

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНЖЕНЕРНЫЙ ИНСТИТУТ

Математика

Методические указания по проведению практических занятий и самостоятельному
изучению дисциплины

23.03.03 *Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов*

35.03.06 *Агроинженерия*

Новосибирск 2017

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

УДК 51 (07)

ББК 22.1, я7

М 34

Рецензент: доктор физ.-мат. наук, проф. Л.А. Назаров

Составитель: ст. преп. М.В.Грунина

Математика: методические указания по проведению практических занятий и самостоятельному изучению дисциплины / Новосиб. гос. аграр. ун-т; Сост. М.В.Грунина. – Новосибирск, 2017. – 15 с.

В методических указаниях представлены задания для выполнения на практических занятиях, вопросы к экзаменам, список рекомендуемой литературы.

Методические указания предназначены для студентов заочной формы обучения по направлениям подготовки: 23.03.03 Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов (профиль: Автомобили и автомобильное хозяйство), 35.03.06 Агроинженерия (профили: технические системы в агробизнесе, электрооборудование и электротехнологии в агропромышленном комплексе, технологическое оборудование для хранения и переработки сельскохозяйственной продукции, технический сервис в агропромышленном комплексе)

Утверждены и рекомендованы к изданию учебно-методическим советом Инженерного института (протокол №10 от 30 мая 2017)

Введение

Цели и задачи дисциплины

Цель преподавания математических дисциплин в вузе для студентов инженерных специальностей – ознакомить студентов с основами математического аппарата, необходимого для решения теоретических и практических инженерных задач; привить студентам умение самостоятельно изучать учебную литературу по математике и ее приложениям; развить логическое и алгоритмическое мышление; повысить общий уровень математической культуры; выработать навыки математического исследования прикладных вопросов.

Задачи дисциплины:

- развить у студентов логическое мышление,
- познакомить студентов с идеями и методами высшей математики,
- привить студентам опыт работы с математической и связанной с математикой научной и учебной литературой,
- привить студентам опыт решения задач с использованием математических методов.

Требования к результатам освоения дисциплины

В результате изучения дисциплины студент *должен*:

Знать:

- основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры и аналитической геометрии, теории дифференциальных уравнений, теории вероятностей и теории математической статистики;
- основные понятия и методы математического анализа;
- дифференциальное и интегральное исчисление функций одной и нескольких переменных;
- методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений;
- понятия рядов и их практическое применение в приближенных вычислениях;

Уметь:

- использовать математический аппарат для обработки технической и экономической информации и анализа данных, связанных с машиноиспользованием и надежностью технических систем;

Владеть:

- методами построения математических моделей типовых профессиональных задач.

Методические указания по освоению дисциплины

Успешное освоение компетенций, формируемых данной учебной дисциплиной, предполагает оптимальное использование времени самостоятельной работы.

Подготовка к лекционным занятиям включает выполнение всех видов заданий, рекомендованных к каждой лекции, т. е. задания выполняются еще до лекционного занятия по соответствующей теме. Целесообразно дорабатывать свой конспект лекции, делая в нем соответствующие записи из литературы, рекомендованной преподавателем и предусмотренной учебной программой [1-4].

Все задания к практическим занятиям, а также задания, вынесенные на самостоятельную работу, рекомендуется выполнять непосредственно после соответствующей темы лекционного курса, что способствует лучшему усвоению материала, позволяет своевременно выявить и устранить «пробелы» в знаниях, систематизировать ранее пройденный материал, на его основе приступить к получению новых знаний и овладению навыками.

Самостоятельная работа во внеаудиторное время состоит из:

- повторения лекционного материала;
- подготовки к практическим занятиям;
- изучения учебно-методической и научной литературы;
- решения задач, выданных на практических занятиях;
- подготовки к контрольным работам, тестированию и т. д.;
- подготовки индивидуальных письменных работ по заданию преподавателя;
- проведение самоконтроля путем ответов на вопросы текущего контроля знаний, решения представленных в учебно-методических материалах дисциплины задач, тестов.

1 семестр.**Раздел 2. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии****Определители, матрицы.**

Вычислить определители.

