicated at the boundaries of the segments.

**ж** **Разбивка грузовой эпюры**: The bending moment diagram for the uniformly distributed load is shown, divided into three parts: I, II, and III. The values  $10$ ,  $25,4$ , and  $40,7$  are indicated at the boundaries of the segments.

**з** **Единичные эпюры моментов**: The unit bending moment diagrams for the uniformly distributed load are shown. The values  $1,6$ ,  $2,4$ , and  $0,8$  are indicated at the boundaries of the segments.

Выбираем вариант основной системы. Для этого из конструкции нужно удалить две «лишние» связи. Так как любую связь можно принять за «лишнюю», то и вариантов основной системы будет несколько. Из всех возможных вариантов принимаем за основную систему консоль с отброшенными подвижными шарнирами (рисунк 59,б), обеспечивающую простоту по-

67

строения эпюр изгибающих моментов. Реакции в отброшенных опорах 1 и 2 обозначаем соответственно  $X_1$  и  $X_2$

Строим грузовую эпюру изгибающих моментов. Для этого основную систему (консоль) загружаем только внешними силами (рисунок 59,в).

Определяем значения изгибающего момента на границах участков:

– Участок I, график – прямая.  $M_F = -M = \text{const} = -10 \text{ кН} \cdot \text{м}$ .

Участок II, график – парабола.  $(M_F)_1 = -M = -10 \text{ кН} \cdot \text{м}$ ;  $(M_F)_2 = -M - q \cdot 2a \cdot a = -10 - 12 \cdot 2 \cdot 0,8 \cdot 0,8 = -25,4 \text{ кН} \cdot \text{м}$ .

– Участок III, график – прямая.

$(M_F)_2 = -M - q \cdot 2a \cdot a = -10 - 12 \cdot 2 \cdot 0,8 \cdot 0,8 = -25,4 \text{ кН} \cdot \text{м}$ .

$(M_F)_3 = -M - q \cdot 2a \cdot (a + a) = -10 - 12 \cdot 2 \cdot 0,8 \cdot 2 \cdot 0,8 = -40,7 \text{ кН} \cdot \text{м}$ .

По полученным значениям строим эпюру (рисунок 59,г).

Грузовую эпюру моментов разбиваем по участкам на простые геометрические фигуры (рисунок 59д).

Строим единичные эпюры изгибающих моментов (по числу «лишних» неизвестных).

Сначала к основной системе прикладываем силу  $X_1 = 1$ . Получаем эпюру  $M_1$  (рисунок 59е).

Затем к основной системе прикладываем силу  $X_2 = 1$ . Получаем эпюру  $M_2$  (рисунок 59ж).

Вычисляем значения коэффициентов канонических уравнений, используя интегралы (46)-(48) и способ Верещагина.

$$\begin{aligned} \Delta_{1F} &= \sum \int \frac{M_F \overline{M}_1}{EI_x} dz = \\ &= \left[ -\left\{ \frac{1}{2} 10 \cdot 1,6 \right\} \left[ \frac{1}{3} 1,6 \right] - \left\{ \frac{1}{2} 25,4 \cdot 1,6 \right\} \left[ \frac{2}{3} 1,6 \right] + \left\{ \frac{12(1,6)^3}{12} \right\} \left[ \frac{1}{2} 1,6 \right] - \right. \\ &\quad \left. - \left\{ \frac{1}{2} 25,4 \cdot 0,8 \right\} \left[ \frac{2}{3} 1,6 + \frac{1}{3} 2,4 \right] - \left\{ \frac{1}{2} 40,7 \cdot 0,8 \right\} \left[ \frac{1}{3} 1,6 + \frac{2}{3} 2,4 \right] \right] = -\frac{76,4}{EI_x}; \\ \Delta_{2F} &= \sum \int \frac{M_F \overline{M}_2}{EI_x} dz = \left( -\left\{ \frac{1}{2} 25,4 \cdot 0,8 \right\} \left[ \frac{1}{3} 0,8 \right] - \left\{ \frac{1}{2} 40,7 \cdot 0,8 \right\} \left[ \frac{2}{3} 0,8 \right] \right) = -\frac{11,4}{EI_x}; \\ \delta_{11} &= \sum \int \frac{\overline{M}_1 \overline{M}_1}{EI_x} dz = \left( + \left\{ \frac{1}{2} 2,4 \cdot 2,4 \right\} \left[ \frac{2}{3} 2,4 \right] \right) = +\frac{4,6}{EI_x}; \\ \delta_{22} &= \sum \int \frac{\overline{M}_2 \overline{M}_2}{EI_x} dz = \left( + \left\{ \frac{1}{2} 0,8 \cdot 0,8 \right\} \left[ \frac{2}{3} 0,8 \right] \right) = +\frac{0,17}{EI_x}; \\ \delta_{12} &= \delta_{21} = \sum \int \frac{\overline{M}_1 \overline{M}_2}{EI_x} dz = \\ &= \left( + \left\{ \frac{1}{2} 1,6 \cdot 0,8 \right\} \left[ \frac{1}{3} 0,8 \right] + \left\{ \frac{1}{2} 2,4 \cdot 0,8 \right\} \left[ \frac{2}{3} 0,8 \right] \right) = +\frac{0,68}{EI_x}. \end{aligned}$$

Полученные значения коэффициентов подставляем в канонические уравнения (\*) метода сил. После сокращения на жесткость балки получим:

$$\begin{cases} 4,6X_1 + 0,68X_2 = 76,4 \\ 0,68X_1 + 0,17X_2 = 11,4 \end{cases}$$

Решение данной системы уравнений дает следующие значения неизвестных:  $X_1=16,38\text{кН}$ ;  $X_2=1,53\text{кН}$ .

Строим окончательную (истинную) эпюру изгибающих моментов в эквивалентной системе. Для этого к основной системе прикладываем все внешние силы и определенные методом сил реакции  $X_1$  и  $X_2$  в отброшенных опорах (рисунок 60,а).

- Участок I, график – прямая.  $M_x = -M = \text{const} = -10\text{кН}\cdot\text{м}$ .
- Участок II, график – парабола.  $M_x = -M \cdot q(z-a)^2/2 + X_1(z-a)$ . При  $z=a$   $(M_x)_1 = -10\text{кН}\cdot\text{м}$ . При  $z=3a$   $(M_x)_2 = +0,8\text{кН}\cdot\text{м}$ . При  $z=2,165\text{м}$  парабола имеет максимум  $(M_x)_{\text{max}} = 1,2\text{кН}\cdot\text{м}$ .
- Участок III, график – прямая.  $(M_x)_2 = +0,8\text{кН}\cdot\text{м}$ ;  $(M_x)_3 = -0,2\text{кН}\cdot\text{м}$ .

Отложив полученные значения изгибающего момента, получаем эпюру (рисунок 60,б).

