НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Инженерный институт

Теоретическая механика

Методические указания по самостоятельному изучению дисциплины и выполнению контрольных и расчетно-графических работ

Новосибирск 2017

Кафедра высшей и прикладной математики

УДК 531. 011 (07)
ББК 22.21, Я7
Т 338

Составители: канд. техн. наук, доц. С.Н. Бурков,
канд. техн. наук, доц. В.П. Косых

Рецензент: д.т.н., проф. А.М. Красюк

Теоретическая механика: Методические указания по самостоятельному изучению дисциплины и выполнению контрольных и расчетно-графических работ / Новосиб. гос. аграр. ун-т; сост.: С.Н. Бурков, В.П. Косых – Новосибирск, 2017. - 52 с.

В методических указаниях представлены задания для контрольных и расчетно-графических работ, задания для самостоятельного решения, вопросы для самоконтроля знаний, вопросы к экзаменам, список рекомендуемой литературы.

Методическое пособие предназначено для студентов Инженерного института очной и заочной форм обучения по направлениям подготовки:

35.03.06 Агроинженерия (профили: Технические системы в агробизнесе; Электрооборудование и электротехнологии в агропромышленном комплексе; Технологическое оборудование для хранения и переработки сельскохозяйственной продукции; Технический сервис в агропромышленном комплексе);

23.03.03 Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов (профиль: Автомобили и автомобильное хозяйство);

23.03.01 Технология транспортных процессов (профиль: Организация и безопасность дорожного движения)

Утверждены и рекомендованы к изданию методическим советом Инженерного института (протокол № 10 от 30 мая 2017 г.)

Содержание

1. Введение

1.1. Цели и задачи дисциплины

«Теоретическая механика» – фундаментальная естественнонаучная дисциплина, лежащая в основе современного подхода к изучению явлений природы, широко применяемая в различных отраслях техники (авиации, космонавтике, нефтегазопромысловом деле, машиностроении, приборостроении и т.п.) и содействующая развитию эффективных технологий. Теоретическая механика занимается общими закономерностями механических движений материальных тел и силовых взаимодействий между ними, а также взаимодействие тел с физическими полями. Изучение теоретической механики способствует развитию абстрактного мышления, формированию системы фундаментальных знаний, позволяющих будущему специалисту строить логически обоснованные модели изучаемых явлений и процессов, использовать на практике приобретённые им базовые знания. Самостоятельно, используя современные образовательные и информационные технологии, овладевать новой методологией научного анализа проблем, с которыми ему придётся столкнуться в производственной и научной деятельности.

Целью теоретической механики являются:

- изучение общей теории о совокупности сил, приложенных к материальным телам, и об основных операциях над силами, позволяющих приводить совокупности их к наиболее простому виду, выводить условия равновесия материальных тел, находящихся под действием заданной совокупности сил, и определять реакции связей, наложенных на данное материальное тело;

- изучение способов количественного описания существующих движений материальных тел в отрыве от силовых взаимодействий их с другими телами или физическими полями, таких как орбитальные движения небесных тел, искусственных спутников Земли, колебательные движения (вибрации) в широком их диапазоне – от вибраций в машинах и фундаментах, качки кораблей на волнении, колебаний самолетов в воздухе, тепловозов, электровозов, вагонов и других транспортных средств, до колебаний в приборах управления.

- изучение движения материальных тел в связи с механическими взаимодействиями между ними, основываясь на законах сложения сил, правилах приведения сложных их совокупностей к простейшему виду и приемах описания движений, установление законов связи действующих сил с кинематическими характеристиками движений и применение этих законов для построения и исследования механико-математических моделей адекватно описывающих разнообразные механические явления.

При изучении теоретической механики вырабатываются навыки практического использования методов, предназначенных для математического моделирования движения систем твёрдых тел.

1.2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы (ООП)

Внешние требования к освоению дисциплины регламентируются ФГОС ВО по направлениям подготовки:

35.03.06 Агроинженерия;

23.03.03 Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов;

23.03.01 Технология транспортных процессов.

Изучение дисциплины «Теоретическая механика» базируется на знаниях, умениях и компетенциях, полученных в ходе освоения курсов «Математика» и «Физика».

Базирующиеся дисциплины: «Сопротивление материалов», «Теория механизмов и машин», «Детали машин и основы конструирования».

1.3. Требования к результатам освоения дисциплины

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций (в соответствии с ФГОС ВО):

Общепрофессиональные компетенции (ОПК):

ОПК-3	способность применять систему фундаментальных знаний (математических, естественнонаучных, инженерных и экономических) для идентификации, формулирования и решения технических и технологических проблем в области технологии, организации, планирования и управления технической и коммерческой эксплуатацией транспортных систем
ОПК-4	способность решать инженерные задачи с использованием основных законов механики, электротехники, гидравлики, термодинамики и тепломассообмена

В результате освоения дисциплины студент должен:

Знать:

- реакции связей, условий равновесия плоской и пространственной систем сил, теории пар сил, кинематические характеристики точки, частные и общие случаи движения точки и твердого тела, дифференциальные уравнения движения точки, общие теоремы динамики, теорию удара.

Уметь:

- использовать законы и методы теоретической механики как основы описания и расчетов механизмов транспортных и транспортно-технологических машин и оборудования.

Владеть:

- элементами расчета теоретических схем механизмов, транспортных и транспортно-технологических машин и оборудования.

2. Методические указания по выполнению

контрольных и расчетно-графических работ

Студенты, обучающиеся по направлению подготовки **23.03.01 Технология транспортных процессов,** выполняют контрольную работу (КР) по следующим темам:

статика - задачи С1, С2, С3,

кинематика - задачи К1, К2,К3,

динамика задачи Д2, Д3.

Студенты, обучающиеся по направлениям подготовки **35.03.06 Агроинженерия** и **23.03.03 Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов;**

выполняют расчетно – графическую работу (РГР) по следующим темам:

статика - задачи С1, С2, С3,

кинематика - задачи К1, К2,К4, К5

динамика задачи Д1, Д2, Д3, Д4.

Каждая задача содержит: текст, рисунки и таблицы с исходными данными. Нумерация рисунков двойная, при этом первая цифра совпадает с номером задачи, вторая цифра означает номер рисунка.

Студент во всех задачах выбирает номер рисунка по предпоследней цифре шифра, а номер условия в таблице - по последней.

Каждое задание выполняется в отдельной тетради. На обложке указываются: название дисциплины, номер шифра, фамилия и инициалы студента, учебный шифр, факультет, специальность и адрес.

Решение каждой задачи следует начинать на развороте страницы. Сверху указывается номер задачи, далее делается чертеж и записывается, что в задаче дано и что требуется определить (текст задачи не переписывать). Чертеж выполняется с учетом условий решаемого варианта задачи; на нем все углы, действующие силы; число тел и их расположение на чертеже должны соответствовать этим условиям.

Чертеж должен быть аккуратным и достаточно крупным, на нем должны быть ясно показаны все силы и векторы скоростей и ускорений и др. Решение задач необходимо сопровождать краткими пояснениями (какие формулы или теоремы применяются, как получаются те или иные результаты).

Работы, не отвечающие перечисленным требованиям, не проверяются и возвращаются на переделку.

При решении задач надо учесть, что все нити (веревки, тросы) считаются нерастяжимыми и невесомыми, нити, перекинутые через блок, не скользят, катки и колеса (в кинематике и динамике) катятся по плоскостям без скольжения. Все связи, если не сделано оговорок, считаются идеальными

Следует учесть, что некоторые из величин, заданных в условиях задач, при решении отдельных вариантов могут не понадобиться, они нужны при решении других вариантов задачи.

В курсе теоретической механики студенты изучают три раздела: статику, кинематику и динамику.

Для освоения курса необходимо иметь соответствующую математическую подготовку. Во всех разделах курса, начиная со статики, широко используется векторная алгебра. Необходимо уметь вычислять проекции векторов на координатные оси, находить геометрически (построением векторного треугольника или многоугольника) и аналитически (по проекциям на координатные оси) сумму векторов, вычислять скалярное и векторное произведения двух векторов и знать свойства этих произведений, а в кинематике и динамике

-дифференцировать векторы. Надо также уметь свободно пользоваться системой прямоугольных декартовых координат на плоскости и в пространстве, знать, что такое единичные векторы (орты) этих осей и как выражаются составляющие вектора по координатным осям с помощью ортов.

Для изучения кинематики необходимо уметь дифференцировать функции одного переменного, строить графики этих функций, быть знакомым с понятиями о естественном трехграннике, кривизне кривой и радиусе кривизны, знать основы теории кривых 2-го порядка, изучаемой в аналитической геометрии. При изучении динамики надо уметь находить интегралы (неопределенные и определенные) от простейших функций, вычислять частные производные и полный дифференциал функций нескольких переменных, а также уметь интегрировать дифференциальные уравнения 1-го порядка с разделяющимися переменными и линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка (однородные и неоднородные) с постоянными коэффициентами.

Критерии оценки выполнения контрольных работ

– оценка «отлично» выставляется при правильно выполненной задаче, аккуратно и чисто, в соответствии с требованиями, оформленном решении;

– оценка «хорошо» выставляется при правильно решенной задаче и при наличии в ходе выполнения незначительных помарок;

– оценка «удовлетворительно» выставляется, если после проверки в задаче будут исправлены все ошибки и она будет оформлена в соответствии с пунктом выше.

– во всех остальных случаях работа не засчитывается и выдается другой вариант.

3. Условия задач для расчетно-графических и контрольных работ

СТАТИКА

Задание С1 (произвольная плоская система сил)

Определить реакции связей горизонтальной балки, находящейся под действием заданной нагрузки. Необходимые для расчёта данные приведены в таблице С1.1 Схемы балок показаны в таблице С1.2

Указания. Задача С1 – на равновесие тела под действием произвольной плоской системы сил. При ее решении уравнение моментов будет более простым (содержать меньше неизвестных), если брать моменты относительно точки, где пересекаются линии действия двух реакций связей. При вычислении момента силы $\vec{P}$ часто удобно разложить ее на составляющие $\vec{P}'$ и $\vec{P}''$, для которых плечи легко определяются, и воспользоваться теоремой Вариньона; тогда $m_0(\vec{P}) = m_0(\vec{P}') + m_0(\vec{P}'')$.

Таблица С1.1

Исходные данные

Вариант	Нагрузка				Размер		Угол	
	P, *кН*	G, *кН*	q, *кН/м*	M, *кН·м*	*a*, *м*	*b*, *м*	α *град*	β *град*
0	10	8	1,2	12	2,0	3,0	30°	60°
1	15	6	1,0	8	3,0	2,0	60°	30°
2	20	4	0,6	6	2,5	1,5	45°	30°
3	25	2	0,4	4	1,5	2,5	45°	60°
4	8	10	0,8	10	3,0	2,0	60°	30°
5	6	15	1,4	15	2,0	3,0	30°	60°
6	4	8	0,6	6	1,5	2,5	30°	45°
7	2	5	0,4	5	2,5	1,5	60°	45°
8	10	4	0,8	8	3,0	2,5	45	30°
9	15	2	1,4	5	2,5	2,0	30	60°