1. $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & -10 \end{vmatrix}$ 3. $\begin{vmatrix} \sqrt{a} & -1 \\ a & \sqrt{a} \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ -\cos \alpha & \sin \alpha \end{vmatrix}$ 5. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

6. $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & 6 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$

7. Найти $P(A)$, если

$$P(A) = A^2 - 9A^{-1} - 2|A|E, \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

8. Найти обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} -6 & 4 & 3 \\ 3 & -2 & -1 \\ 11 & -7 & -5 \end{pmatrix}$.

Системы линейных уравнений.

Решить системы уравнений

1.
$$\begin{cases} 2x - 3y + z - 2 = 0, \\ x + 5y - 4z + 5 = 0, \\ 4x + y - 3z + 4 = 0 \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 4, \\ 2x + y - z = 3, \\ 3x + 3y + 2z = 7 \end{cases}$$

Элементы векторной алгебры.1. По сторонам OA и OB прямоугольника $OACB$ отложены единичные векторы \vec{i} и \vec{j} . Выразить через \vec{i} и \vec{j} векторы \vec{OA} , \vec{AC} , \vec{CB} , \vec{BO} , \vec{OC} и \vec{BA} , если $OA = 3$ и $OB = 4$.2. Пусть у прямоугольника $OACB$ из предыдущей задачи M – середина BC и N – середина AC . Определить векторы \vec{OM} , \vec{ON} и \vec{MN} при $OA = 3$ и $OB = 4$.3. Построить точку $M(5; -3; 4)$ и определить длину её радиус-вектора.4. Определить угол между векторами $\vec{a} = -\vec{i} + \vec{j}$ и $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$.5. Определить углы $\triangle ABC$ с вершинами $A(2; -1; 3)$, $B(1; 1; 1)$ и $C(0; 0; 5)$.6. Раскрыть скобки в выражении $(2\vec{i} - \vec{j}) \cdot \vec{j} + (\vec{j} - 2\vec{k}) \cdot \vec{k} + (\vec{i} - 2\vec{k})^2$ 7. Определить и построить вектор $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, если 1) $\vec{a} = 3\vec{i}$, $\vec{b} = 2\vec{k}$; 2) $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j}$; 3) $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$, $\vec{b} = 3\vec{j} + 2\vec{k}$. Найти в каждом случае площадь

параллелограмма, построенного на векторах \vec{a} и \vec{b} .

8. Вычислить площадь треугольника с вершинами $A(7; 3; 4)$, $B(1; 0; 6)$ и $C(4; 5; -2)$.

9. Построить параллелепипед на векторах $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$, $\vec{b} = -3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{c} = 2\vec{j} + 5\vec{k}$ и вычислить его объём. Правой или левой будет тройка векторов $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$?

10. Построить пирамиду с вершинами $O(0; 0; 0)$, $A(5; 2; 0)$, $B(2; 5; 0)$ и $C(1; 2; 4)$ и вычислить её объём, площадь грани ABC и высоту пирамиды, опущенную на эту грань.

Аналитическая геометрия на плоскости: прямая, кривые второго порядка.

1. Построить прямые: 1) $3x+4y=12$; 2) $3x-4y=0$; 3) $2x-5=0$; 4) $2y+5=0$.

2. Дан треугольник с вершинами $A(-2; 0)$, $B(2; 4)$, $C(4; 0)$. Сделать чертеж, написать уравнения сторон треугольника, медианы AE , высоты AD и найти длину медианы AE .

3. Построить эллипс $x^2 + 4y^2 = 16$, найти его фокусы и эксцентриситет.

4. Земля движется по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце. Наименьшее расстояние от земли до Солнца равно приблизительно 147,5 миллиона километров, а наибольшее 152,5 миллиона километров. Найти большую полуось и эксцентриситет орбиты Земли.

5. Построить гиперболу $x^2 - 4y^2 = 16$ и её асимптоты. Найти фокусы, эксцентриситет и угол между асимптотами.

6. Зеркальная поверхность прожектора образована вращением параболы вокруг её оси симметрии. Диаметр зеркала 80 см, а глубина его 10 см. На каком расстоянии от вершины параболы нужно поместить источник света, если для отражения лучей параллельным пучком он должен быть в фокусе параболы?

Аналитическая геометрия в пространстве: плоскость, прямая, взаимное положение прямой и плоскости.