Для проверки вычислений разбиваем окончательную эпюру моментов на простые геометрические фигуры (рисунок 60,в). Строим суммарную единичную эпюру моментов, приложив к основной системе все единичные силы  $X$  (рисунок 60,г). Выполняем кинематическую проверку (49), перемножая окончательную эпюру с суммарной единичной эпюрой по правилу Верещагина:

$$\begin{aligned} \sum \int M_x \overline{M}_\Sigma dz = & \left( + \left\{ \frac{12(1,6)^3}{12} \right\} \left[ \frac{1}{2} 1,6 \right] + \left\{ \frac{1}{2} 0,8 \cdot 1,6 \right\} \left[ \frac{2}{3} 1,6 \right] + \right. \\ & \left. + \left\{ \frac{1}{2} 0,8 \cdot 0,8 \right\} \left[ \frac{1}{3} 3,2 + \frac{2}{3} 1,6 \right] - \left\{ \frac{1}{2} 10 \cdot 1,6 \right\} \left[ \frac{1}{3} 1,6 \right] - \left\{ \frac{1}{2} 0,2 \cdot 0,8 \right\} \left[ \frac{2}{3} 3,2 + \frac{1}{3} 1,6 \right] \right) = \\ & = +4,13 - 4,38 = -0,25. \end{aligned}$$

Ошибка вычислений составляет:

$$\Delta = 0,25 / 4,13 \cdot 100\% = 6\%.$$

Для уменьшения ошибки необходимо вычисления производить с большей точностью.

На этом раскрытие статической неопределимости балки закончено.

С окончательной эпюры берем максимальное значение изгибающего момента  $|M_x|_{\text{max}} = 10\text{кН}\cdot\text{м}$  и из условия прочности на изгиб по нормальным напряжениям (19) находим необходимый момент сопротивления двутавра:

$$W_x \geq |M_x|_{\text{max}} / [\sigma]_{\text{изг}} = 10 \cdot 10^3 / (150 \cdot 10^6) \cdot 10^6 = 66,7\text{ см}^3.$$

Этому значению соответствует двутавр №14, у которого  $W_x = 81,7\text{ см}^3$ .

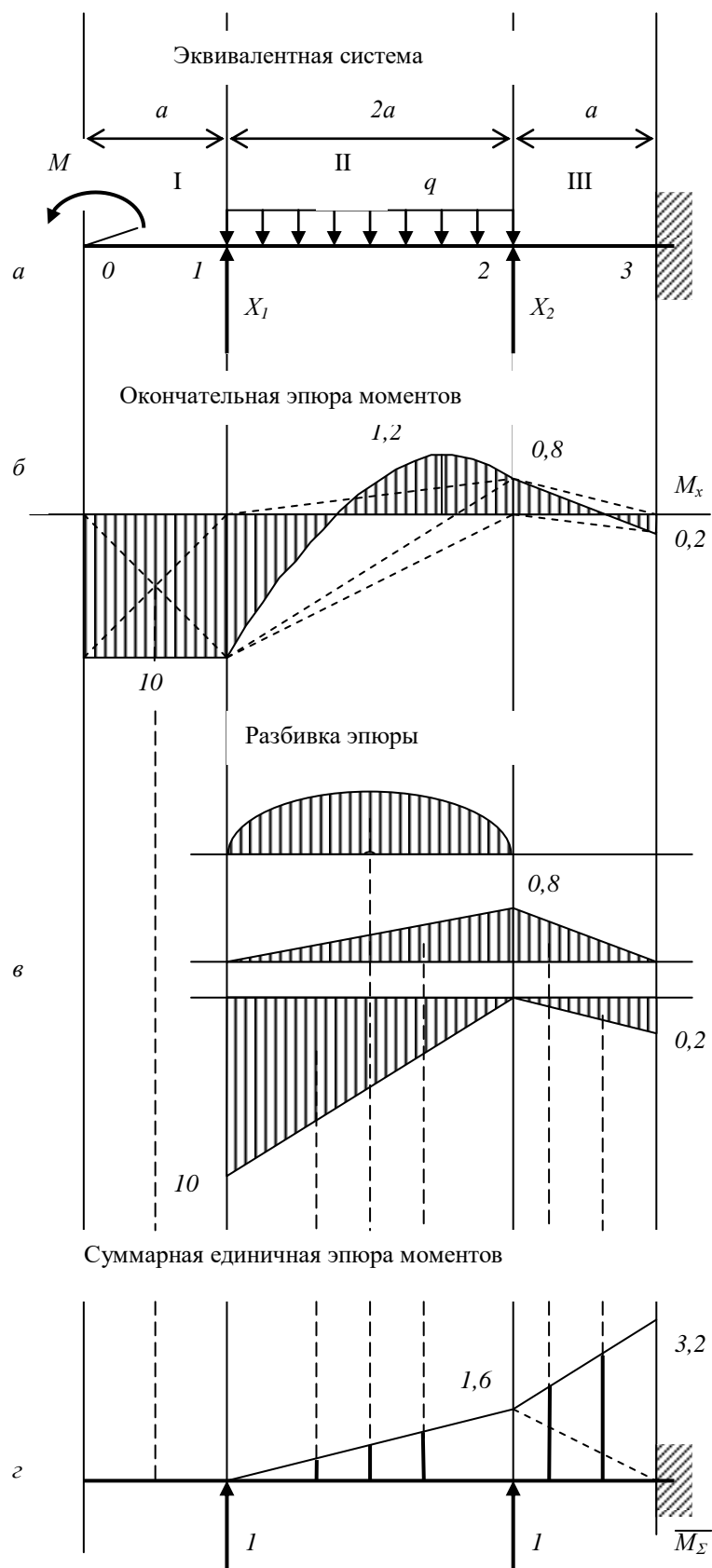


Рисунок 60

## Особенности расчета статически неопределимых рам

Рамами называют несущие конструкции, состоящие из нескольких стержней, жестко соединенных в узлах. Стержни могут соединяться в замкнутые контуры. В стержнях, образующих замкнутый контур, определить внутренние силовые факторы методом сечений не предоставляется возможным без дополнительных расчетов. Поэтому рамы, имеющие замкнутые контуры, являются внутренне статически неопределимыми.

Рамы различают плоские (сама рама и нагрузка располагаются в одной плоскости), плоско-пространственные (рама плоская, нагрузка действует перпендикулярно плоскости рамы) и пространственные.

Стержни плоской рамы испытывают изгиб ( $M_x$ ), сдвиг ( $Q$ ) и растяжение-сжатие ( $N$ ). Поэтому жесткий замкнутый контур плоской рамы трижды статически неопределим. Введение в замкнутый контур одного шарнира ликвидирует одну связь. Следовательно, чтобы замкнутый жесткий контур сделать статически определимым, нужно врезать в него три шарнира или разрезать один из стержней контура.