Таблица С1.2

Схемы балок

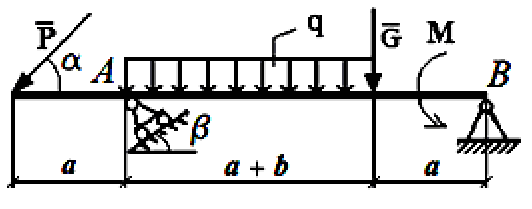


Рис. С1.0

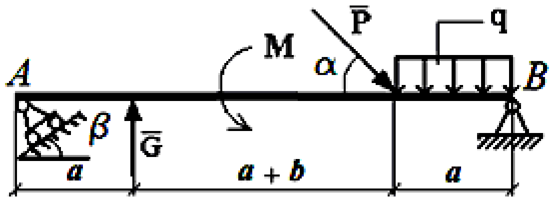


Рис. С1.1

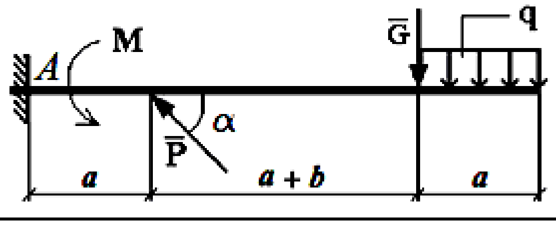


Рис. С1.2

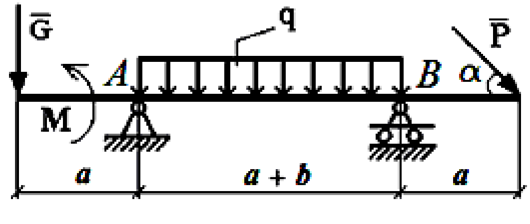


Рис. С1.3

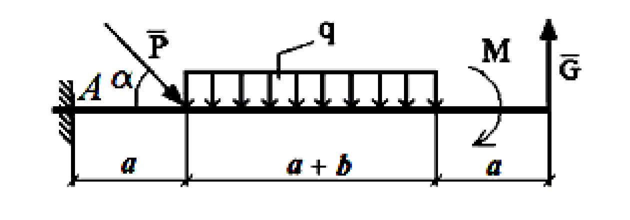


Рис. С1.4

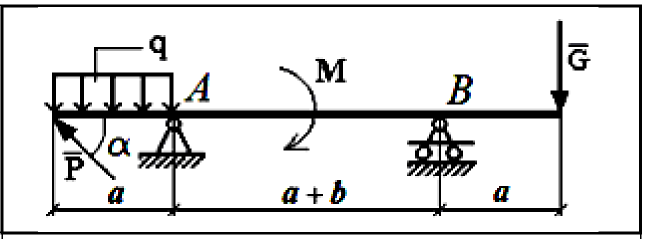


Рис. С1.5

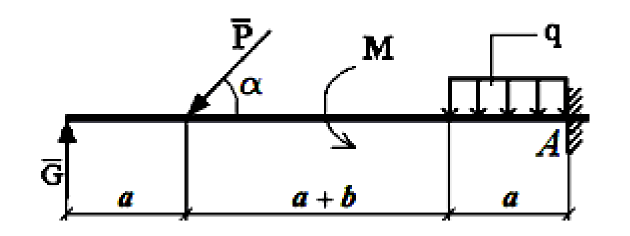


Рис. С1.6

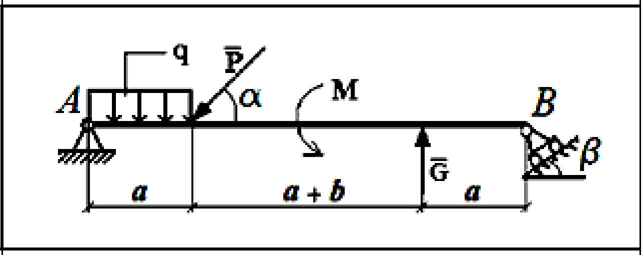


Рис. С1.7

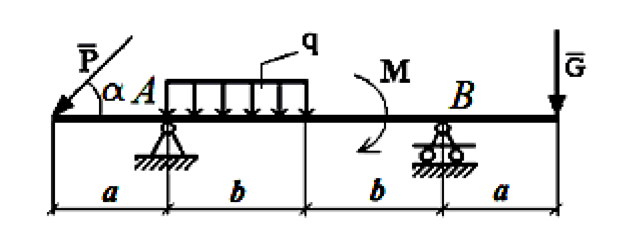


Рис. С1.8

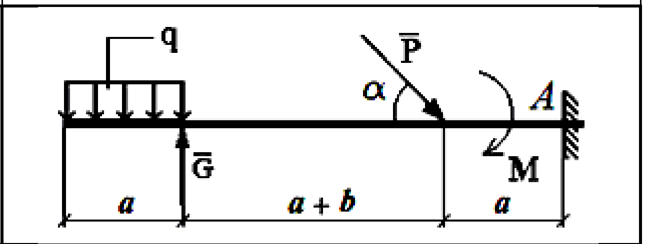


Рис. С1.9

Пример выполнения задания С1

Исходные данные: Балка *АС* (рис. 1.1), геометрические размеры которой заданы, находится под действием сосредоточенной силы *Р=4 кН*, равномерно распределенной нагрузки *q=2,5 кН/м* и пары сил с моментом *М=15 Н·м*. Определить реакции опор *А* и *В*.

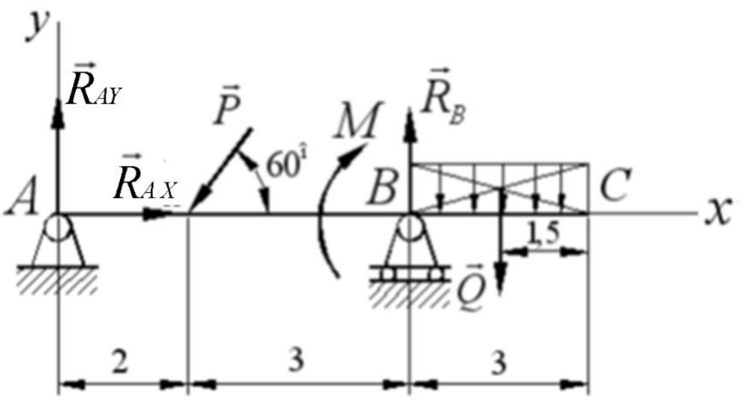


Рис. С1. К примеру решения задачи С1

Решение: Проведем координатные оси ***x*** и ***y***. Заменим равномерную распределенную нагрузку сосредоточенной силой $\vec{Q}$, модуль которой

$\vec{Q} = 3 \cdot q = 3 \cdot 2{,}5 = 7{,}5$ кН.

Она приложена в центре тяжести площади загрузки (прямоугольника).

Изобразим реакции связей. Опора *В* – шарнирно-подвижная (реакция $\vec{R}_B$ будет направлена нормально опорной плоскости), опора *А* – шарнирно-неподвижная, поэтому ее реакцию $\vec{R}_A$ разложим на две составляющие, направленные по осям ***x*** и ***y***, т.е. $\vec{R}_{Ax}$ и $\vec{R}_{Ay}$.

Для полученной произвольной плоской системы сил составим три уравнения равновесия.

При расчетах будем брать значения до четвертого знака после запятой, что необходимо будет для проверки.

$$\Sigma F_{kx} = 0\,;\; R_{Ax} - P \cdot \cos 60^{\circ} = 0\,, \qquad (1.1)$$

откуда $R_{Ax} = P \cdot \cos 60^{\circ} = 4 \cdot 0{,}5 = 2\,кН$,

$$\Sigma M_A\left(\overrightarrow{F_k}\right) = 0\,,\; R_B \cdot 5 - Q \cdot 6{,}5 - M - P \cdot \cos 30^{\circ} \cdot 2 = 0\,, \qquad (1.2)$$

откуда $R_B = \dfrac{Q \cdot 6{,}5 + M + P \cdot \cos 30^{\circ} \cdot 2}{5} = \dfrac{7{,}5 \cdot 6{,}5 + 15 + 4}{5} = 14{,}1356 кН$.

$$\Sigma F_{ky} = 0\,;\; R_{Ay} - P \cdot \cos 30^{\circ} + R_B - Q = 0\,, \qquad (1.3)$$

откуда

$$R_{Ay} = P \cdot \cos 30^{\circ} - R_B + Q = 4 \cdot 0{,}866 - 14{,}14 + 7{,}50 = 3{,}1716 кН\,.$$

Далее желательно сделать проверку. Для этого составим уравнения моментов всех сил относительно любой точки плоскости их действия, например С.

$$\Sigma M_C\left(\overrightarrow{F_k}\right) = R_{Ay} \cdot 8 + P \cdot \cos 30^{\circ} \cdot 6 - M - R_B \cdot 3 + Q \cdot 1 = 3{,}1716 \cdot 8 + 4 \cdot 0{,}866 \cdot 6 -$$
$$-15 - 14{,}1356 \cdot 3 + 7{,}5 \cdot 1 = 0$$

следовательно, реакции определены верно.

Окончательные результаты вычислений искомых реакций округлим до сотых долей.

Ответ: $R_{Ax} = 2\,кН$; $R_{Ay} = -3{,}17\,кН$; $R_B = 14{,}14\,кН$.

Знак указывает, что сила R_{AY} направлена противоположно показанной на рисунке.

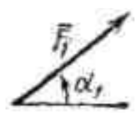
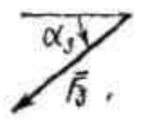
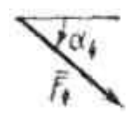
Задание С2 (Определение реакций опор твердого тела, находящегося под действием плоской системы сил)

Жесткая рама закреплена в точке *А* шарнирно, а в точке *В* прикреплена или к невесомому стержню с шарнирами на концах, или к шарнирной опоре на катках. В точке *С* к раме привязан трос, перекинутый через блок и несущий на конце груз *Р=25* кН. На раму действует пара сил с моментом *М=60* кН·м и две силы, значения, направления и точки приложения которых указаны в таблице. С2.1 Схемы рам приведены на рисунках в таблице С2.2

Определить реакции связей в точках *А* и *В*, вызванные действующими нагрузками и сделать проверку правильности решения. При окончательных расчетах принять а=0,5 м.

Таблица С2.1

Исходные данные

Силы								
	F_1=10 кН		F_2=20 кН		F_3=30 кН		F_4=40 кН	
Номер условия	Точка приложения	α_1 град	Точка приложения	α_2, град	Точка приложения	α_3, град	Точка приложения	α_4, град
0	*H*	30	—	—	—	—	*K*	60
1	—	—	*D*	15	*E*	60	—	—
2	*K*	75	—	—	—		*E*	30
3	—	—	*K*	60	*H*	30	—	—

4	*D*	30	—	—	—	—	*E*	60
5	—	—	*H*	30	—	—	*D*	75
6	*E*	60	—	—	*K*	15	—	
7	—	—	*D*	60	—	—	*H*	15
8	*H*	60	—	—	*D*	30	—	—
9	—	—	*E*	75	*K*	30	—	—

Таблица С2.2

Схемы твердого тела с закреплениями

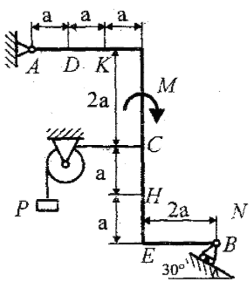
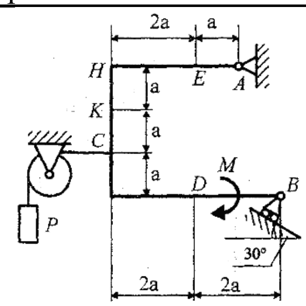
	

Рис. 2.0	Рис. 2.1

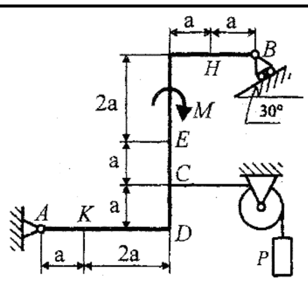
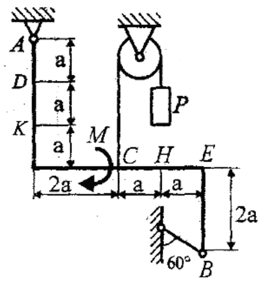

	

Рис. 2.2	Рис. 2.3

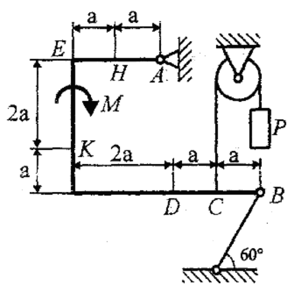
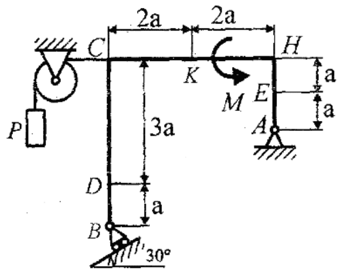

	

Рис. 2.4	Рис. 2.5

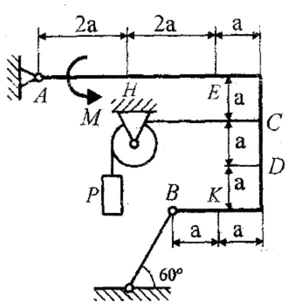
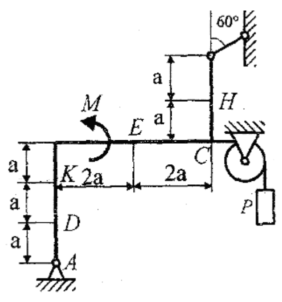

	

Рис. 2.6	Рис. 2.7

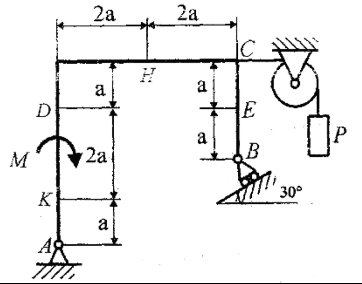


Рис. 2.8

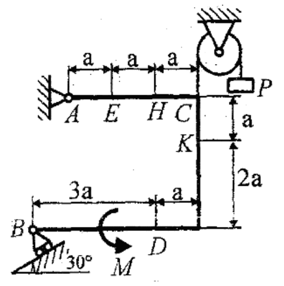


Рис. 2.9

Пример выполнения задания С2

Исходные данные: Схема конструкции показана на рисунке С2*а*. Здесь указанные параметры *G=10 кН, P=5 кН, M=8 кН·м, q=0,5 кН/м, α=60°, l=1 м.* Определить реакцию опоры *A* и реакцию стержня *CD*.

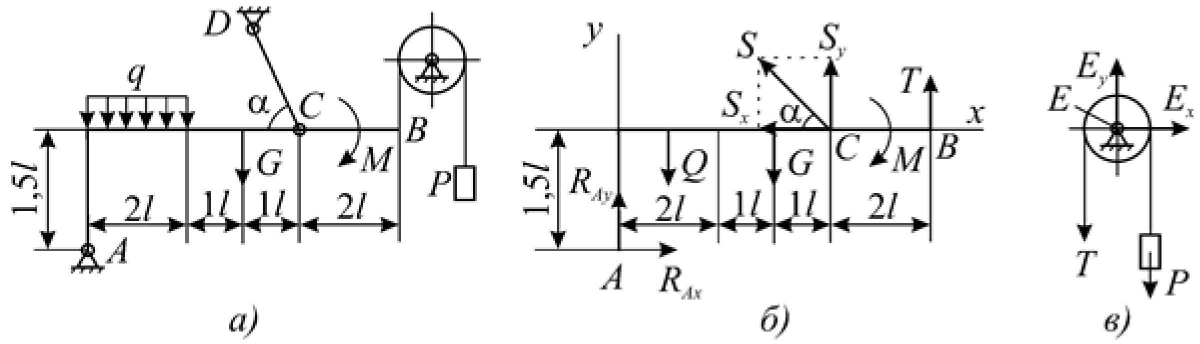


Рис. С2. К примеру решения задачи С2

Решение: Рассмотрим равновесие балки *AB*. Покажем все действующие на балку активные силы (рис. С2*б*): заданную силу *G*, равнодействующую *Q* распределенной нагрузки ($Q = q \cdot 2 = 0{,}5 \cdot 2 = 1 кН$), усилие *T* со стороны нити и пару сил с моментом *M*.

Отбросим связи (неподвижный шарнир *A* и стержень *CD*) и заменим их действие соответствующими реакциями связей R_{Ax}, R_{Ay} и *S*.

Балка *AB* находится в равновесии под действием плоской системы сил. Прежде чем записать условие равновесия тела под действием плоской системы сил, определим усилие *T*, действующее на балку со стороны нити. Для этого рассмотрим равновесие блока с грузом *P*. Отбросив связи (неподвижный шарнир *E* и нить), заменим их действие реакциями связей (E_x, E_y и *T*) и покажем активную силу *P* (рис. 2.1*в*).