1. Найти плоскость, проходящую через точку $(2; 2; -2)$ и параллельную плоскости $x - 2y - 3z = 0$.

2. Построить прямую, проходящую через точки $A(2; -1; 3)$ и $B(2; 3; 3)$, и написать её уравнения.

3. Написать параметрические уравнения прямой: 1) проходящей через точку $(-2; 1; -1)$ и параллельной вектору $\vec{p} = \{1; -2; 3\}$; 2) проходящей через точки $A(3; -1; 4)$ и $B(1; 1; 2)$.

4. Написать уравнения прямой, проходящей через точку $(-4; 3; 0)$ и параллельной прямой

$$\begin{cases} x - 2y + z = 4, \\ 2x + y - z = 0. \end{cases}$$

Раздел 3. Математический анализ

Предел функции.

Вычислить пределы

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x-1}{x^2+1}.$

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3-1}{x^2+1}.$

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{1-2x}.$

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2-3x+2}{2x^2+4x+1}.$

5. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-3x+2}.$

6. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x^2-2x-3}.$

7. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x+6}{x^3+8}.$

8. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-x-2}{x^3+1}.$

Вопросы к экзамену

Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии

1. Определители 2-го и 3-го порядка. Свойства определителей. Разложение определителей по строке и столбцу.
2. Правило Крамера решения систем линейных уравнений.
3. Действия над матрицами. Обратная матрица. Матричный метод решения систем линейных уравнений.
4. Ранг матрицы. Системы линейных уравнений. Теорема Кронекера-Капелли (без доказательства). Метод Гаусса.
5. Векторы. Линейные операции над векторами. Правила сложения векторов. Проекция векторов, их свойства.
6. Скалярное произведение векторов. Свойства.
7. Векторное произведение векторов. Свойства.
8. Смешанное произведение векторов. Свойства.
9. Теорема о максимальном числе линейно независимых векторов в системе. Базис.
10. Расстояние между двумя точками на плоскости. Деление отрезка в данном отношении.
11. Уравнения прямой на плоскости: общее, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору, каноническое, проходящей через две заданные точки, в отрезках на осях, с угловым коэффициентом, проходящей в данном направлении. Частные случаи общего уравнения прямой на плоскости.
12. Расстояние от точки до прямой на плоскости.
13. Кривые второго порядка: эллипс, гипербола, парабола. Канонические уравнения, эксцентриситет и директрисы. Асимптоты гиперболы.
14. Уравнение плоскости в пространстве: общее, с данным вектором нормали, проходящей через три заданные точки, в отрезках на осях. Частные случаи общего уравнения плоскости.
15. Угол между двумя плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей.
16. Расстояние от точки до плоскости.
17. Общие уравнения прямой в пространстве. Переход от общих к каноническим уравнениям.
18. Канонические и параметрические уравнения прямой в пространстве.
19. Угол между двумя прямыми в пространстве. Условия параллельности и перпендикулярности прямых в пространстве.
20. Угол между прямой и плоскостью. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости.

Математический анализ

21. Понятие предела последовательности. Основные теоремы о пределах последовательности.
22. Понятие предела функции. Основные теоремы о пределе функции. Доказательство теоремы о пределе суммы.
23. Понятие предела функции. Основные теоремы о пределе функции. Доказательство теоремы о пределе произведения.
24. Бесконечно малая величина. Основные теоремы о бесконечно малых.
25. Бесконечно большая величина. Теорема о связи бесконечно большой и бесконечно малой.
26. Первый замечательный предел.
27. Второй замечательный предел.
28. Непрерывность функции в точке и на отрезке.
29. Непрерывность основных элементарных функций.
30. Классификация точек разрыва функции.
31. Асимптоты графика функции.
32. Свойства функций, непрерывных на отрезке.
33. Правила дифференцирования. Доказательство теоремы о производной произведения двух функций.
34. Производные основных элементарных функций. Производная функции $y = e^x$.
35. Связь производной и дифференциала.
36. Свойства дифференциала.
37. Дифференцирование обратной функции. Производная функции $y = \log_a x$.
38. Дифференцирование функции, заданной параметрически.
39. Теорема Ролля.
40. Теорема Лагранжа.
41. Теорема Коши.
42. Правило Лопиталю (случай $\left[\frac{0}{0} \right]$).