Таким образом, степень статической неопределимости плоской рамы можно определить по формуле

$$CH = (BC - 3) + \sum(3 - III), \quad (50)$$

где  $CH$  – степень статической неопределимости рамы;

$BC$  – число внешних связей (опорных реакций);

$III$  – число шарниров в каждом замкнутом контуре.

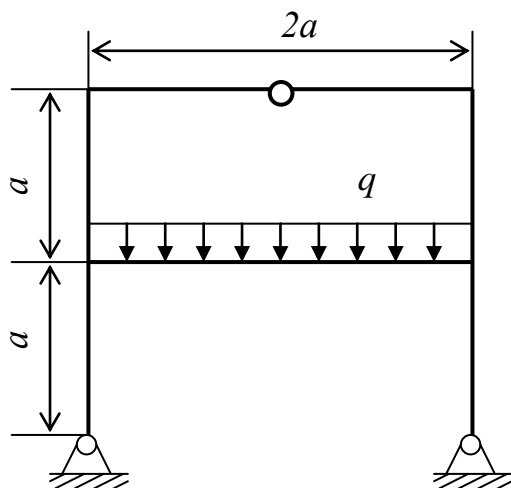


Рисунок 61

Суммирование производится по всем замкнутым контурам. Первое слагаемое показывает степень внешней неопределимости, второе – степень внутренней неопределимости.

В плоско-пространственной раме стержни работают на изгиб ( $M_x$ ), сдвиг ( $Q$ ) и кручение ( $T_k$ ). В стержнях пространственной рамы присутствуют все шесть внутренних силовых факторов ( $N$ ,  $Q_x$ ,  $Q_y$ ,  $T_k$ ,  $M_x$ ,  $M_y$ ).

### Пример раскрытия статической неопределимости плоской рамы

Для рамы, показанной на рисунке 61, построить эпюры внутренних силовых факторов. Соединение стержней в узлах – жесткое. Сечения стержней считать одинаковыми. В расчетах принять:  $a=1\text{ м}$ ;  $q=20\text{ кН/м}$ .

#### Решение

Проводим анализ статической неопределимости. Рама имеет 4 внешние связи и один замкнутый контур с одним врезанным шарниром. Степень статической неопределимости (50):

$$CH=(4-3)+(3-1)=3,$$

то есть рама один раз неопределима внешне и два раза внутренне.

При переходе к основной системе необходимо удалить одну внешнюю и две внутренние связи. Так как рама и нагрузка симметрична относительно вертикальной оси, целесообразно сохранить симметрию и в основной системе.

Удаляем одну горизонтальную внешнюю связь в одной из опор и две внутренние связи в замкнутом контуре путем разрезания шарнира по оси симметрии рамы. Вместо удаленных связей прикладываем неизвестные силы  $X_1, X_2, X_3$  (рисунок 62,а).

Записываем канонические уравнения метода сил (45) для трижды неопределимой системы:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 = -\Delta_{1F} \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 = -\Delta_{2F} \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 = -\Delta_{3F} \end{cases} \quad (*)$$

При одинаковом сечении всех стержней рамы определяющим видом деформации для них является изгиб, поэтому коэффициенты канонических уравнений (\*) будем определять интегралом Мора, учитывающим действие только изгибающего момента (46)-(48).

Строим грузовую эпюру изгибающих моментов. Для этого основную систему загружаем внешней нагрузкой (рисунок 62,б). Реакции в опорах рамы  $Y_A=Y_B=(q \cdot 2a)/2=20 \text{ кН}$ . На изгиб работает только горизонтальный стержень, уравнение изгибающего момента в его сечении  $M_x=Y_A \cdot z - (qz^2)/2$ . Эпюра (рисунок 62,в) имеет вид параболы с максимумом при  $z=a$ .  $(M_x)_{\max}=(qa^2)/2=10 \text{ кН} \cdot \text{м}$ . Эпюры строим со стороны сжатых волокон.

Строим единичные эпюры моментов, поочередно прикладывая к основной системе неизвестные  $X$ , равные единице (рисунки 62,г-62,е).

Вычисляем коэффициенты канонических уравнений метода сил, используя интеграл Мора и способ Верещагина.

Грузовые коэффициенты получаем, перемножая грузовую эпюру с соответствующей единичной эпюрой:

$$\begin{aligned} \Delta_{1F} &= \sum \int \frac{M_F \overline{M}_1}{EI_x} = \frac{1}{EI_x} \left( + \left\{ \frac{20(2)^3}{12} \right\} [1] \right) = + \frac{13,33}{EI_x}; \\ \Delta_{2F} &= \sum \int \frac{M_F \overline{M}_2}{EI_x} = \frac{1}{EI_x} \left( + \left\{ \frac{20(2)^3}{12} \right\} [1] \right) = + \frac{13,33}{EI_x}; \\ \Delta_{3F} &= \sum \int \frac{M_F \overline{M}_3}{EI_x} = \frac{1}{EI_x} \left( + \left\{ \frac{20(2)^3}{12} \right\} [0] \right) = 0. \end{aligned}$$

Единичные коэффициенты получаем перемножением единичных эпюр с соответствующими индексами:

$$\delta_{11} = \sum \int \frac{\overline{M}_1 \overline{M}_1}{EI_x} = \frac{1}{EI_x} \left( + 2 \left\{ \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \right\} \left[ \frac{2}{3} \cdot 1 \right] + \{1 \cdot 2\} [1] \right) = + \frac{2,67}{EI_x};$$