Записав одно условие равновесия получившейся плоской системы сил ($\sum m_E(F_i) = 0$), убеждаемся, что $T = P$, т.к. $T{\cdot}r - P{\cdot}r = 0$, где *r* – радиус блока. Следовательно, на балку *AB* со стороны нити действует такая же, но противоположно направленная сила *T = P=5 кН*.

Запишем условия равновесия плоской системы сил, действующих на балку *AB* (рис. 2.1*б*):

$$\sum F_{ix} = 0; R_{Ax} - S\cos\alpha = 0\,, \tag{2.1}$$

$$\sum F_{iy} = 0; R_{Ax} - Q - G + S\sin\alpha + T = 0\,, \tag{2.2}$$

$$\sum m_A = 0; -Q \cdot l - G \cdot 3l + S_x \cdot 1{,}5l + S_y \cdot 4l - M + T \cdot 6l = 0\,. \tag{2.3}$$

Для определения момента силы *S* относительно точки *A* ее разложили на составляющие $S_x = S\cos\alpha;\ \ S_y = S\sin\alpha$ и воспользовались теоремой Вариньона о моменте равнодействующей.

Решим получившуюся систему алгебраических уравнений относительно неизвестных реакций связи.

Перепишем уравнение (2.3) в виде

$$-Q - 3l \cdot G + S\cos\alpha \cdot 1{,}5l + S\sin\alpha \cdot 4l - M + 6l \cdot T = 0$$

и найдем из него S:

$$S=\frac{Q\cdot l+3l\cdot G+M-6l\cdot T}{1{,}5l\cdot\cos\alpha+4l\cdot\sin\alpha}=\frac{1\cdot1+3\cdot10+8-6\cdot5}{1{,}5\cos60^\circ+4\sin60^\circ}=2{,}14\,кН\,.$$

Из уравнения (2.1) найдём R_{Ax}:

$$R_{Ax}=S\cos\alpha=2{,}14\cos60^\circ=1{,}07\,кН,$$

а из уравнения (2.2) – R_{Ay}:

$$R_{Ay}=Q+G-S\sin\alpha-T=1+10-2{,}14\sin60^\circ-5=4{,}15\,кН\,.$$

Ответ: R_{Ax}*=1,07 кН*, R_{Ay}*=4,15 кН* и *S=2,14 кН.*

Все неизвестные реакции имеют положительный знак, их направления верно показаны на рис. С2*б*.

Задание С3 (Определение реакций опор составной конструкции)

Конструкция (таблица С3.2) состоит из 2-х тел, соединенных шарниром *C*. Определить реакции опор и выполнить проверку правильности решения. Исходные данные для расчетов приведены в таблице С3.1.

Таблица С3.1.

Вариант	Нагрузка				Размер		Угол	
	P_1, *кН*	**P_2,** *кН*	**q,** *кН/м*	**M,** *кН·м*	***a*,** *м*	***b*,** *м*	α_1 *град*	α_2 *град*
1.0	10	8	1,2	12	2,0	1,0	30°	60°
1.1	15	6	1,0	8	3,0	1,2	60°	30°
1.2	20	4	0,6	6	2,5	1,5	45°	30°
1.3	25	2	0,4	4	1,5	0,5	45°	60°
1.4	8	10	0,8	10	3,0	0,6	60°	30°
1.5	6	15	1,4	15	2,0	1,4	30°	60°
1.6	4	8	0,6	6	1,5	1,3	30°	45°
1.7	2	5	0,4	5	2,5	0,8	60°	45°
1.8	10	4	0,8	8	3,0	1,4	45	30°
1.9	15	2	1,4	5	2,5	0,7	30	60°

Таблица С3.2

Схемы составной конструкции

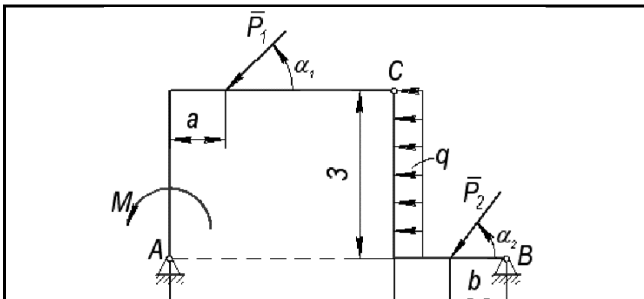


Рис. С3.0

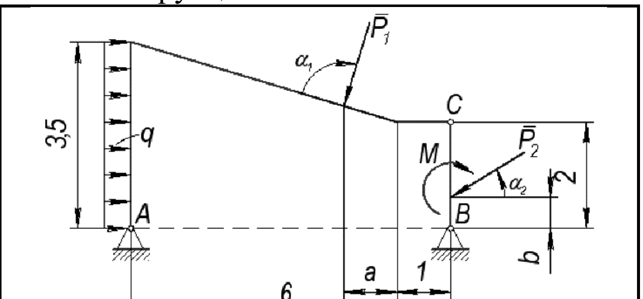


Рис. С3.1

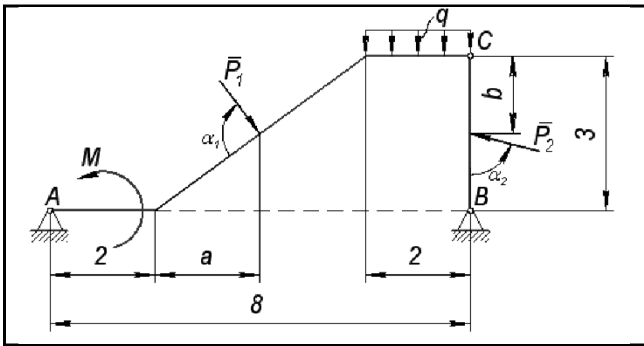


Рис. С3.2

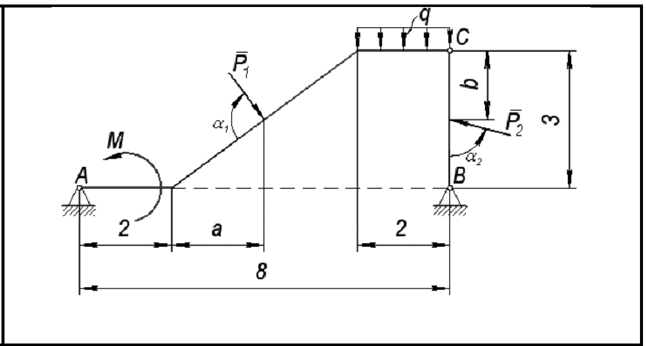


Рис. С3.3

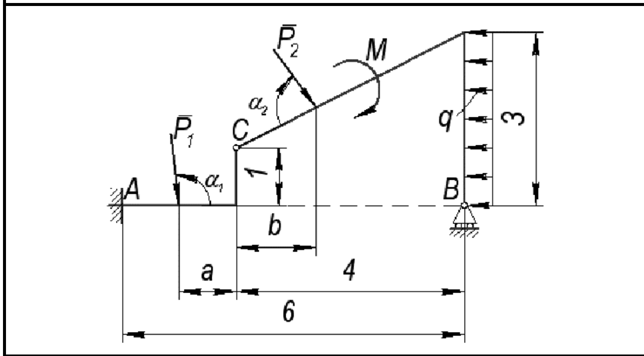


Рис. С3.4

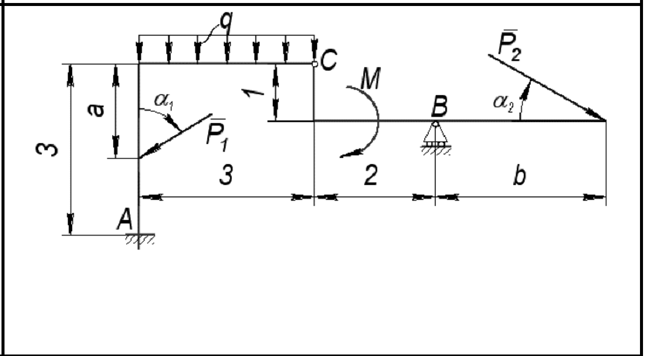


Рис. С3.5

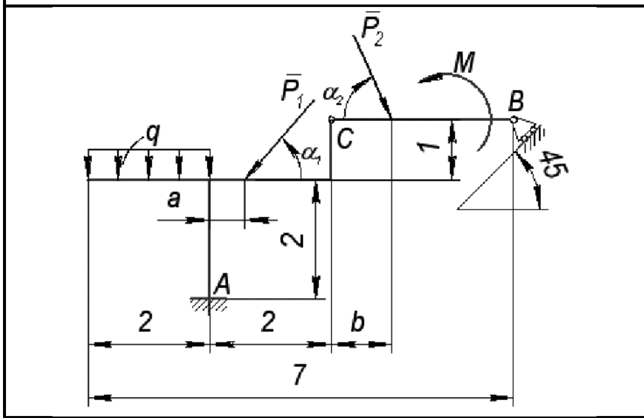


Рис. С3.6

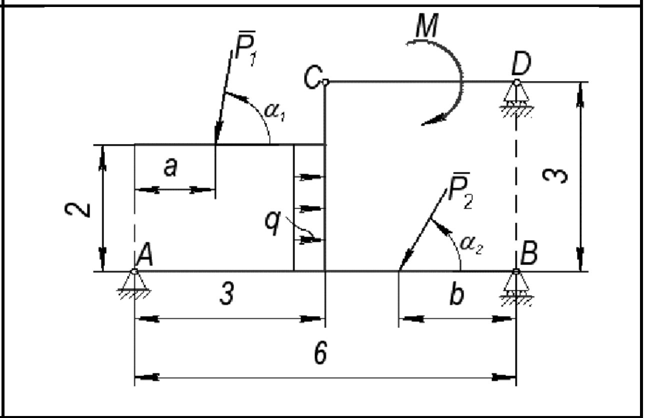


Рис. С3.7

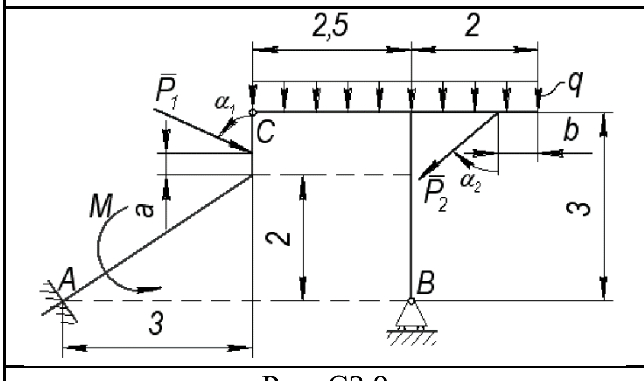


Рис. С3.8

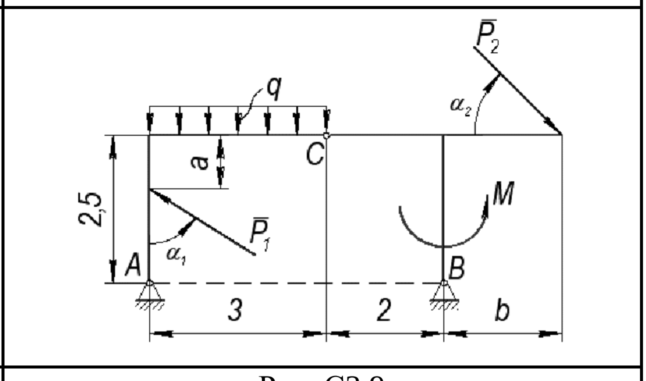


Рис. С3.9

Пример выполнения С3

Исходные данные: Задана схема конструкции, показанная на рис. С3*а*. *В*еличины $M = 4кН \cdot м, P = 0{,}5кН \cdot м, \alpha = 30°.$ Размеры на рисунке указаны в метрах. Определить реакции в опорах *A*, *C* и усилие во внутреннем шарнире *B*.

Решение: Рассмотрим равновесие всей конструкции *ABC* (составную конструкцию, согласно принципу отвердевания, можно рассматривать как одно твердое тело).

Покажем все действующие на конструкцию активные силы (рис. С3*б*): заданную силу *P* и пару сил с момента *M*.

Отбросим связи – заделку в точке A и подвижный шарнир C(шарнир B при рассмотрении равновесия всей конструкции не является связью) – и заменим их действие соответствующими реакциями $R_{Ax},\ R_{Ay},\ M_A,\ R_C$.

Запишем условия равновесия получившейся плоской системы сил:

$$\sum F_{ix}=0;\ R_{Ax}-R_C\sin\alpha+P=0, \tag{3.1}$$

$$\sum F_{iy}=0;\ R_{Ay}+R_C\cos\alpha=0, \tag{3.2}$$

$$\sum m_A(F_i)=0;\ M_A-M+R_{Cy}\cdot 3-R_{Cx}\cdot 4+P\cdot 2{,}5=0. \tag{3.3}$$

Получилась система трех линейных алгебраических уравнений относительно четырех неизвестных.

Для составления дополнительных уравнений и нахождения силы давления в шарнире B рассмотрим равновесие балки BC. Покажем (рис. С3*в*) все действующие на балку BC активные силы (силу P) и реакции связи: $R_{Bx},\ R_{By}$ *и* R_C (для балки BC связями являются неподвижный шарнир B и подвижный шарнир C).