43. Правило Лопиталя (случай $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$).
44. Формула Тейлора.
45. Необходимое и достаточное условие возрастания (убывания) функции на отрезке.
46. Необходимое условие существования экстремума функции одной переменной.
47. Достаточные условия существования экстремума функции одной переменной.
48. Необходимое и достаточное условие выпуклости графика функции на отрезке.
49. Достаточное условие существования точки перегиба.
50. Частные производные первого порядка и их геометрический смысл.
51. Полный дифференциал функции двух переменных.
52. Частные производные высших порядков. Теорема о смешанных частных производных второго порядка.
53. Дифференциал второго порядка функции двух переменных.
54. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.
55. Достаточное условие существования экстремума функции двух переменных.
56. Наибольшее и наименьшее значения функции двух переменных в замкнутой и ограниченной области.

2 семестр

Раздел 3. Математический анализ

Производная.

Найти производные функций:

1. $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x - 5.$
2. $y = \frac{x^5}{5} - \frac{2x^3}{3} + x.$
3. $y = x + 2\sqrt{x}.$
4. $y = \frac{10}{x^3}.$
5. $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}.$
6. $y = x + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{5x^5}.$
7. $y = 3x - 6\sqrt{x}.$
8. $y = 6\sqrt[3]{x} - 4\sqrt[4]{x}.$
9. $y = \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{3x^3}.$
10. $y = \frac{8}{\sqrt[4]{x}} - \frac{6}{\sqrt[3]{x}}.$
11. $y = x - \sin x.$
12. $y = x - \operatorname{tg} x.$
13. $y = x^2 \cos x.$
14. $y = x^2 \operatorname{ctg} x.$
15. $y = \frac{\cos x}{x^2}.$
16. $y = \frac{x^2}{x^2 + 1}.$
17. $y = \frac{x}{1 - 4x}.$
18. $y = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{x}}.$
19. $y = \frac{\cos x}{1 - \sin x}.$
20. $y = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1}.$
21. $s = \frac{gt^2}{2}.$
22. $x = a(t - \sin t).$
23. $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 + x$; вычислить $f'(0)$, $f'(1)$, $f'(-1)$.
24. $f(x) = x^2 - \frac{1}{2x^2}$; вычислить $f'(2) - f'(-2)$.

25. $f(x) = \frac{x}{2x-1}$; найти $f'(0)$, $f'(2)$, $f'(-2)$.

26. $y = \sin 6x$.

27. $y = \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}$.

28. $y = \sqrt{2x - \sin 2x}$.

29. $y = \sin^2 x$.

30. $y = \sin^3 x + \cos^3 x$.

31. $y = \operatorname{tg}^3 x - 3\operatorname{tg} x + 3x$.

32. $y = \sin \sqrt{x}$.

33. $y = \frac{1}{(1 + \cos 4x)^5}$.

34. $y = \frac{\sin^2 x}{\cos x}$.

35. $y = x\sqrt{x^2 - 1}$.

36. $y = \frac{\sqrt{2x-1}}{x}$.

37. $y = \frac{1 + \sin 2x}{1 - \sin 2x}$.

38. $y = x \ln x$.

39. $y = \frac{1 + \ln x}{x}$.

40. $y = \lg 5x$.

41. $y = \ln x - \frac{2}{x} - \frac{1}{2x^2}$.

42. $y = \ln(x^2 + 2x)$.

43. $y = \ln(1 + \cos x)$.

44. $y = \ln \sin x - \frac{1}{2} \sin^2 x$.

45. $y = x^2 + 3^x$.

46. $y = x^2 2^x$.

47. $y = x^2 e^x$.

Исследование функций.

Провести полное исследование функции и построить её график:

1. $y = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x$.

2. $y = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$.

Функции нескольких переменных.

Найти частные производные функций:

1. $z = x^3 + 3x^2 y - y^3$.

2. $z = \ln(x^2 + y^2)$.

3. $z = \frac{y}{x}$.

4. $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$.

Найти полные дифференциалы функций:

5. $z = x^2 y$.

6. $z = \frac{xy}{x-y}$.

7. Найти частные производные третьего порядка $z = x^3 + x^2 y + y^3$.