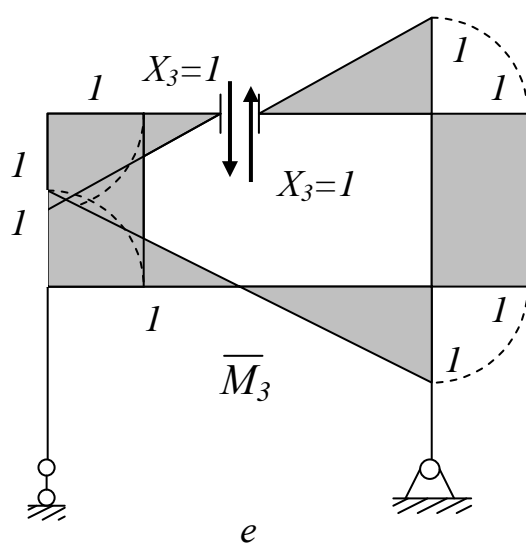
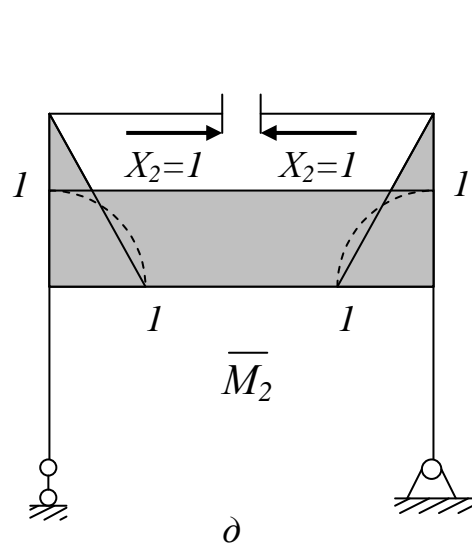
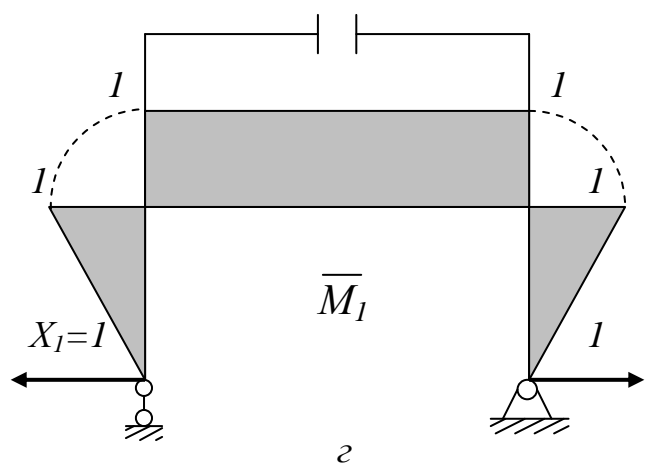
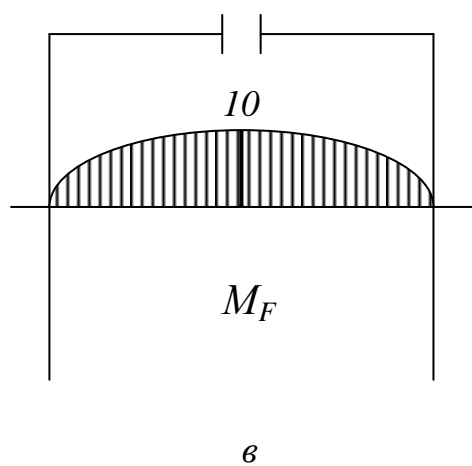
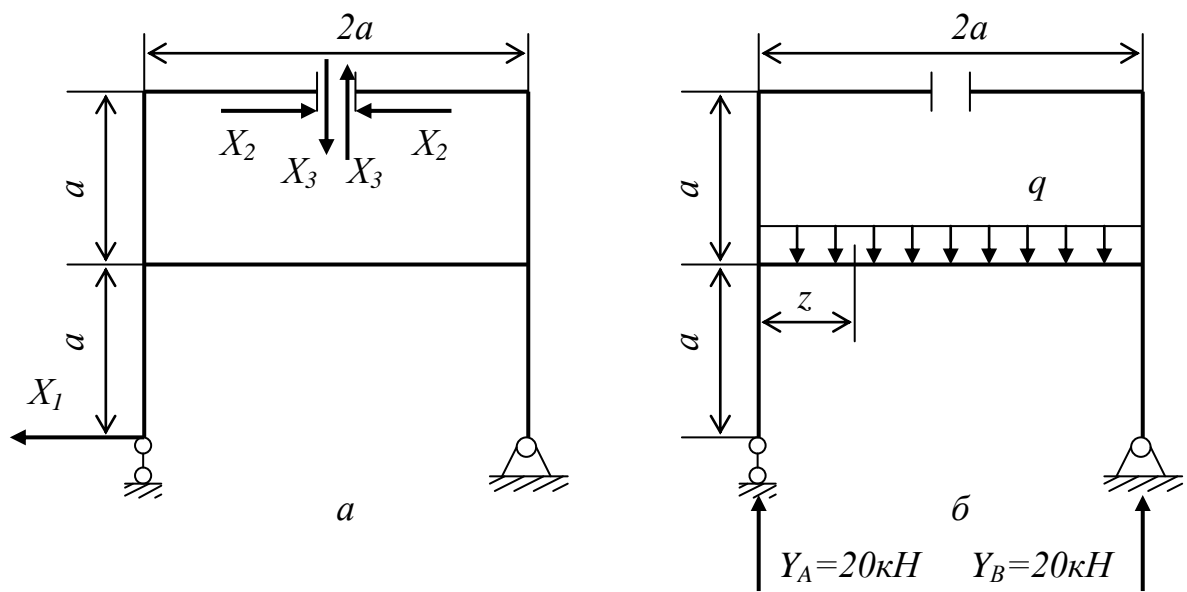


Рисунок 62

$$\delta_{22} = \sum \int \frac{\overline{M_2} \overline{M_2}}{EI_x} = \frac{1}{EI_x} \left( + 2 \left\{ \frac{1}{2} 1 \cdot 1 \right\} \left[ \frac{2}{3} 1 \right] + \{1 \cdot 2\} [1] \right) = + \frac{2,67}{EI_x};$$

$$\delta_{33} = \sum \int \frac{\overline{M_3} \overline{M_3}}{EI_x} = \frac{1}{EI_x} \left( + 4 \left\{ \frac{1}{2} 1 \cdot 1 \right\} \left[ \frac{2}{3} 1 \right] + 2 \{1 \cdot 1\} [1] \right) = + \frac{3,33}{EI_x};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \sum \int \frac{\overline{M_1} \overline{M_2}}{EI_x} = \frac{1}{EI_x} (+ \{1 \cdot 2\} [1]) = + \frac{2,0}{EI_x};$$

$$\delta_{13} = \delta_{31} = \sum \int \frac{\overline{M_1} \overline{M_3}}{EI_x} = \frac{1}{EI_x} (\{1 \cdot 2\} [0]) = 0;$$

$$\delta_{23} = \delta_{32} = \sum \int \frac{\overline{M_2} \overline{M_3}}{EI_x} = \frac{1}{EI_x} (\{1 \cdot 2\} [0]) = 0.$$

Полученные значения коэффициентов подставляем в систему (\*) канонических уравнений. После сокращения на жесткость  $EI_x$  будем иметь:

$$\begin{cases} 2,67X_1 + 2,0X_2 + 0 = -13,33 \\ 2,0X_1 + 2,67X_2 + 0 = -13,33 \\ 0 + 0 + 3,33X_3 = 0 \end{cases}$$

Решая данную систему уравнений, получим следующие значения неизвестных:

$$X_1 = -2,85 \text{ кН}; X_2 = -2,85 \text{ кН}; X_3 = 0.$$

Строим окончательную (истинную) эпюру моментов для эквивалентной системы. Для этого основную систему загружаем внешней нагрузкой и вычисленными неизвестными (рисунок 63,а).

Определяем опорные реакции:

$$X_A = X_B = X_I = -2,85 \text{ кН};$$

$$Y_A = Y_B = (q2a)/2 = 20 \text{ кН}.$$

Рассматриваем участки рамы.