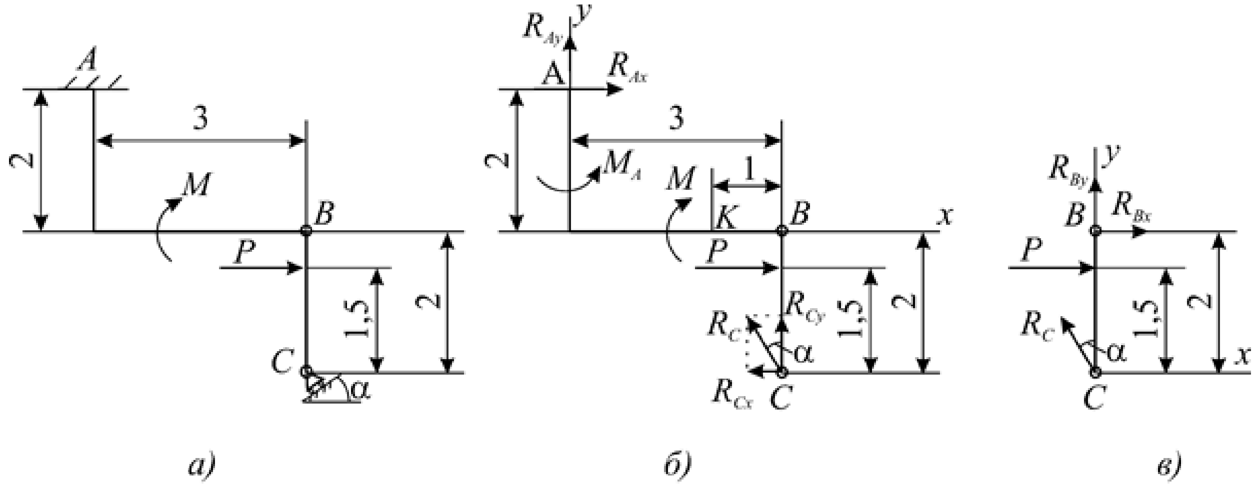


Рис. С3. К примеру решения задачи С3

Запишем условия равновесия получившейся системы сил:

$$\sum F_{ix}=0;\ R_{Bx}-R_C\sin\alpha+P=0, \tag{3.4}$$

$$\sum F_{iy}=0;\ R_{By}+R_C\cos\alpha=0, \tag{3.5}$$

$$\sum m_B(F_i)=0;\ P\cdot 0{,}5-R_C\sin\alpha\cdot 2=0. \tag{3.6}$$

Решая систему шести линейных алгебраических уравнений (3.1) – (3.6), найдем шесть неизвестных реакций.

Из уравнения (3.6):

$$R_C=\frac{P\cdot 0{,}5}{\sin\alpha\cdot 2}=\frac{0{,}5\cdot 0{,}5}{\sin 30°\cdot 2}=0{,}250\ кН.$$

Из уравнений (3.4) и (3.5):

$$R_{Bx}=R_C\sin\alpha-P=0{,}25\sin 30°-0{,}5=-0{,}375\ кН;$$

$$R_{By}=-R_C\cos\alpha=-0{,}25\cos 30°=-0{,}217\ кН.$$

Из уравнения (3.3):

$$M_A = M + R_{Cy} cos\,\alpha \cdot 3 + R_C \sin\alpha \cdot 4 - P \cdot 2{,}5 = 4 - 0{,}25\cos 30° \cdot 3 +$$
$$+ 0{,}25\sin 30° \cdot 4 - 0{,}5 \cdot 2{,}5 = 2{,}60 \;\; кНм.$$

Чтобы удостовериться в правильности полученного решения, проверим выполнение условия равновесия системы сил (рис. С3*б*) в виде равенства нулю суммы моментов всех сил относительно нового центра – точки *K*:

$$\sum m_K\left(F_i\right) = M_A - M - R_{Ay} \cdot 2 - R_{Ax} \cdot 2 - R_C \sin\alpha \cdot 2 + R_C \cos\alpha \cdot 1 + P \cdot 0{,}5 =$$
$$= 2{,}6 - 4 - \left(-0{,}217\right) \cdot 2 - \left(-0{,}375\right) \cdot 2 - 0{,}25\sin 30° \cdot 2 +$$
$$+ 0{,}25\cos 30° \cdot 1 + 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}01 \cong 0;$$

Давление R_B в шарнире *B* равно реакции связи, т. е.

$$R_B = \sqrt{R_{Bx}^2 + R_{By}^2} = \sqrt{\left(-0{,}375\right)^2 + \left(-0{,}217\right)^2} = 0{,}433\; кН.$$

Ответ:

$M_A = 2{,}60\; кНм;\quad R_C = 0{,}250\; кН;$

$R_{Ax} = -0{,}375\; кН;\quad B_x = -0{,}375\; кН;$

$R_{Ay} = -0{,}217\; кН;\quad B_y = -0{,}217\; кН.$

КИНЕМАТИКА

Задание К1 (Определение скорости и ускорения точки по заданным уравнениям ее движения)

По заданным уравнениям движения точки установить вид ее траектории и для момента времени *t=1 с* найти положение точки на траектории, ее скорость, полное, нормальное и касательное ускорения, а также радиус кривизны траектории. Закон движения точки задан уравнениями $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, где *x* и *y* выражены в сантиметрах, *t* – в секундах.

Необходимые для решения данные для студентов заочной формы обучения приведены в таблице К1.1, а для студентов очной формы – в таблице К1.2.

Зависимость $x = f_1(t)$ указана во втором столбце таблиц, а зависимость $y = f_2(t)$ - в четвертом. Номер зависимости $x = f_1(t)$ выбирается по предпоследней цифре шифра, а $y = f_2(t)$ – по последней.

Указания. Задача К1 относится к кинематике точки и решается с помощью формул, по которым определяются скорость и ускорение точки в декартовых координатах (координатный способ задания движения точки), а также формул, по которым определяются касательное и нормальное ускорения точки.

В данной задаче все искомые величины нужно определить только для момента времени t_1=1 с. В некоторых вариантах задачи при определении траектории или при последующих расчетах (для их упрощения) следует учесть известную из тригонометрии формулу: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Таблица К1.1

Параметры движения точки

№ варианта	*x(t),см*	№ варианта	*y(t), см*
0	$3t^2+2$	0	-4t
1	-3/(t+2)	1	3t+6

2	$-4t^2+1$	2	-3t
3	$7t^2-3$	3	5t
4	-6t	4	$-2t^2-4$
5	$-5t^2-4$	5	3t
6	3t	6	$4t^2+1$
7	-2t+2	7	-2/(t+1)
8	4t+4	8	-4/(t+1)
9	$-2t^2+3$	9	-5t

Таблица К1.2

Параметры движения точки

№ варианта	*x(t),см*	№ варианта	*y(t), см*
0	$5\sin^2(\pi t^2)$	0	$1+3\cos(\pi t^2)$
1	$-5\sin(\pi t^2)$	1	$5\cos(\pi t^2)$
2	$7\sin(\pi t^2)+3$	2	$2-7\cos(\pi t^2)$
3	$6\sin(\pi t^2)-2$	3	$6\cos(\pi t^2)+3$
4	$3-9\sin(\pi t^2)$	4	$9\cos(\pi t^2)+5$
5	$3\sin(\pi t^2)+3$	5	$1+3\cos(\pi t^2)$
6	$-2\sin(\pi t^2)+3$	6	$2\cos(\pi t^2)-2$
7	$3\sin(\pi t^2)+3$	7	$1+3\cos^2(\pi t^2)$
8	$5\sin(\pi t^2)$	8	$5\cos(\pi t^2)$
9	$3\sin(\pi t^2)+3$	9	$1+3\cos(\pi t^2)$

Пример выполнения К1

Исходные данные: Закон движения точки задан уравнениями:

$$x = 5\sin\frac{\pi}{4}t;\ y = 5\cos\frac{\pi}{4}t,$$

где t в секундах, а координаты в метрах. Определить вид траектории и для момента времени t = 1с найти$V_X;\ V_Y;\ V;\ a_X;\ a_Y;\ a;\ a_\tau;\ a_n;\ \rho.$

Решение: Для определения уравнения траектории, возведем в квадрат оба уравнения движения и сложим их:

$$x^2 = 5^2\sin^2\frac{\pi}{4}t$$

$$y^2 = 5^2\cos^2\frac{\pi}{4}t$$

$$x^2 + y^2 = 5^2$$

Это уравнение окружности радиуса R = 5.

При t = 1 с, x = 5·0.707 ≈ 3,5; y = 5·0.707 ≈ 3,5.

Найдем скорость точки:

$$V_X = \dot{x} = \frac{5\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}t$$

$$V_Y = \dot{y} = -\frac{5\pi}{4}\sin\frac{\pi}{4}t$$

$$V = \sqrt{V_X^2 + V_Y^2} = \frac{5\pi}{4} = 4.9 \text{ м/с.}$$

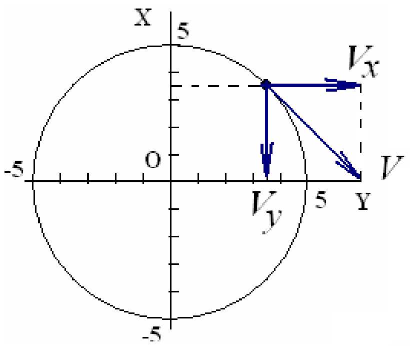


Рис. К1.1. К примеру решения задачи К1. Скорость точки

Изобразим, полученные векторы скоростей на рисунке.
Найдем ускорение точки координатным способом.

$$a_X = \dot{V}_X = \ddot{x} = -\frac{5\pi^2}{16}\sin\frac{\pi}{4}t;$$

$$a_Y = \dot{V}_Y = \ddot{y} = -\frac{5\pi^2}{16}\cos\frac{\pi}{4}t$$

$$a = \sqrt{a_X^2 + a_Y^2} = \frac{5\pi^2}{16} \text{ м/с}^2.$$

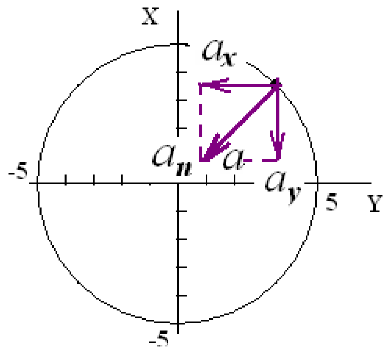


Рис. К1.2. К примеру решения задачи К1. Ускорения точки

Изобразим, полученные векторы ускорений на рисунке.
Найдем ускорение точки в естественных координатах:

$$a_n = \frac{V^2}{\rho} = \frac{5^2\pi^2}{16\cdot 5} = \frac{5\ \pi^2}{16}, \quad a_\tau = \frac{dV}{dt} = 0$$

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = \frac{5\pi^2}{16} \text{ м/с}^2.$$

Ускорения точки, вычисленные разными способами, совпали. Следовательно, решение верно.

Радиус кривизны определяем по формуле

$$\rho = \frac{V^2}{a_n},$$

Таким образом,

$$\rho = \frac{V^2}{a_n} = \frac{\left(\frac{25\pi^2}{16}\right)}{\left(\frac{5\pi^2}{16}\right)} = 5 \text{ м}.$$

Это также подтверждает правильность решения.

Задание К2 (Определение скоростей и ускорений точек тела при поступательном и вращательном движениях)

По заданному уравнению прямолинейного поступательного движения груза 3 определить скорость точки М, а также ее нормальное, касательное и полное ускорения в момент времени, указанный в условии задачи. Необходимые для расчета данные и схемы механизмов приведены в таблицах К2.1 и К2.2.

Таблица К2.1

Законы движения груза

№ варианта	S(t), см	Время t, с	№ варианта	S(t), см	Время t, с
0	$2-5t+10t^2$	3	5	$5t^3+10$	2
1	$2t^3-3t^2+4$	5	6	$5-2t^2+3t^3$	7
2	$6t^3-5t^2$	10	7	$50t^2-10t$	4
3	$3t^3+8t$	10	8	$30t^2+10t$	5
4	$15t-t^2$	5	9	t^3-50t	10