8. Найти частные производные четвёртого порядка $z = x^4 + 3x^2 y^2 - 2y^4$.

Неопределённый интеграл

Найти интегралы:

1. $\int \left(x^2 + 2x + \frac{1}{x} \right) dx$. 2. $\int \frac{10x^8 + 3}{x^4} dx$. 3. $\int \frac{x-2}{x^3} dx$.

4. $\int \frac{(x^2+1)^2}{x^3} dx$. 5. $\int (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}) dx$. 6. $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}} \right) dx$.
7. $\int e^x \left(1 - \frac{e^{-x}}{x^2} \right) dx$. 8. $\int a^x \left(1 + \frac{a^{-x}}{\sqrt{x^3}} \right) dx$. 9. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx$.
10. $\int \operatorname{ctg}^2 x dx$. 11. $\int \frac{dx}{\cos^2 x \sin^2 x}$. 12. $\int \frac{3-2\operatorname{ctg}^2 x}{\cos^2 x} dx$.
13. $\int \sin^2 \frac{x}{2} dx$. 14. $\int \left(\frac{2}{1+x^2} - \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx$. 15. $\int \frac{dx}{x^2-25}$.
16. $\int \frac{dx}{x^2+9}$. 17. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$. 18. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+5}}$.
19. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}$. 20. $\int \frac{dx}{x^2+3}$. 21. $\int \left(\frac{3}{x^2+3} + \frac{6}{x^2-3} \right) dx$.
22. $\int \left(\frac{1}{\sqrt{2-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{2+x^2}} \right) dx$. 23. $\int \cos 3x dx$. 24. $\int \sin \frac{x}{2} dx$.
25. $\int e^{-3x} dx$. 26. $\int \frac{dx}{\cos^2 5x}$. 27. $\int (e^{x/2} + e^{-x/2}) dx$.
28. $\int \sqrt{4x-1} dx$. 29. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x}}$. 30. $\int \frac{dx}{1-10x}$.

Интегрирование по частям

1. $\int \ln x dx$. 2. $\int (5x-2) \cos 7x dx$
3. $\int x e^{2x} dx$. 4. $\int (5x+6) \sin(3x+2) dx$

Интегрирование рациональных дробей

1. $\int \frac{dx}{x^2+4x+5}$. 2. $\int \frac{x^3}{x-2} dx$. 3. $\int \frac{x-4}{(x-2)(x-3)} dx$. 4. $\int \frac{2x+7}{x^2+x-2} dx$.

Определенный интеграл

Вычислить:

1. $\int_1^3 x^3 dx$. 2. $\int_1^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^4} \right) dx$. 3. $\int_1^4 \sqrt{x} dx$.
4. $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$. 5. $\int_0^3 e^{x/3} dx$.
6. $\int_0^{\pi/4} \sin 4x dx$. 7. $\int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$.

Вычислить площадь, ограниченную линиями:

8. $xy=4$, $x=1$, $x=4$, $y=0$. 9. $y=\ln x$, $x=e$, $y=0$.

$$10. y = x^2, y = 2 - x^2.$$

$$11. y = x^2 + 4x, y = x + 4.$$

Двойной интеграл

$$1. \int_0^a dx \int_0^{\sqrt{x}} dy.$$

$$2. \int_2^4 dx \int_x^{2x} \frac{y}{x} dy.$$

$$3. \int_1^2 dy \int_0^{\ln y} e^x dx.$$

$$4. \iint_D xy dx dy \quad (0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2).$$

$$5. \iint_D \frac{x^2}{1+y^2} dx dy \quad (0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1).$$

В задачах 6–8 изменить порядок интегрирования.

$$6. \int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} f(x, y) dx.$$

$$7. \int_1^2 dx \int_x^{2x} f(x, y) dy.$$

$$8. \int_0^1 dx \int_0^x f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f(x, y) dy.$$