Участок I, график – прямая линия, строим по двум точкам:  $M_A = 0$ ;  $M_C = -X_I \cdot a = +2,85 \cdot 1 = +2,85 \text{ кН} \cdot \text{м}$ . Участок II симметричен участку I.

Участки III, IV – изгиб отсутствует.

Участок V, график – прямая линия, строим по двум точкам:  $M_E = 0$ ;  $M_C = X_2 \cdot a = -2,85 \cdot 1 = -2,85 \text{ кН} \cdot \text{м}$ .

Участок VI симметричен участку V.

Участок VII, график – парабола с максимумом в середине участка.  $M_C = X_I \cdot a + X_2 \cdot a = -2,85 \cdot 1 - 2,85 \cdot 1 = -5,7 \text{ кН} \cdot \text{м}$ .

$$(M_{VII})_{\max} = X_I \cdot a + X_2 \cdot a + Y_A \cdot a - (qa^2)/2 = -2,85 \cdot 1 - 2,85 \cdot 1 + 20 \cdot 1 - (20 \cdot 1^2)/2 = +4,3 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

$$M_D = X_I \cdot a + X_2 \cdot a = -2,85 \cdot 1 - 2,85 \cdot 1 = -5,7 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

По полученным данным строим окончательную эпюру изгибающих моментов, откладывая значения со стороны сжатого волокна участка рамы (рисунок 63,б).

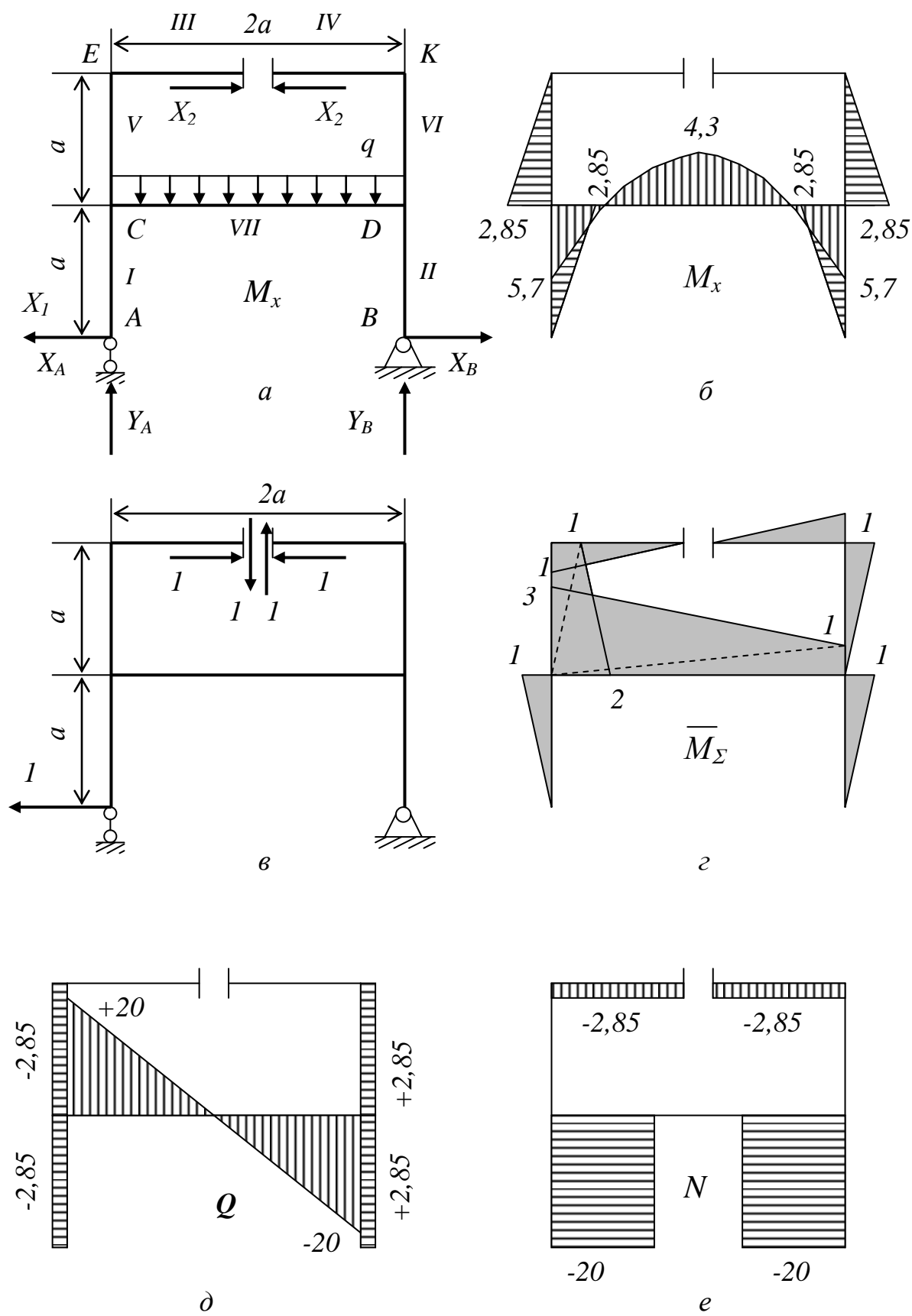


Рисунок 63

Для проверки правильности раскрытия статической неопределимости строим суммарную единичную эпюру моментов  $\overline{M}_\Sigma$  (рисунок 63,г), приложив к основной системе все неизвестные, равные единице (рисунок 63,в).

Приводим кинематическую проверку. Результат от перемножения окончательной эпюры моментов на суммарную единичную эпюру должен быть равен нулю.

$$\sum \int M_x \overline{M}_\Sigma dz = \left( -2 \left\{ \frac{1}{2} 2,85 \cdot 1 \right\} \left[ \frac{2}{3} 1 \right] - \left\{ \frac{1}{2} 2,85 \cdot 1 \right\} \left[ \frac{1}{3} 1 + \frac{2}{3} 2 \right] + \left\{ \frac{1}{2} 2,85 \cdot 1 \right\} \left[ \frac{2}{3} 1 \right] + \right. \\ \left. + \left\{ \frac{20 \cdot (2)^3}{12} \right\} \left[ \frac{1}{2} 1 + \frac{1}{2} 3 \right] - \{ 5,7 \cdot 2 \} \left[ \frac{1}{2} 1 + \frac{1}{2} 3 \right] \right) = \\ +27,62 - 27,08 = 0,54.$$

Находим погрешность вычислений:

$$\Delta = \frac{0,54}{27,08} \times 100\% = 1,99\%,$$

что допускается ( $\Delta < 5\%$ ).

Строим эпюры поперечной и продольной сил методом сечений, считая положительными: поперечную силу, если она стремится вращать отсеченную часть по ходу часов; продольную силу – растягивающую отсеченную часть.