Таблица К2.2

Схемы механизмов

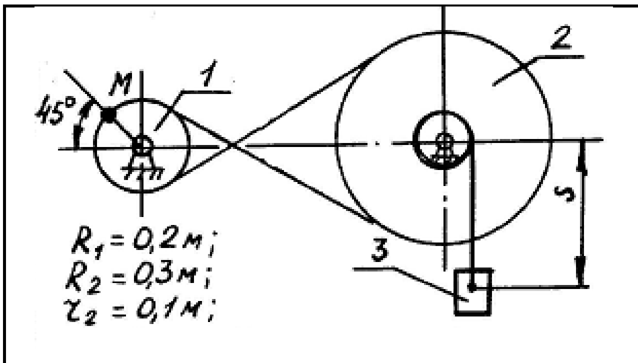


Рис. К2.0

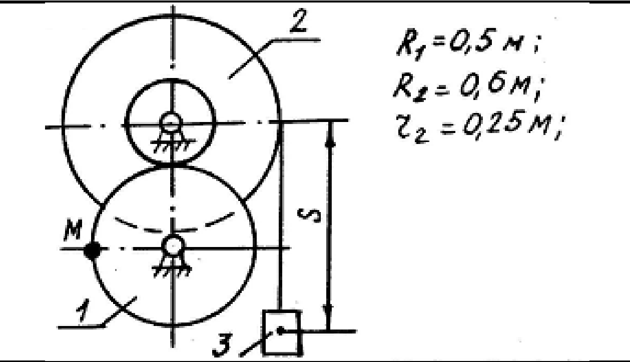


Рис. К2.1

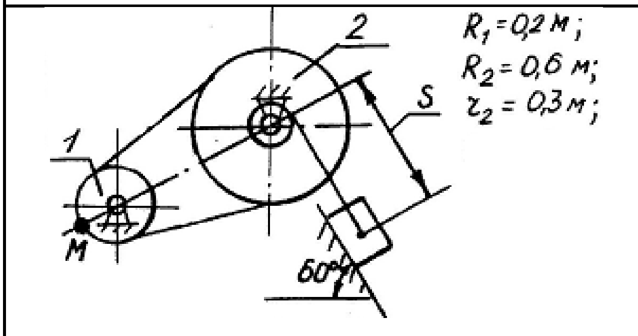


Рис. К2.2

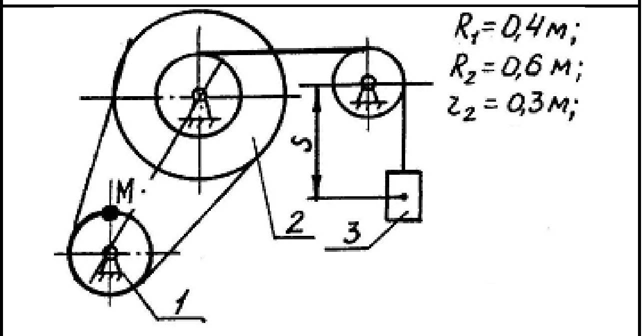


Рис. К2.3

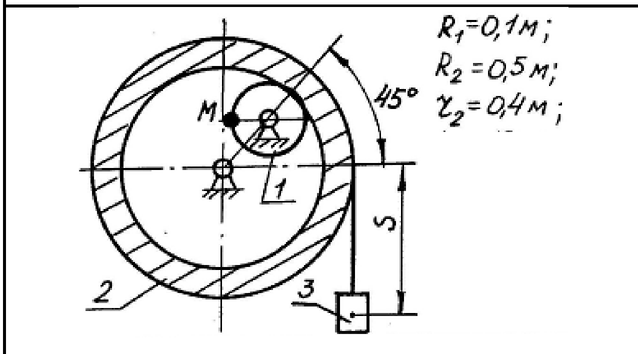


Рис. К2.4

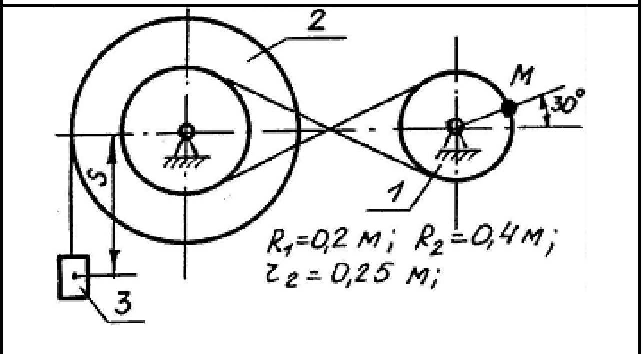


Рис. К2.5

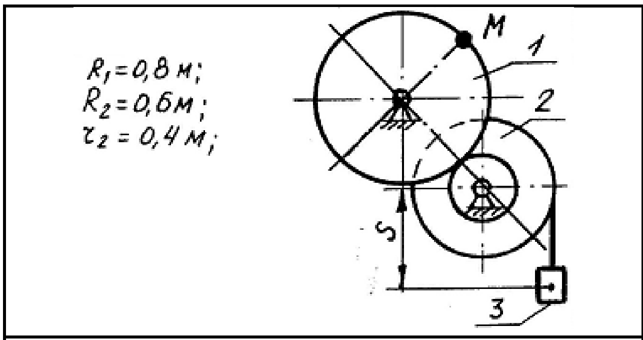


Рис. К2.6

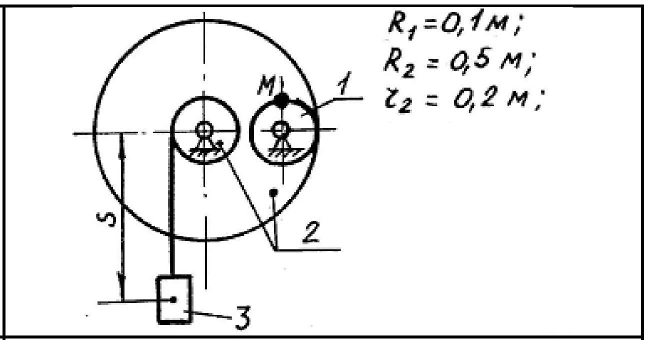


Рис. К2.7

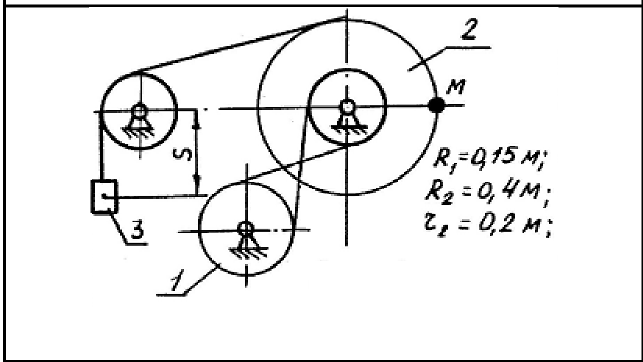


Рис. К2.8

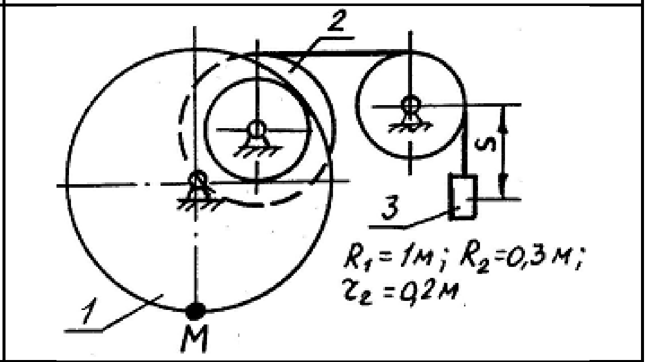


Рис. К2.9

Пример выполнения К2

Исходные данные: На рис. К2*а* показана схема механизма, состоящего из барабана 1, на который наматывается трос, перекинутый через неподвижные блоки 2 и 3. К неподвижному блоку 3 на нить подвешен груз *A*. $\omega = 10 c^{-1}$; $\varepsilon = 20 c^{-2}$; $R = 0,4\ м$, $R_3 = 0,3 м$, $r_3 = 0,2\ м$. Определить скорость *V* и ускорение *a* точки *E* и груза *A*.

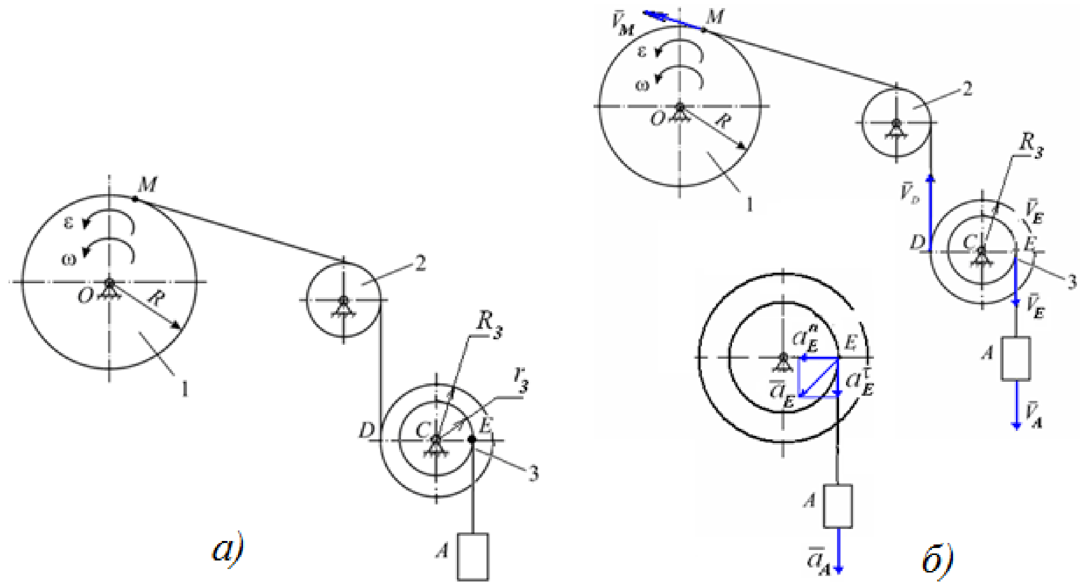


Рис. К2. К примеру решения задачи К2

Решение: Груз *A* движется поступательно вниз. Определим сначала скорость точки *D*, тела, совершающего вращательное движение.

Точка *D* принадлежит нерастяжимой нити, следовательно, на участке нить *MD* скорость всех точек нити по модулю одинакова и равна скорости точки *M* барабана 1, в которой точки троса начинают контактировать с барабаном (точка *M* нити не может перемещаться относительно точки *M* барабана). Следовательно,

$V_D = V_M$.

Скорость точки *D* определена как $V_D = V_M = \omega R = 10 \cdot 0,4 = 4\ м/с$, вектор скорости направлен вверх. Зная скорость точки *D*, можно определить угловую скорость блока 3 и следовательно, определить скорость точки *E*

$$\omega_3 = \frac{V_D}{R_3};\quad V_E = \omega_3 r_3 = \frac{V_D}{R_3} r_3 = \frac{4}{0,3} 0,2 \approx 2,7\ м/с$$

Скорость точки *E* равна скорости нити и соответственно равна скорости груза *A*, $V_A = V_E$.

Ускорение точки *E* складывается из нормального и касательного ускорений

$$a_E = \sqrt{(a_E^n)^2 + (a_E^\tau)^2};$$

$$a_E^n = \frac{V_E^2}{r_3} = \frac{2,7^2}{0,2} = 36,4\ м/с^2;$$

$$a_E^\tau = \frac{dV_E}{dt} = \varepsilon_3 r_3 = \frac{d\left(\dfrac{V_D}{R_3} r_3\right)}{dt} = \frac{r_3}{R_3}\frac{d(\omega R)}{dt} = \frac{R r_3}{R_3}\frac{d\omega}{dt} = \frac{R r_3}{R_3}\varepsilon = 5,3\ м/с^2$$

$$a_E = \sqrt{(36,4)^2 + (5,3)^2} = 36,8\ м/с^2$$

Т.к. точка А движется прямолинейно, то

$$a_A = \frac{dV_A}{dt} = \frac{dV_E}{dt} = a_E^\tau = 36,4 м/с^2$$

Задание К3 (исследование плоскопараллельного движения твердого тела)

Схемы плоских механизмов приведены на рисунках в таблице К3.2, а в таблице К3.1 приведены геометрические размеры и зависимость угла от времени f=f(*t*).

Определить скорости и ускорения точки М для момента времени $t=t_1$ (см. таблицу К3.1).

Дуговые стрелки на рисунках показывают, как при построении чертежа механизма должны откладываться соответствующие углы: по ходу или против хода часовой стрелки.

Построение чертежа начинать со стержня, направление которого определяется углом a; ползун с направляющими для большей наглядности изобразить так, как в примере решения (см. рис. К4б).

Таблица К3.1

Исходные данные

Номер варианта	Размеры звеньев механизма *l*, см	Угол f=f(*t*), рад	Время t_1, с
0	*15*	$2\pi t$	1/6
1	40	πt	1/6
2	10	$3\pi t$	1/12
3	40	πt	1/4
4	60	$2\pi t$	1/6
5	20	$2\pi t$	1/12
6	50	πt	1/6
7	42	$3\pi t$	1/9
8	60	$2\pi t$	1/6
9	60	πt	1/4

Таблица К3.2

Схемы механизмов

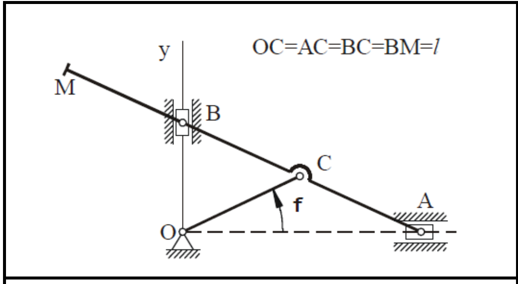


Рис. K3.0

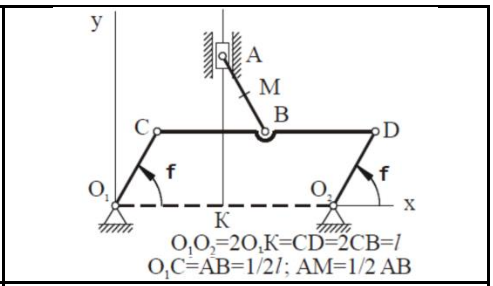


Рис. K3.1

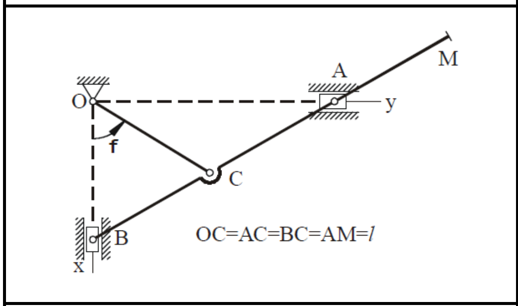


Рис. K3.2

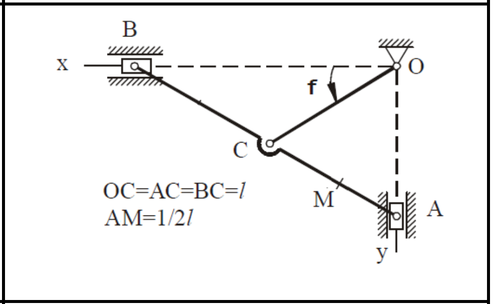


Рис. K3.3

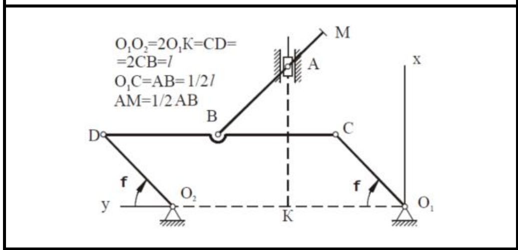


Рис. K3.4

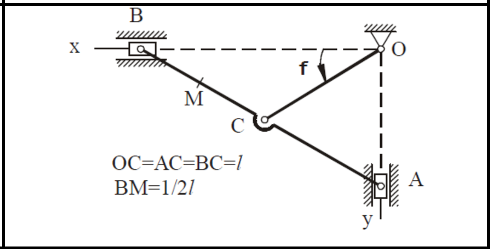


Рис. K3.5

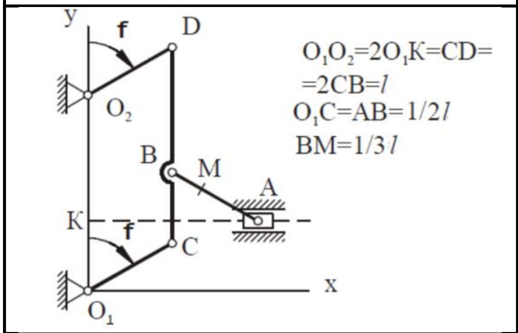


Рис. K3.6

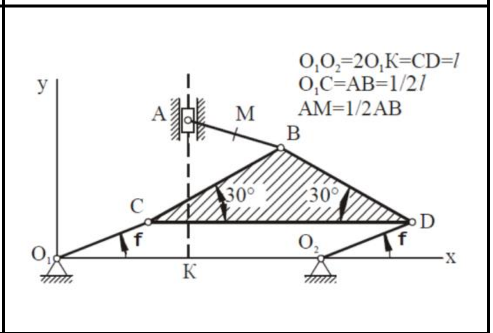


Рис. K3.7

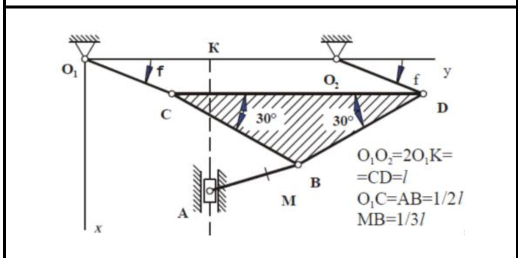


Рис. K3.8

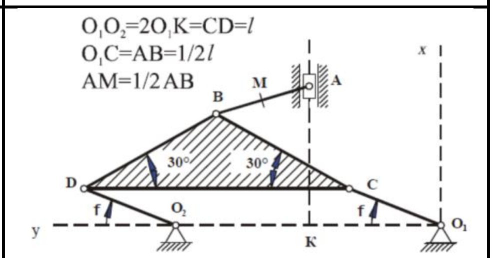


Рис. K3.9

Задание К4 (исследование плоскопараллельного движения твердого тела)