Вопросы к экзамену

Математический анализ

1. Теоремы о первообразных.
2. Свойства неопределённого интеграла.
3. Интегрирование по частям.
4. Интегрирование рациональных дробей.
5. Интегрирование тригонометрических функций.
6. Верхняя и нижняя интегральная сумма. Их свойства.
7. Свойства определённого интеграла.
8. Формула Ньютона – Лейбница.
9. Правила вычисления определённых интегралов.
10. Несобственные интегралы.
11. Геометрические приложения определённых интегралов.
12. сведение двойного интеграла к повторному
13. свойства двойного интеграла
14. замена переменных в двойном интеграле
15. двойной интеграл в полярных координатах
16. геометрические и физические приложения двойного интеграла
17. тройной интеграл: определение, теорема существования, свойства
18. свойства тройного интеграла
19. замена переменных в тройном интеграле
20. тройной интеграл в цилиндрических координатах
21. тройной интеграл в сферических координатах
22. геометрические и физические приложения тройного интеграла
23. криволинейный интеграл второго рода, свойства
24. формула Грина
25. условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования
26. поверхностный интеграл второго рода
27. формула Остроградского
28. формула Стокса
29. поток векторного поля

Дифференциальные уравнения

30. дифференциальные уравнения первого порядка, уравнения с разделяющимися переменными
31. однородные дифференциальные уравнения первого порядка и приводящиеся к ним
32. линейные дифференциальные уравнения первого порядка; уравнения Бернулли
33. дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка
34. определитель Вронского, свойства решений линейных однородных уравнений

35. структура общего решения линейного однородного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами
36. неоднородные линейные уравнения второго порядка
37. частное решение неоднородного линейного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

3 семестр

Раздел 4. Дифференциальные уравнения

Дифференциальные уравнения первого порядка

Найти общее решение дифференциальных уравнений:

1. $(xy^2 + x)dx + (y - x^2y)dy = 0$.

2. $xyy' = 1 - x^2$.

3. $yy' = \frac{1 - 2x}{y}$.

Однородные уравнения

4. $y' = \frac{y^2}{x^2} - 2$.

5. $y' = \frac{x - y}{x + y}$.

6. $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$.

7. $y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$.

Линейные уравнения

8. $y' + 2y = 4x$.

9. $y' + \frac{1 - 2x}{x^2}y = 1$.

10. $y' - y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}; \quad y(0) = 0$.

Линейные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

1. $y'' + y' - 2y = 0$.

2. $y'' - 9y = 0$.

3. $y'' - 4y' = 0$.

4. $y'' + y = 0$.

5. $y'' + 6y' + 13y = 0$.

6. $y'' - 7y' + 6y = \sin x$.

7. $y'' - 6y' + 9y = 2x^2 - x + 3$.

8. $y'' - 4y' + 4y = \operatorname{sh} 2x$.

9. $y'' - 2y' + 10y = 10x^2 + 18x + 6; \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = 3, 2$.

Раздел 5. Ряды

Числовые ряды. Признаки сходимости знакопостоянных рядов.

Исследовать сходимость.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^3(n\sqrt{n})}{n\sqrt{n}}$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 \frac{n\pi}{2}}{n(n+1)(n+2)}$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n (n+1)!}{(2n)!}$.

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(n+2)!}$.

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n-5}{e^{3n}}$.

7. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$.

Функциональные ряды: степенные ряды, ряды Тейлора и Маклорена.

Найти область сходимости степенного ряда:

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n x^n}{4^n \cdot \sqrt{n}}$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{2^n + 5^n}.$$

Указанную функцию разложить в ряд Маклорена

$$3. -3\ln(1+2x^2) + \cos x.$$

$$4. \sqrt[5]{1-5x}.$$

$$5. \frac{1}{\sqrt[5]{1+5x}}.$$

$$6. \frac{1}{(2+x)^2}.$$

Раздел 6. Теория вероятностей и математическая статистика

Элементы комбинаторики. Классическое определение вероятности.