Участок I.  $Q = Y_I = -2,85 \text{ кН}$ .  $N = -Y_A = -20 \text{ кН}$ .

Участок II.  $Q = -Y_B = +2,85 \text{ кН}$ .  $N = -Y_B = -20 \text{ кН}$ .

Участки III, IV.  $Q = 0$ .  $N = X_2 = -2,85 \text{ кН}$ .

Участок V.  $Q = +X_2 = -2,85 \text{ кН}$ .  $N = 0$ .

Участок VI.  $Q = -X_2 = +2,85 \text{ кН}$ .

Участок VII.  $Q = Y_A - qz$ .  $Q_A = +20 \text{ кН}$ .  $Q_C = 20 - 20 \cdot 2 = -20 \text{ кН}$ .  $N = X_1 - X_2 = 0$ .

Правильность построения эпюр проверяется по выполнению условий равновесия узлов: вырезается узел сечениями на бесконечно малом расстоянии от узла (рисунок 64), в сечениях стержней проставляются внутренние силовые

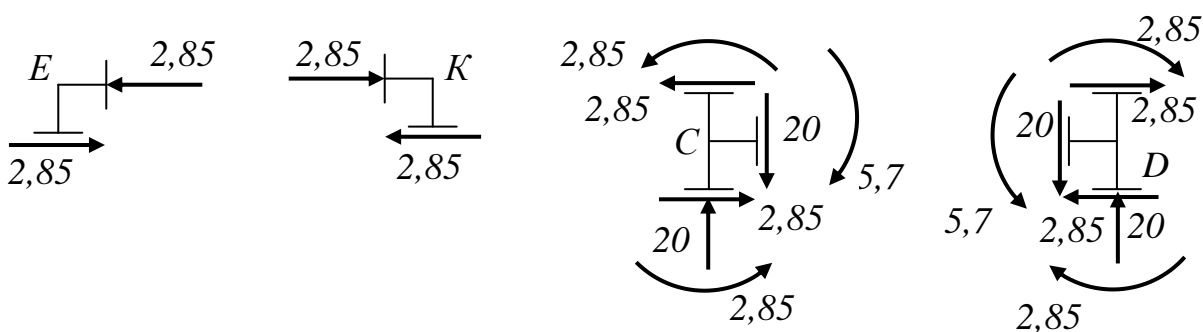
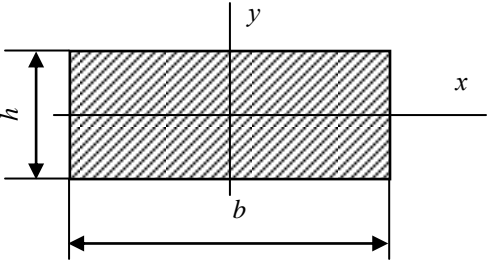
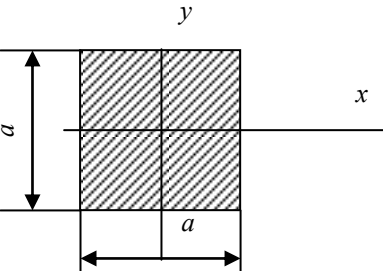
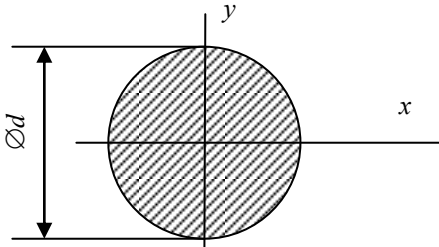


Рисунок 64

факторы, направления, и значения которых берутся с соответствующих эпюр. Очевидно, что в рассматриваемом примере для всех узлов условия равновесия выполняются. Следовательно, эпюры внутренних силовых факторов построены верно.

# Приложение А (справочное)

Таблица А.1 - Геометрические характеристики некоторых простых сечений

Сечение	Геометрические характеристики									
	$A$	$I_x$	$I_y$	$I_{xy}$	$I_p$	$W_x$	$W_y$	$W_p$	$i_x$	$i_y$
	$bh$	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{hb^3}{12}$	0	-	$\frac{bh^2}{6}$	$\frac{hb^2}{6}$	-	$\frac{h}{\sqrt{12}}$	$\frac{b}{\sqrt{12}}$
	$a^2$	$\frac{a^4}{12}$	$\frac{a^4}{12}$	0	-	$\frac{a^3}{6}$	$\frac{a^3}{6}$	-	$\frac{a}{\sqrt{12}}$	$\frac{a}{\sqrt{12}}$
	$\frac{\pi d^2}{4}$	$\frac{\pi d^4}{64}$	$\frac{\pi d^4}{64}$	0	$\frac{\pi d^4}{32}$	$\frac{\pi d^3}{32}$	$\frac{\pi d^3}{32}$	$\frac{\pi d^3}{16}$	$\frac{d}{4}$	$\frac{d}{4}$

**Приложение Б**  
(справочное)

Таблица Б.1 - Допускаемые напряжения для углеродистых сталей при статической нагрузке

Марка стали	Допускаемые напряжения, МПа				
	растяжение $[\sigma]_p$	изгиб $[\sigma]_{\text{и}}$	кручение $[\tau]_{\text{кр}}$	срез $[\tau]_{\text{ср}}$	смятие $[\sigma]_{\text{см}}$
<i>Ст2</i>	115	140	85	70	175
<i>Ст3</i>	125	150	95	75	190
<i>Ст4</i>	140	170	105	85	210
<i>Ст5</i>	165	200	125	100	250
<i>Ст6</i>	195	230	145	115	290
<i>08</i>	110	130	80	60	165
<i>10</i>	110	145	80	65	165
<i>15</i>	125	150	95	75	185
<i>20</i>	140	170	105	85	210
<i>25</i>	150	180	110	90	220
<i>30</i>	165	200	125	100	240
<i>35</i>	180	210	135	110	270
<i>40</i>	190	230	140	115	280
<i>45</i>	200	240	150	125	300
<i>50</i>	210	250	160	125	310
<i>55</i>	210	250	160	125	310
<i>30Г</i>	180	210	135	110	270
<i>40Г</i>	200	240	150	120	300
<i>50Г</i>	210	260	160	130	320
<i>65Г</i>	240	290	185	145	360