Плоский механизм состоит из стержней *1*, *2*, *3*, *4* и ползуна *B* или *E* (схемы 0-8, таблица К4.3) или из стержней *1*, *2*, *3* и ползунов *B* и *E* (схема 9, таблица К4.3), соединенных друг с другом и с неподвижными опорами O_1, O_2 шарнирами; точка *D* находится в середине стержня *AB*. Длины стержней равны соответственно $l_1=0{,}4$ *м*, $l_2=1{,}2$ *м*, $l_3=1{,}4$ *м*, $l_4=0{,}6$ *м*. Положение механизма определяется углами α, β, γ, φ, θ. Значения этих углов и других заданных величин указаны в табл. К4.1 (для схем 0–4) или в табл. К4.2 (для схем 5–9); при этом в табл. К4.1 ω_1 и ε_1 – величины постоянные.

Определить величины, указанные в таблицах в столбцах «Найти».

Дуговые стрелки на рисунках показывают, как при построении чертежа механизма должны откладываться соответствующие углы: по ходу или против хода часовой стрелки (например, угол у схемы 8 следует отложить от DB по ходу часовой стрелки).

Построение чертежа начинать со стержня, направление которого определяется углом а; ползун с направляющими для большей наглядности изобразить так, как в примере решения (см. рис. К4б).

Заданные угловую скорость и угловое ускорение считать направленными против хода часовой стрелки, а заданные скорость $\vec{v}_B$ и ускорение $\vec{a}_n$ – от точки B к b (на схемах 5–9, таблица К4.3).

Таблица К4.1

к схемам К4.0 – К4.4

Номер условия	Углы, *град*					Дано		Найти			
	α	β	γ	φ	θ	ε_1, $1/c^2$	ω_1, $1/c$	v, точек	ω звена	a точки	ε звена
0	*0*	*60*	*30*	*0*	*120*	6	4	*B, E*	*DE*	*B*	*AB*
1	*90*	*120*	*150*	*0*	*30*	—	—	*A, E*	*AB*	*A*	*AB*
2	*30*	*60*	*30*	*0*	*120*	5	5	*B,E*	*AB*	*B*	*AB*
3	*60*	*150*	*150*	*90*	*30*	—	—	*A,E*	*DE*	*A*	*AB*
4	*30*	*30*	*60*	*0*	*150*	4	6	*D,E*	*AB*	*B*	*AB*
5	*90*	*120*	*120*	*90*	*60*	—	—	*A, E*	*AB*	*A*	*AB*
6	*90*	*150*	*120*	*90*	*30*	*3*	*2*	*B,E*	*DE*	*B*	*AB*
7	*0*	*60*	*60*	*0*	*120*	—	—	*A,E*	*DE*	*A*	*AB*
8	*60*	*150*	*120*	*90*	*30*	*2*	*8*	*D,E*	*AB*	*B*	*AB*
9	*30*	*120*	*150*	*0*	*60*	—	—	*A,E*	*DE*	*A*	*A3*

Таблица К4.2

к схемам К4.5 – К4.9

Номер условия	Углы, *град*					Дано				Найти			
	α	β	γ	φ	θ	ω_1, $1/c$	ε_1, $1/c^2$	v_B, *м/с*	a_B, *м/с*^{2}	v точек	ω звена	a точки	ε звена
0	*120*	*30*	*30*	*90*	*150*	2	4			*B, E*	*AB*	*B*	*AB*
1	*0*	*60*	*90*	*0*	*120*	—	—	4	6	*A, E*	*DE*	*A*	*AB*
2	*60*	*150*	*30*	*90*	*30*	3	5	—	—	*B, E*	*AB*	*B*	*AR*
3	*0*	*150*	*30*	*0*	*60*	—	—	6	8	*A, E*	*AB*	*A*	*AB*
4	*30*	*120*	*120*	*0*	*60*	4	6	—	—	*B, E*	*DE*	*B*	*AB*
5	*90*	*120*	*90*	*90*	*60*	—	—	8	10	*D, E*	*DE*	*A*	*AB*
6	*0*	*150*	*90*	*0*	*120*	5	8		–	*B, E*	*DE*	*B*	*AB*
7	*30*	*120*	*30*	*0*	*60*	—	—	2	5	*A, E*	*AB*	*A*	*AB*
8	*90*	*120*	*120*	*90*	*150*	6	10	—	—	*B, E*	*DE*	*B*	*AB*
9	*60*	*60*	*60*	*90*	*30*	—	—	5	4	*D, E*	*AB*	*A*	*AB*