1. Каким числом способов 5 человек могут находиться в очереди?
2. Билет в автобус имеет шестизначный номер. Сколько существует номеров, у которых все цифры различные?
3. Сколько существует пятизначных чисел, которые делятся на 5?
4. Сколькими способами из 25 студентов группы можно:
 - а) выбрать актив в составе: староста, его заместитель, профорг;
 - б) выбрать трех дежурных?
5. На клумбе растут 9 красных и 6 белых роз. Сколькими способами из них можно составить букет из 3 белых и 2 красных роз?
6. Шесть ящиков различных материалов доставляются на 5 этажей стройки. Сколькими способами можно распределить ящики по этажам
7. Лифт с четырьмя пассажирами останавливается на 8 этажах. Сколькими способами пассажиры могут выйти из лифта?
8. Какова вероятность выпадения хотя бы одного герба при двукратном бросании монеты?
9. Два игрока бросают игральные кости. Какова вероятность того, что сумма выпавших очков равна 10?
10. Какова вероятность того, что 7 случайно выбранных человек родились в разные дни недели?
11. В коробке 10 красных, 6 синих и 8 зеленых карандашей. Наугад вынимают три из них. Какова вероятность, что
 - а) все они разных цветов;
 - б) все они красные;
 - в) среди них два красных;
 - г) среди них два красных и один синий;
 - д) все они желтые?
12. Из 200 кур 50 белых, 100 красных и 50 полосатых, из 25 петухов 6 белых, 14 красных и 5 полосатых. Предполагая, что скрещивание происходит случайно, найти вероятность белой пары.
13. В первой части курса из 20 вопросов студент знает 15, во второй части – из 10 знает 5. Какова вероятность того, что студент ответит на произвольные 2 вопроса, один из которых из первой части, а другой из второй?
14. Среди 12 цыплят 5 курочек. Какова вероятность того, что из выбранных наудачу 4 цыплят 2 курочки?
15. Из колоды в 36 карт выбирают 4 карты. Какова вероятность того, что 3 из них красные?

Теоремы сложения и умножения.

1. Студент пришёл на экзамен, зная лишь 50 из 60 вопросов программы. Экзаменатор задал студенту 3 вопроса. Найти вероятность того, что студент знает все эти вопросы.
2. Определить вероятность того, что при трёхкратном бросании игровой кости ни разу не выпадет одно очко.
3. Два человека больны заболеванием, для которого коэффициент выздоровления составляет 98%. Найти вероятность того, что они оба выздоровеют.
4. Какова вероятность того, что из колоды в 36 игровых карт будут подряд вынуты 2 туза?
5. Всхожесть семян огурцов равна 0,9. Найти вероятность того, что из двух посаженных семян хотя бы одно не взойдёт.
6. Игровая кость бросается два раза. Найти вероятность того, что хотя бы один раз выпадет «шестёрка».
7. Из колоды в 36 карт наудачу вынимается одна. Определить вероятность того, что это будет карта пиковой масти или туз.
8. Посадили по одному саженцу яблони и груши. Вероятность того, что приживётся саженец яблони, равна 0,9, саженец груши – 0,8. Найти вероятность того, что
 - а) оба саженца приживутся;

- б) приживётся хотя бы один саженец;
 в) ни один саженец не приживется;
 г) приживется ровно один саженец.

9. В урне 2 белых, 3 чёрных и 5 красных шаров. Наугад извлекают три шара. Найти вероятность, что они одного цвета.

10. Три стрелка выстрелили по мишени по одному разу. Вероятность попадания для них 0,9; 0,8 и 0,7 соответственно. Найти вероятность, что мишень поражена не более одного раза.

11. Студент подготовил к экзамену 30 из 40 вопросов. На экзамене ему выдают два обязательных вопроса. Если он ответит на них, ему выдают два дополнительных вопроса, из которых для сдачи экзамена необходимо ответить хотя бы на один. Найти вероятность, что студент сдаст экзамен.

Схема Бернулли.

1. Вероятность того, что телевизор безотказно проработает гарантийный срок, равна 0,8. Закупили 4 телевизора. Какова вероятность, что

- а) три телевизора не проработают гарантийный срок;
 б) не менее двух телевизоров проработают гарантийный срок.

2. Что более вероятно: выиграть у равносильного противника

- а) три партии из четырех или хотя бы три из восьми;
 б) три партии из четырех или пять из восьми;
 в) не менее трех из четырех или не менее пяти из восьми?

Одномерная дискретная СВ.

1. Дан закон распределения одномерной дискретной случайной величины.

X	-1	0	2	4
p	0,2	a	0,3	0,2

Найти

- а) параметр a ;
 б) математическое ожидание $M(X)$;
 в) дисперсию $D(X)$.

2. Даны законы распределения двух независимых случайных величин:

X	3	4	5
p	1/3	1/3	1/3

Y	1	2
q	1/2	1/2

X – выручка фирмы, Y – затраты, $Z=X-Y$ – прибыль. Найти математическое ожидание случайной величины Z .