**Приложение В (справочное)**  
**Нормальные линейные размеры (по ГОСТ 6636-69) в мм**

1,0; 1,05; 1,1; 1,15; 1,2; 1,3; 1,4; 1,5; 1,6; 1,7; 1,8; 1,9; 2,0; 2,1; 2,2; 2,4; 2,5; 2,6; 2,8; 3,0; 3,2; 3,4; 3,6; 3,8; 4,0; 4,2; 4,5; 4,8; 5,0; 5,3; 5,6; 6,0; 6,3; 6,7; 7,1; 7,5; 8,0; 8,5; 9,0; 9,5; 10; 10,5; 11; 11,5; 12; 13; 14; 15; 16; 17; 18; 19; 20; 21; 22; 24; 25; 26; 28; 30; 32; 34; 36; 38; 40; 42; 45; 48; 50; 53; 56; 60; 63; 67; 71; 75; 80; 85; 90; 95; 100; 105; 110; 120; 125; 130; 140; 150; 160; 170; 180; 190; 200; 210; 220; 240; 250; 260; 280; 300; 320; 340; 360; 380; 400; 420; 450; 480; 500; 530; 560; 600; 630; 670; 710; 750; 800; 850; 900; 950

**Приложение Г (справочное)**

Таблица Г.1 – Коэффициенты  $\varphi$  уменьшения допускаемых напряжений для сталей ***Ст0, Ст2, Ст3, Ст4***

Гибкость $\lambda$	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Коэффициент $\varphi$	1,00	0,99	0,96	0,94	0,92	0,89	0,86	0,81	0,75	0,69	0,60

Продолжение таблицы Г.1

Гибкость $\lambda$	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200
Коэффициент $\varphi$	0,52	0,45	0,40	0,36	0,32	0,29	0,26	0,23	0,21	0,19

Формула Ясинского

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda + c\lambda^2, \quad F_{кр} = A(a - b\lambda + c\lambda^2) \quad a, b, c \text{ – эмпирические коэффициенты}$$

Формула Эйлера

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}, \quad F_{кр} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu l)^2}$$

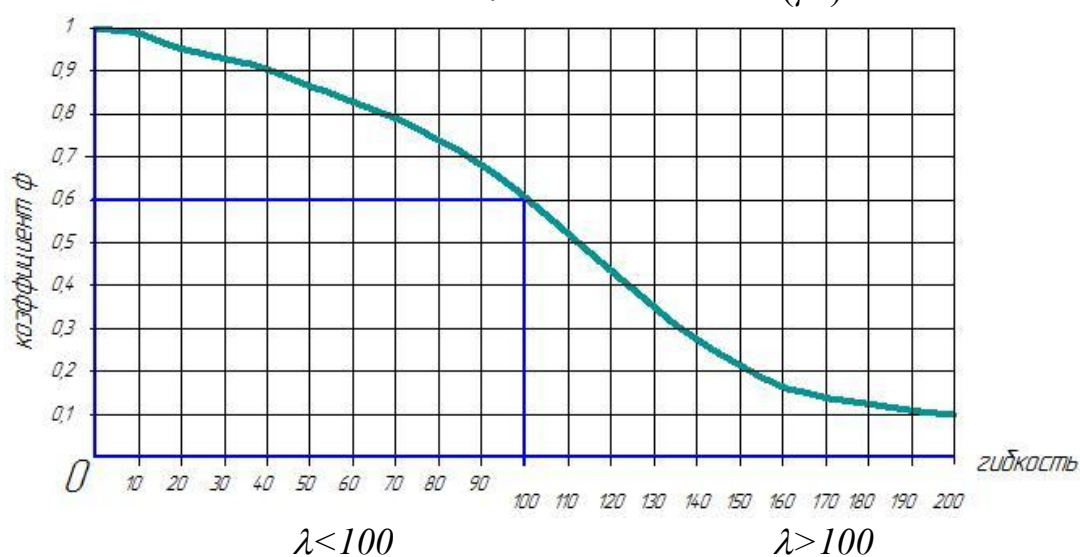
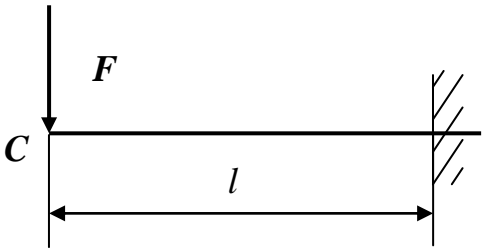
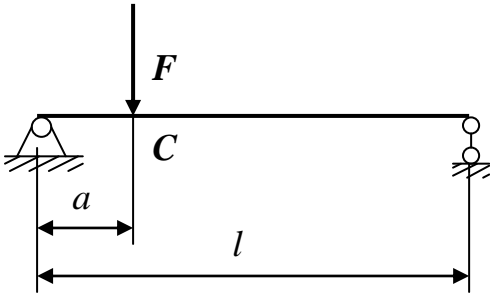
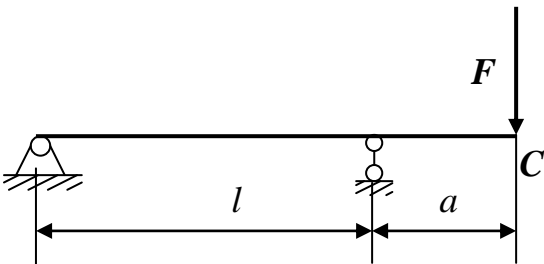


Рисунок Г.1. – Графическая иллюстрация таблицы Г.1.

## Приложение Д (справочное)

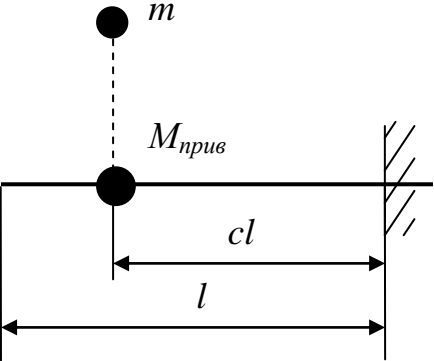
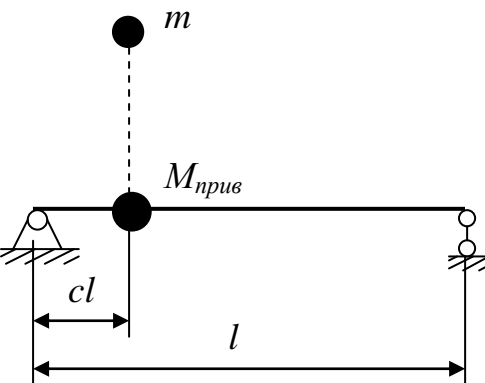
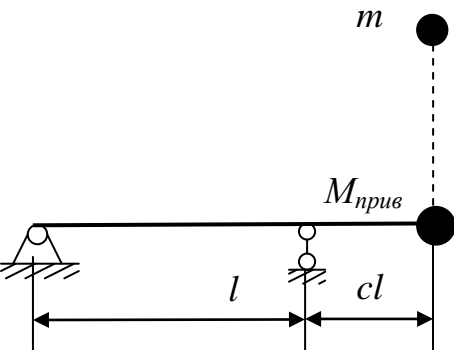
Таблица Д.1 – **Формулы для определения прогибов**

Схема балки	Формула для прогиба
	$y_C = \frac{Fl^3}{3EI_x}$
	$y_C = \frac{Fa^2(l-a)^2}{3EI_x l}$
	$y_C = \frac{Fa^2(l+a)}{3EI_x}$