Таблица К4.3

Схема механизма

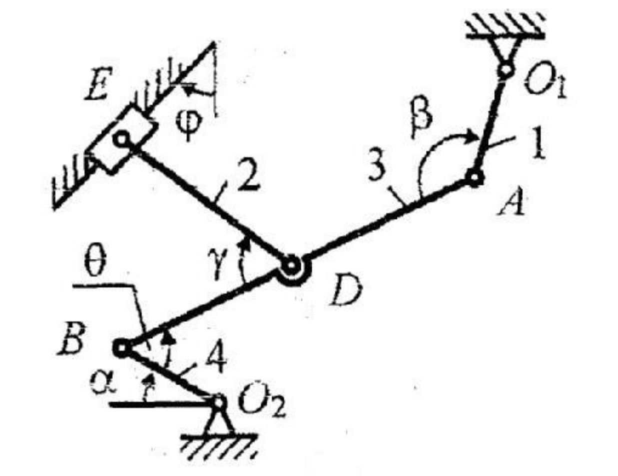


Рис. К4.0

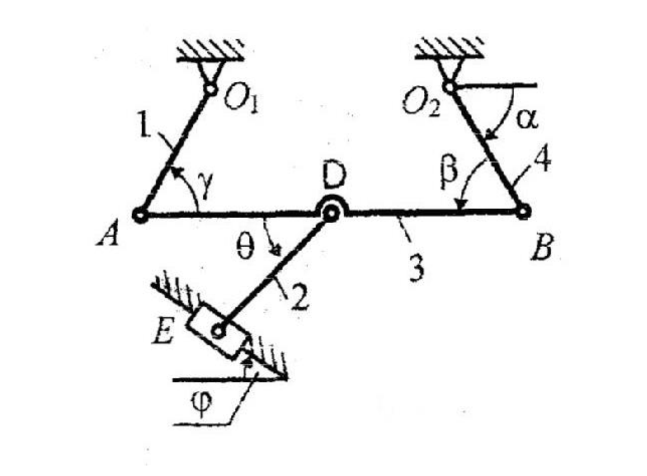


Рис. К4.1

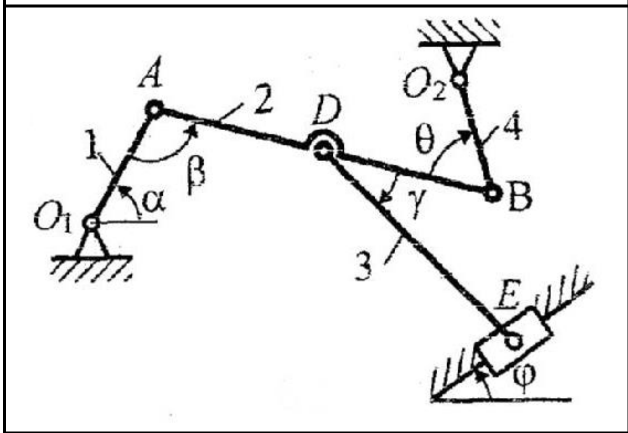


Рис. К4.2

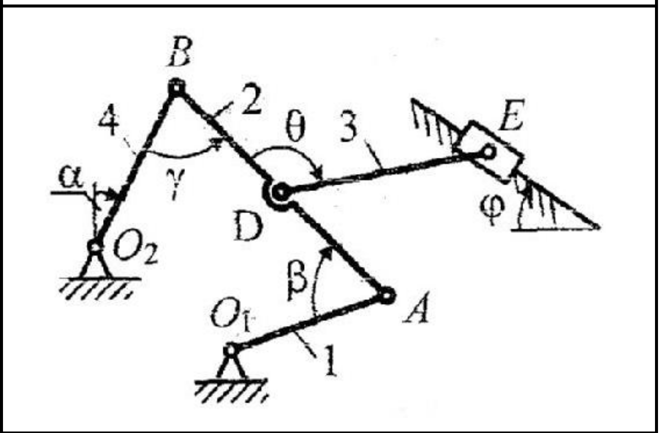


Рис. К4.3

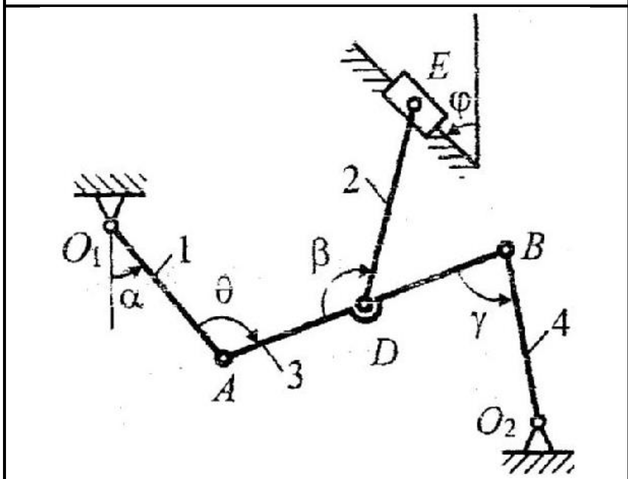


Рис. К4.4

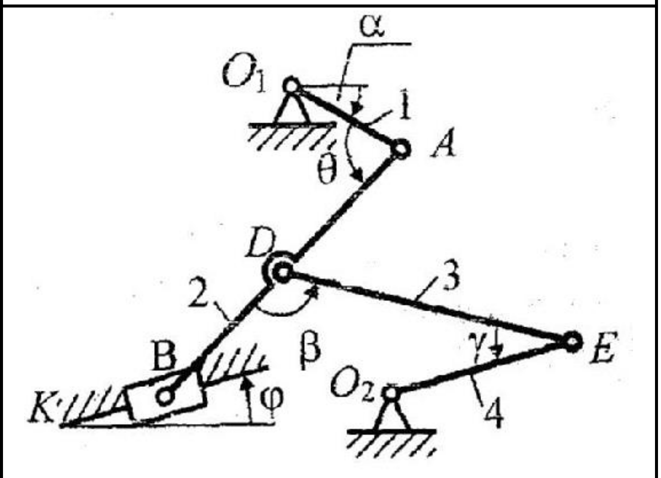


Рис. К4.5

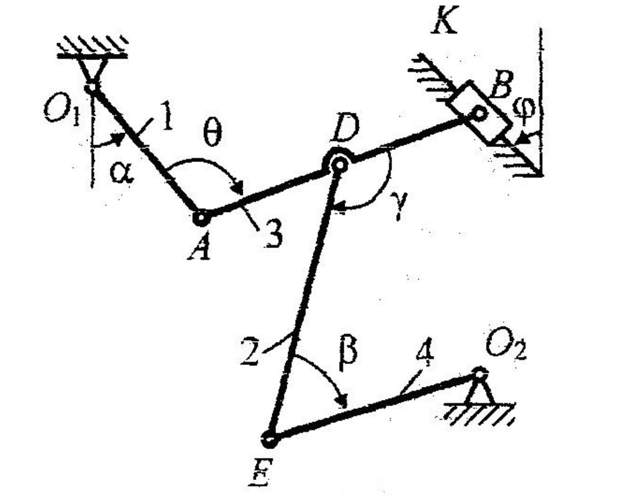


Рис. К4.6

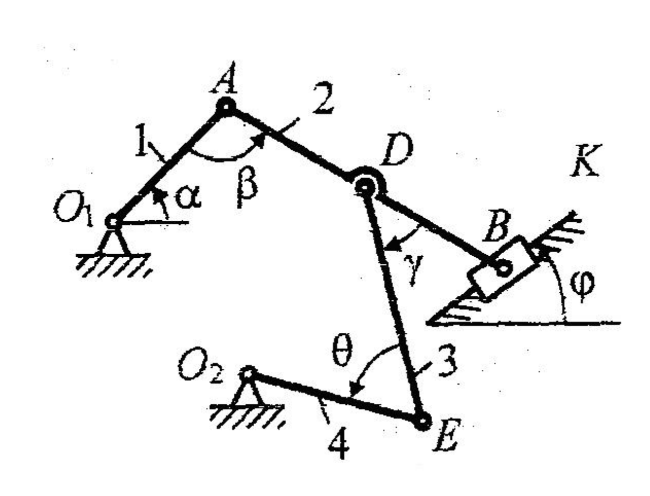


Рис. К4.7

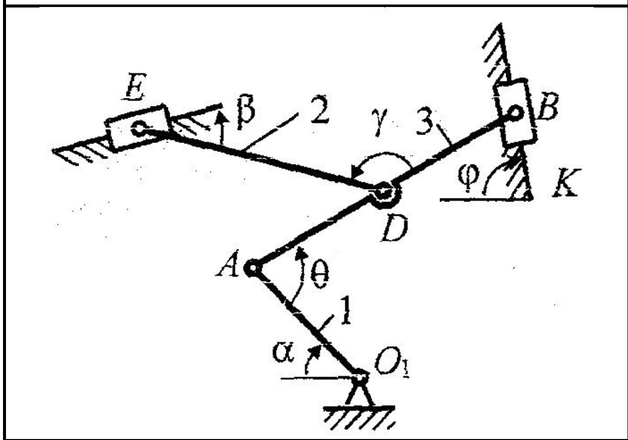


Рис. К4.8

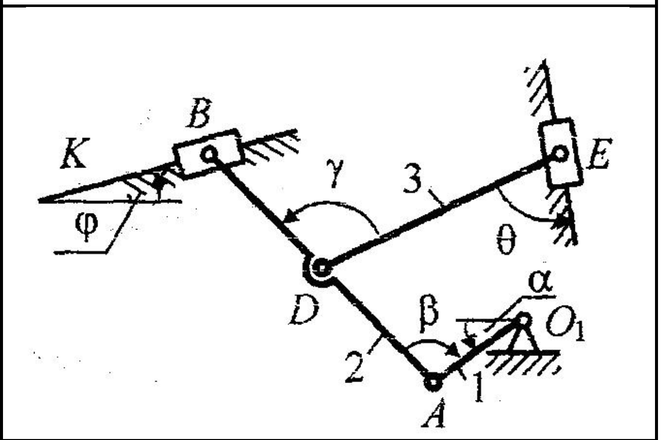


Рис. К4.9

Пример решения К4

Исходные данные: Механизм (рис. 6.1а) состоит из стержней 1, 2, 3, 4 и ползуна В, соединенных друг с другом и с неподвижными опорами O_1 и O_2 шарнирами.

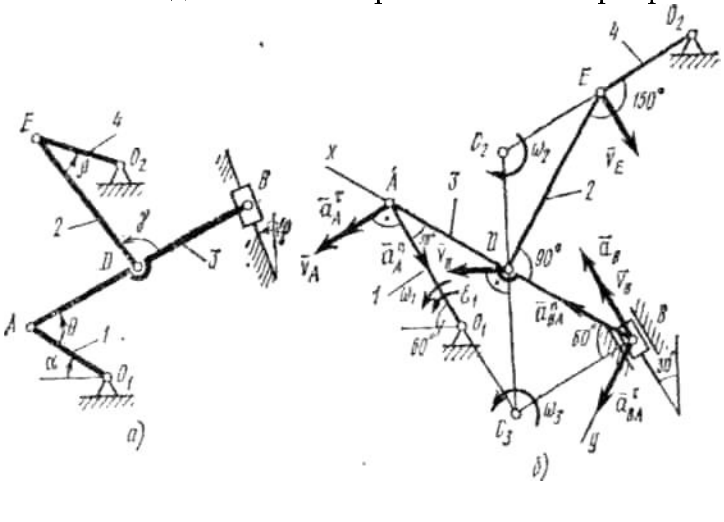


Рис. К4. К примеру решения задач К3 и К4

α=60°, β=150°, γ=90°, φ=30°, θ=30°, AD=DB, $l_1=0{,}4$ *м,* $l_2=1{,}2$ *м,* $l_3=1{,}4$ *м,* $\omega_1=2\ c^{-1}$, $\varepsilon_1=7\ c^{-2}$ (направления ω_1 и ε_1 – против хода часовой стрелки). Определить: v_B, v_A, ω_2, a_B, ε_3.

Решение: Строим положение механизма в соответствии с заданными углами (рис. К4б).

Определяем v_B. Точка B принадлежит стержню AB. Чтобы найти v_B, надо знать скорость какой-нибудь другой точки этого стержня и направление v_A. По данным задачи, учитывая направление ω_1, можем определить; численно

$$v_A = \omega_1 l_1 = 0{,}8 \text{ } м/с; \; v_A \perp O_1A \tag{4.1}$$

Направление v_B найдем, учтя, что точка B принадлежит одновременно ползуну, движущемуся вдоль направляющих поступательно. Теперь, зная v_A и направление v_B, воспользуемся теоремой о проекциях скоростей двух точек тела (стержня AB) на прямую, соединяющую эти точки (прямая AB). Сначала по этой теореме устанавливаем, и какую сторону направлен вектор v_B (проекции скоростей должны иметь одинаковые знаки). Затем, вычисляя эти проекции, находим

$$v_B \cos 30^\circ = v_A \cos 60^\circ \text{ и } v_B = 0{,}46 \text{ } м/с. \tag{4.2}$$

Определяем $\vec{v}_E$. Точка B принадлежит стержню DE. Следовательно, по аналогии с предыдущим, чтобы определить $\vec{v}_E$, надо сначала найти скорость точки D, принадлежащей одновременно стержню AB. Для этого, зная $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$, строим мгновенный центр скоростей (МЦС) стержня AB; это точка C_3, лежащая на пересечении перпендикуляров к $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$, восстановленных из точек A и B (к $\vec{v}_A$ перпендикулярен стержень 1). По направлению вектора $\vec{v}_A$. Определяем направление поворота стержня AB вокруг МЦС C_3. Вектор $\vec{v}_D$ перпендикулярен отрезку C_3D, соединяющему точки D и C_3, и направлен в сторону поворота. Величину v_D найдем из пропорции

$$\frac{v_D}{C_3D} = \frac{v_B}{C_3B} \tag{4.3}$$

Чтобы вычислить C_3D и C_3B, заметим, что ΔAC_3B прямоугольный, так как острые углы в нем равны 30° и 60°, и что $C_3B = AB \sin 30^\circ = 0{,}5AB = BD$. Тогда ΔBC_3D является равносторонним и $C_3B = C_3D$. В результате равенство (6.3) дает

$$v_D = v_B = 0{,}46 \text{ } м/с; \; \vec{v}_D \perp C_3D. \tag{4.4}$$

Так как точка E принадлежит одновременно стержню O_2E, вращающемуся вокруг O_2, то $\vec{v}_E \perp O_2E$. Тогда, восставляя из точек E и D перпендикуляры к скоростям v_E и v_D, построим МЦС C_2 стержня DE. По направлению вектора $\vec{v}_D$ определяем направление поворота стержня DE вокруг центра C_2. Вектор $\vec{v}_E$ направлен в сторону поворота этого стержня. Из рис. К4б видно, что $\angle C_2ED = \angle C_2DE = 30^\circ$, откуда $C_2E = C_2D$. Составив теперь пропорцию, найдем, что

$$\frac{v_E}{C_2E} = \frac{v_D}{C_2D}, \; v_E = v_D = 0{,}46 \text{ } м/с. \tag{4.5}$$

Определяем ω_2. Так как МЦС стержня 2 известен (точка C_2) и

$$C_2D = \frac{l_2}{2\cos 30^\circ} = 0{,}69 \text{ } м \text{ то } \omega_2 = \frac{v_D}{C_2D} = 0{,}67 c^{-2} \tag{4.6}$$

Определяем $\vec{a}_B$. Точка B принадлежит стержню AB. Чтобы найти $\vec{a}_B$, надо знать ускорение какой-нибудь другой точки стержня AB и траекторию точки B. По данным задачи можем определить $\vec{a}_A = \vec{a}_A^\tau + \vec{a}_A^n$, где численно

$$a_A^\tau = \varepsilon_1 l_1 = 2{,}8\ м/с^2;\ a_A^n = \omega_1^2 l_1 = 1{,}6\ м/с^2. \tag{4.7}$$

Вектор $\vec{a}_A^n$ направлен вдоль AO_1, а $\vec{a}_A^\tau$ – перпендикулярно AO_1; изображаем эти векторы на чертеже.

Так как точка B одновременно принадлежит ползуну, то вектор $\vec{a}_B$ параллелен направляющим ползуна. Изображаем вектор $\vec{a}_B$ на чертеже, полагая, что он направлен в ту же сторону, что и $\vec{v}_B$.

Для определения $\vec{a}_B$ воспользуемся равенством

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A^\tau + \bar{a}_A^n + \bar{a}_{BA}^\tau + \bar{a}_{BA}^n. \tag{4.8}$$

Изображаем на чертеже векторы a_{BA}^n (вдоль BA от B к A) и $\vec{a}_{BA}^\tau$ (а любую сторону перпендикулярно BA), численно $a_{BA}^n = \omega_3^2 l_3$. Найдя ω_3 с помощью построенного МЦС C_3 стержня 3, получим

$$\omega_3 = \frac{v_A}{C_3 A} = \frac{v_A}{l_3 \cos 30^\circ} = 0{,}66\ с^{-1}\ \text{и}\ a_{BA}^n = \omega_3^2 l_3 = 0{,}61\ м/с^2. \tag{4.9}$$

Таким образом, у величин, входящих в равенство (8), неизвестны только числовые значения a_B и a_{BA}^τ; их можно найти, спроектировав обе части равенства (8) на какие-нибудь две оси.

Чтобы определить a_B, спроектируем обе части равенства (8) на направление AB (ось x), перпендикулярное неизвестному вектору a_D. Тогда получим

$$a_B \cos 30^\circ = a_A^\tau \cos 60^\circ - a_A^n \cos 30^\circ + a_{BA}^n. \tag{4.10}$$

Подставив в равенство (10) числовые значения всех величин из (7) и (9), найдем, что

$$a_B = 0{,}72\ м/с^2. \tag{4.11}$$

Так как получилось $a_B>0$, то, следовательно, вектор a_B направлен как показано на рис. 6.1б.

Определяем ε_3. Чтобы найти ε_3, сначала определим a_{BA}^τ. Для этого обе части равенства (6.8) спроектируем на направление, перпендикулярное AB (ось у). Тогда получим

$$-a_B \sin 30^\circ = a_A^\tau \sin 60^\circ + a_A^n \sin 30^\circ + a_{BA}^\tau \tag{4.12}$$

Подставив в равенство (12) числовые значения всех величин из (6.11) и (6.7), найдем, что $a_{BA}^\tau = -3{,}58\ м/с^2$. Знак указывает, что направление a_{BA}^τ противоположно показанному на рис. 6.1б.

Теперь из равенства $a_{BA}^\tau = \varepsilon_3 l_3$ получим

$$\varepsilon_3 = \frac{\left|a_{BA}^\tau\right|}{l_3} = 2{,}56\ с^{-2}.$$

Ответ: *v_B=0,46 м/с; v_E=0,46 м/с; ω_2=0,67 с$^{-1}$; a_B=0,72 м/с^2; ε_3=2,50 с$^{-2}$.*

Задание К4 (Определение абсолютной скорости и абсолютного ускорения точки)

Точка *M* движется по закону ОМ=$S_{отн}$=f_1(t) по телу, которое совершает вращательное движение по закону φ=$\varphi_{пер}$=f_2(t). В момент времени t=t_1, указанный в таблице К5.1, необходимо определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки *M*. Законы относительного движения точки и вращения тела приведены в таблице К5.1, а схемы механизмов показаны на рисунках в таблице К5.2.