3. Даны законы распределения двух независимых случайных величин:

X	0	2	4
p	0,8	0,1	0,1

Y	-2	0	2
q	0,5	0,2	0,3

Найти закон распределения случайной величины $Z=XY$.

Двумерная дискретная СВ.

1. Дан закон распределения двумерной случайной величины

$X \backslash Y$	-1	0	1	2
1	0,10	0,25	0,30	0,15
2	0,10	0,05	0	0,05

Вычислить корреляционный момент случайных величин X и Y .

2. Дан закон распределения двумерной случайной величины

$X \backslash Y$	-1	0	1
1	0,15	0,30	0,35
2	0,05	0,05	0,10

Вычислить коэффициент корреляции случайных величин X и Y .

Вопросы к экзамену

Ряды

1. ряды, свойства числовых рядов, необходимый признак сходимости;

2. расходимость гармонического ряда;
3. признаки сходимости знакоположительных рядов: сравнения, предельный признак сравнения, Даламбера, радикальный Коши, интегральный Коши;

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

4. сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$;
5. знакочередующиеся ряды, признак Лейбница;
6. абсолютная и условная сходимость. Свойства абсолютно сходящихся и условно сходящихся рядов;
7. мажорируемые ряды. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости рядов;
8. непрерывность суммы, интегрируемость и дифференцируемость равномерно сходящихся рядов;
9. степенные ряды: интервал сходимости, теорема Абеля;
10. дифференцирование и интегрирование степенных рядов;
11. ряды Тейлора и Маклорена,
12. разложение в ряд Маклорена и область сходимости элементарных функций:
 e^x , $\sin x$, $\cos x$, $(1+x)^m$, $\ln(1+x)$;

Теория вероятностей и математическая статистика

1. Классическое и геометрическое определения вероятности. Свойства вероятности.
2. Виды случайных событий: совместные, несовместные, зависимые, независимые. Операции над случайными событиями.
3. Теоремы сложения и умножения вероятностей.
4. Формула полной вероятности.
5. Вероятности гипотез. Формулы Байеса.
6. Локальная и интегральная теоремы Лапласа.
7. Теорема Пуассона.
8. Понятие случайной величины, способы задания случайных величин.
9. Биномиальное распределение, его числовые характеристики.
10. Геометрическое и гипергеометрическое распределения.
11. Операции над случайными величинами.
12. Свойства математического ожидания.
13. Формулы для вычисления дисперсии.
14. Свойства дисперсии.
15. Начальные и центральные теоретические моменты.
16. Закон больших чисел: неравенство Чебышева, теорема Чебышева, теорема Бернулли.
17. Функция распределения, ее свойства.
18. Плотность распределения вероятностей, ее свойства.
19. Числовые характеристики непрерывных случайных величин.
20. Нормальное распределение: числовые характеристики, свойства, кривая Гаусса.
21. Равномерное, показательное распределения. Числовые характеристики.
22. Способы задания двумерной случайной величины.
23. Корреляционный момент двумерной случайной величины, свойства.
24. Коэффициент корреляции двумерной случайной величины, свойства.

Литература

Список рекомендуемой литературы

1. Высшая математика: Учебник / В.С. Шипачев. - М.: НИЦ ИНФРА-М, 2015. - 479 с.
2. Высшая математика: Учебник / Л.Т. Ячменёв. - М.: ИЦ РИОР: НИЦ Инфра-М, 2013. - 752 с.

Список дополнительной литературы

3. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д. Т. Письменный. - 10-е изд., испр.- М.: Айрис-пресс, 2011. - 608 с.: ил. - (Высшее образование).
4. Кремер, Н. Ш. Теория вероятностей и математическая статистика. В 2 ч. Часть 1. Теория вероятностей : учебник и практикум для академического бакалавриата / Н. Ш. Кремер. — 4-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2016. — 264 с. — Серия: Бакалавр. Академический курс.

Составитель **Грунина Мария Викторовна**

МАТЕМАТИКА

Методические указания по проведению практических занятий и самостоятельному изучению
дисциплины

Печатается в авторской редакции

Издательский центр НГАУ
630039, Новосибирск, ул. Добролюбова