## Приложение Е (справочное)

Таблица Е.1 - Значения коэффициента  $\alpha$  приведения массы балки к точке удара

Схема балки	Коэффициент
	$\alpha = \frac{105 - 105c + 35c^2 - 2c^3}{140c^2}$
	$\alpha = \frac{2 + 4c - c^2 - 6c^3 + 3c^4}{105c^2(1-c)^2}$
	$\alpha = \frac{8 + c^3(140 + 231c + 99c^2)}{420(1+c)^3 c^2}$

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Куликов, Ю.А. Сопротивление материалов. Курс лекций: учебное пособие / Ю.А. Куликов. – Санкт-Петербург: Лань, 2017. – 272 с. – ISBN 978-5-8114-2449-8. – Текст: электронный // Электронно-библиотечная система «Лань»: [сайт]. – URL: <https://e.lanbook.com/book/91882> (дата обращения: 25. 06.2019). – Режим доступа: для авториз. пользователей. (ЭБС ЛАНЬ)
2. Молотников, В.Я. Курс сопротивления материалов: учебное пособие / В.Я. Молотников. – 2-е изд., стер. – Санкт-Петербург: Лань, 2016. – 384 с. – ISBN 978-5-8114-0649-4. – Текст: электронный // Электронно-библиотечная система «Лань»: [сайт]. – URL: <https://e.lanbook.com/book/71756> (дата обращения: 25.06.2019). – Режим доступа: для авториз. пользователей. (ЭБС ЛАНЬ)
3. Сопротивление материалов: теория, тестовые задания, примеры решения: учеб. пособие / С.Г. Сидорин, Ф.С. Хайруллин. – М.: РИОР: ИНФРА-М, 2018. – 184 с. – (Высшее образование). – DOI: <https://doi.org/10.12737/1694-7>. – Режим доступа: <http://znanium.com/catalog/product/792606> (ЭБС ИНФРА-М)
4. Сопротивление материалов: Сборник задач с решениями: учеб. пособие / С.И. Евтушенко, Т.А. Дукмасова, Н.А. Вильбицкая. – 2-е изд. – М. : РИОР : ИНФРА-М, 2017. – 344 с. + Доп. материалы [Электронный ресурс; Режим доступа <http://www.znanium.com>]. – (Высшее образование: Бакалавриат). – [https://doi.org/10.12737/textbook\\_58dbbcc2cb9a9](https://doi.org/10.12737/textbook_58dbbcc2cb9a9) – Режим доступа: <http://znanium.com/catalog/product/792242> (ЭБС ИНФРА-М)
5. Беляев, Н.М. Сборник задач по сопротивлению материалов [Электронный ресурс]: учебное пособие / Н.М. Беляев, Л.К. Паршин, Б.Е. Мельников [и др.]. – Электрон. дан. – СПб.: Лань, 2017. – 432 с. – Режим доступа: <http://e.lanbook.com/books/91908> – Загл. с экрана. (ЭБС ЛАНЬ)
6. Сопротивление материалов. Лабораторные работы: Учебное пособие / Логвинов В. Б., Волосухин В. А., Евтушенко С. И. - 4-е изд. - М.: ИЦ РИОР, НИЦ ИНФРА-М, 2016. - 212 с.: 60x88 1/16. - (ВО: Бакалавриат) (Обложка. КБС) ISBN 978-5-369-01528-5 - Режим доступа: <http://znanium.com/catalog/product/537040> (ЭБС ИНФРА-М)
7. Кузьмин, Л.Ю. Сопротивление материалов / Л.Ю. Кузьмин, В.Н. Сергиенко, В.К. Ломунов. – 2-е изд., испр. и доп. – Санкт-Петербург: Лань, 2016. – 228 с. – ISBN 978-5-8114-2056-8. – Текст: электронный // Электронно-библиотечная система «Лань»: [сайт]. – URL: <https://e.lanbook.com/book/90004> (дата обращения: 25.06.2019). – Режим доступа: для авториз. пользователей. (ЭБС ЛАНЬ)
8. Степин П.А. Сопротивление материалов [Электронный ресурс]: учебник. – Электрон. дан. – СПб.: Лань, 2014. – 320 с. – Режим доступа: [http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1\\_id=3179](http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=3179) – Загл. с экрана. (ЭБС ЛАНЬ)
9. Миролубов, И.Н. Сопротивление материалов. Пособие по решению задач. [Электронный ресурс] / И.Н. Миролубов, Ф.З. Алмаметов, Н.А. Курицин, И.Н. Изотов. – Электрон. дан. – СПб.: Лань, 2014. – 512 с. – Режим доступа: <http://e.lanbook.com/book/39150> – Загл. с экрана. (ЭБС ЛАНЬ)
10. Молотников В. Я. Механика конструкций. Теоретическая механика. Сопротивление материалов [Электронный ресурс]: учебное пособие. – Электрон.

дан. – СПб.: Лань, 2012. – 540 с. – Режим доступа: [http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1\\_id=4546](http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=4546) – Загл. с экрана. (ЭБС ЛАНЬ)

11. Механика: Учебное пособие / В.Л. Николаенко. – М.: ИНФРА-М; Мн.: Нов. знание, 2011. – 636 с.: ил.; 60х90 1/16. – (Высшее образование). (переплет) ISBN 978-5-16-004865-9.

12. Жуков, В.Г. Механика. Сопротивление материалов [Электронный ресурс]: учебное пособие. – Электрон. дан. – СПб.: Лань, 2012. – 415 с. – Режим доступа: <http://e.lanbook.com>

13. Сопротивление материалов: задания для самостоятельной работы, практических занятий, контрольных и расчетно-графических работ/ Новосиб. гос. аграр. ун-т. Инженер. ин-т.; сост. А.А. Шибков, С.А. Булгаков, И.В. Тихонкин. – Новосибирск, 2020. – 48 с. изд. перераб. и доп.

14. Сопротивление материалов: справочные данные для прочностных расчетов/ Новосиб. гос. аграр. ун-т. Инженер. ин-т; сост.: А.А. Шибков, С.А. Булгаков, И.В. Тихонкин. – Новосибирск, 2020. – 32 с. изд. перераб. и доп.

Составители: Шибков Александр Анатольевич  
Булгаков Сергей Алексеевич  
Тихонкин Игорь Васильевич

## **СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ**

Учебное пособие по самостоятельной работе

Печатается в авторской редакции  
Компьютерная верстка С.А. Булгаков, И.В. Тихонкин

Подписано в печать 29 сентября 2020 г.  
Формат 84×108/32. Объем 5,6 уч.-изд. л  
Тираж 100 экз. Изд. № . Заказ №

Отпечатано в мини-типографии Инженерного института  
630039, г. Новосибирск, ул. Никитина, 147