Таблица К5.1

Исходные данные для расчета

Номер варианта	ОМ=$S_{отн}$, м	φ=$\varphi_{пер}$, рад	R, м	t_1, с
0	R sin(πt/3)	0.5t^2+t	0.2	0.1

1	$-R\sin(\pi t^2/4)$	$6t+4t^2$	0.5	0.25
2	$-R\sin(3\pi t)$	$2t^2+1$	0.3	0.55
3	$-R\sin(\pi t/2)$	$2t^2-3t$	0.45	0.4
4	$-R\sin(2\pi t)$	$0.5t^2+t$	0.1	0.2
5	$R\sin(\pi t/2)$	$0.5t^2$	0.4	0.5
6	$-R\sin(\pi t^2/6)$	$3t^2-8t$	0.55	0.35
7	$R\sin(\pi t/4)$	$4t-t^2$	0.25	0.15
8	$R\sin(\pi t^2/3)$	$3t^2-1$	0.15	0.45
9	$R\sin(\pi t/6)$	$4t-t^2$	0.35	0.3

Таблица К5.2

Схемы механизмов

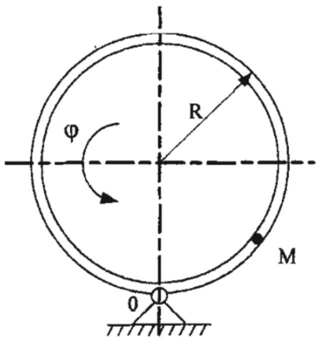


Рис. К5.0

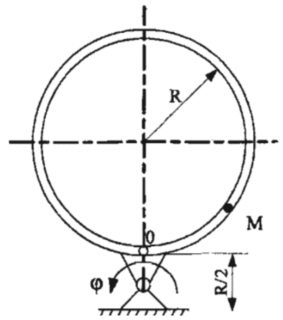


Рис. К5.1

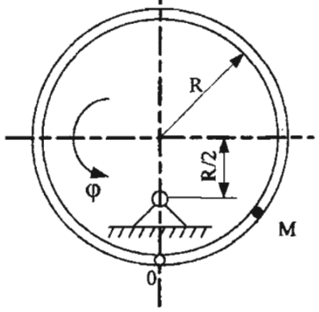


Рис. К5.2

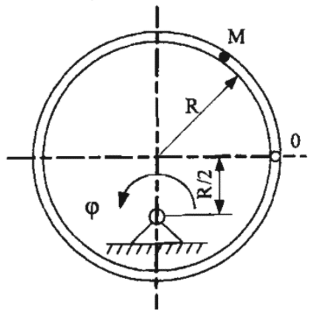


Рис. К5.3

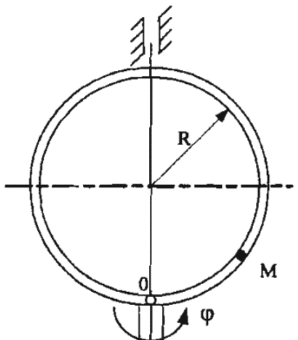


Рис. К5.4

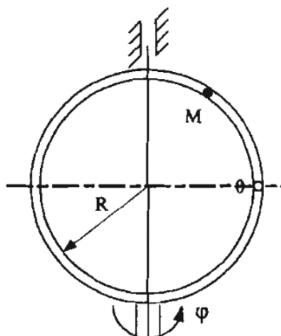


Рис. К5.5

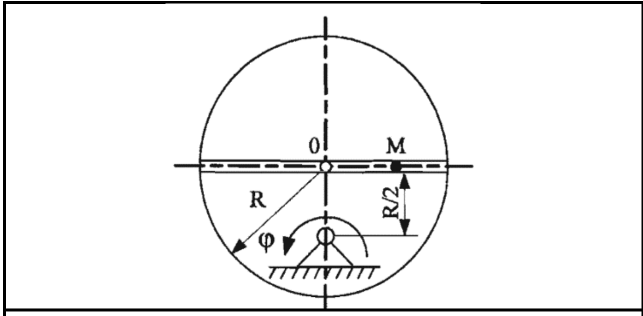


Рис. К5.6

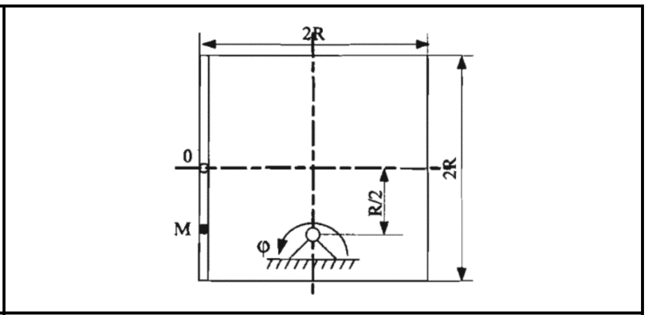


Рис. К5.7

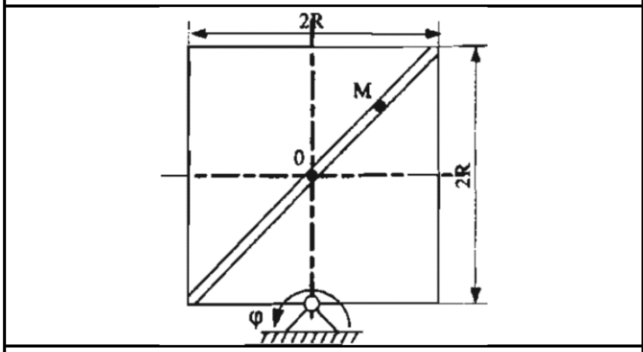


Рис. К5.8

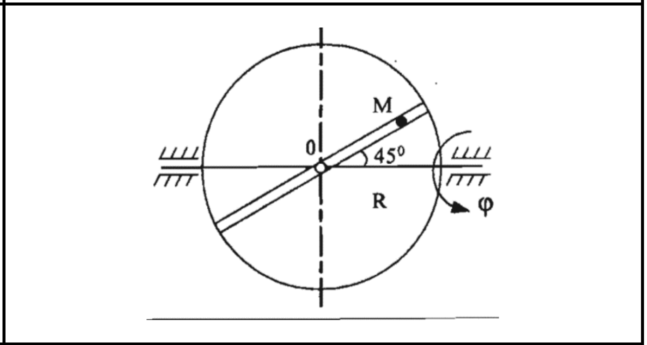


Рис. К5.9

Пример решения К-4

Исходные данные: Шар радиуса R (рис. К5а) вращается вокруг своего диаметра AB по закону $\varphi=f_1(t)$ (положительное направление отсчета угла φ показано на рис. К4, а дуговой стрелкой).

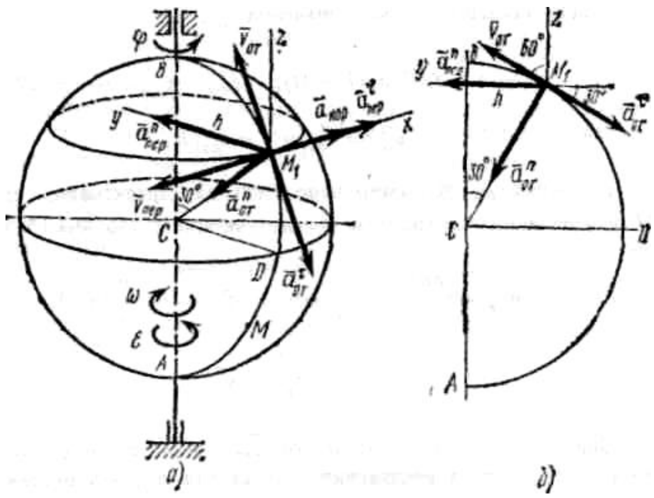


Рис. К5. К примеру решения задачи К5

По дуге большого круга («меридиану») ADB движется точка $M1$ по закону $s = AM = f_2(t)$; положительное направление отсчета s от A к D.R=0,5 м, $\varphi = 2t^3 - 4t^2$, $s = (\pi R/6)(7t - 2t^2)$ (φ – в радианах, s – в метрах, t – в секундах). Определить: v_{ab} и $a_{аб}$ в момент времени t_1=l с.

Решение. Рассмотрим движение точки M как сложное, считая ее движение по дуге ADB относительным *(AB*–относительная траектория точки), а вращение шара – переносным движением. Тогда абсолютная скорость $\bar{v}_{аб}$ и абсолютное ускорение $\bar{a}_{аб}$ точки найдутся по формулам:

$$\bar{v}_{аб} = \bar{v}_{от} + \bar{v}_{пер}, \; \bar{a}_{аб} = \bar{a}_{от} + \bar{a}_{пер} + \bar{a}_{кор}, \tag{1}$$

где, в свою очередь, $\bar{a}_{от} = \bar{a}_{от}^{\tau} + a_{от}^{n}$, $\bar{a}_{пер} = \bar{a}_{пер}^{\tau} + \bar{a}_{пер}^{n}$.

Определим все характеристики относительного и переносного движений.

1. Относительное движение. Это движение происходит по закону

$$s = AM = (\pi R/6)(7t - 2t^2) \qquad (2)$$

Сначала установим, где будет находиться точка М на дуге *ADB* в момент времени t_1. Полагая в уравнении (2) t=1 с, получим

$s_1 = \frac{5}{6}\pi R$. Тогда $\angle ACM = \frac{s_1}{R} = \frac{5}{6}\pi = 150°$

или $\angle BCM = 30°$. Изображаем на рис. К4, а точку в положении, определяемом этим углом (точка M_1).

Теперь находим числовые значения v_{om}, a_{om}^{τ}, a_{om}^{n}:

$$v_{om} = \dot{s} = (\pi R/6)(7t - 4t); \; a_{om}^{\tau} = \dot{v}_{om} = -\frac{2}{3}\pi R;$$

$$a_{om}^{n} = \frac{v_{om}^2}{\rho_{om}} = \frac{v_{om}^2}{R}$$

где ρ_{om} – радиус кривизны относительной траектории, т. е. дуги *ADB.* Для момента времени $t_1 = 1$ *с*, учитывая, что R=0,5 и, получим

$$v_{om} = \frac{\pi R}{6}3 = \frac{\pi}{4}\,м/с; \; a_{om}^{\tau} = -\frac{\pi}{3}\,м/с; \qquad (3)$$

$$a_{om}^{n} = \frac{\pi^2}{8}\,м/с^2.$$

Знаки показывают, что вектор $\bar{v}_{om}$ направлен в сторону положительного отсчета расстояния s, а вектор a_{om}^{τ} – в противоположную сторону; вектор a_{om}^{n} - направлен к центру *С* дуги *ADB.* Изображаем все эти векторы на рис. К4, *а*. Для наглядности приведен рис. К4, б, где дуга *ADB* совмещена с плоскостью чертежа.

2. Переносное движение. Это движение (вращение) происходит по закону $\varphi = 2t^3 - 4t^2$. Найдем угловую скорость *ω* и угловое ускорение *ε* переносного вращения: $\omega = \varphi' = 6t^2 - 8t$, $\varepsilon = \omega' = 12t - 8$ и при t_1=l с.

$$\omega = -2\,c^{-1};\; \varepsilon = 4\,c^{-2}. \qquad (4)$$

Знаки указывают, что при t_1=l с направление *ε* совпадает с направлением положительного отсчета угла *φ*, а направление *ω* ему противоположно; отметим это на рис. К4, а соответствующими дуговыми стрелками.

Для определения $\bar{v}_{пер}$ и $\bar{a}_{пер}$ находим сначала расстояние *h* точки А1, от оси вращения. Получаем $h = R\sin 30° = 0{,}25\,м$. Тогда в момент времени t_1=1 с, учитывая равенства (4), получим:

$$v_{пер} = |\omega| h = 0{,}5\,м/с,\; a_{пер}^{\tau} = \varepsilon h = 1\,м/с^2, \qquad (5)$$

$$a_{пер}^{n} = \omega^2 h = 1\,м/с^2.$$

Изображаем на рис. К4, а векторы $\bar{v}_{пер}$ и $\bar{a}_{пер}^{\tau}$ с учетом направлений *ω* и *ε* и вектор $\bar{a}_{пер}^{n}$ (направлен к оси вращения).

3. Кориолисово ускорение. Так как угол между вектором $\bar{v}_{om}$ и осью вращения (вектором $\bar{\omega}$) равен 60°, то численно в момент времени t_1=1 с (см. равенства (3) и (4))

$$a_{кор} = 2|v_{om}| \cdot |\omega| \sin 60° = 2\frac{\pi}{4}2\frac{\sqrt{3}}{2} = 2{,}72\,м/с^2 \qquad (6)$$

Направление $\bar{a}_{кор}$ найдем, спроектировав вектор $\bar{v}_{от}$ на плоскость, перпендикулярную оси вращения (проекция направлена так же, как вектор $\bar{a}^{\tau}_{пер}$), и повернув затем эту проекцию в сторону ω, т. е. по ходу часовой стрелки, на 90°. Иначе направление $\bar{a}_{кор}$ можно найти, учтя, что $\bar{a}_{кор} = 2(\bar{\omega}\times\bar{v}_{от})$. Изображаем вектор $\bar{a}_{кор}$ на рис. К4, *а*.

Теперь можно вычислить значения $v_{аб}$ и $a_{аб}$.

4. Определение $v_{аб}$. Так как $\bar{v}_{аб} = \bar{v}_{от} + \bar{v}_{пер}$, а векторы $\bar{v}_{от}$ и $\bar{v}_{пер}$ взаимно перпендикулярны (см. рис. К4, *а*), то в момент времени t_1=1 с.

$$v_{аб} = \sqrt{v^2_{от} + v^2_{пер}} = \sqrt{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 + (0,5)^2} = 0,93\,м/с$$

5. Определение $a_{аб}$. По теореме о сложении ускорений

$$\bar{a}_{аб} = \bar{a}^{\tau}_{от} + \bar{a}^{n}_{от} + \bar{a}^{\tau}_{пер} + \bar{a}^{n}_{пер} + \bar{a}_{кор} \tag{7}$$

Для определения $a_{аб}$ проведем координатные оси M_1xyz (см. рис. К4, *а*) и вычислим проекции вектора $\bar{a}_{аб}$ на эти оси. Учтем при этом, что векторы $\bar{a}^{\tau}_{пер}$ и $\bar{a}_{кор}$ лежат на проведенной оси *x*, а векторы $\bar{a}^{\tau}_{от}$, $\bar{a}^{n}_{от}$ и $\bar{a}^{n}_{пер}$ расположены в плоскости дуги *ADB*, т. е. в плоскости M_1yz (см. рис. К4,б). Тогда, проектируя обе части равенства (7) на координатные оси и учтя одновременно равенства (3), (5), (6), получим для момента времени t_1=1.

$$a_{абx} = a^{\tau}_{пер} + a_{кор} = 1 + 2,72 = 3,72\,м/с^2;$$

$$a_{абx} = a^{n}_{пер} + a^{n}_{от}\cos 60° - \left|a^{\tau}_{от}\right|\cos 30° = 1 + \frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi\sqrt{3}}{6} = 0,71\,м/с^2;$$

$$a_{абz} = -\left|a^{\tau}_{от}\right|\cos 60° - a^{n}_{от}\cos 30° = -\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi^2\sqrt{3}}{16}\right) = -1,59\,м/с^2.$$

Отсюда находим значение $a_{аб}$ в момент времени t_1=1 с:

$$a_{аб} = \sqrt{a^2_{абx} + a^2_{абy} + a^2_{абz}} = 4,1\,м/с^2$$

Ответ: $v_{аб}$=0,93 м/с; $a_{аб}$=4,1 м/с^2.

ДИНАМИКА

Задача Д1 (Исследование динамики точки)

Тело движется из точки A по участку AB (длиной l) наклонной плоскости, составляющей угол 20^0 с горизонтом, в течение τ сек. Его начальная скорость V_A. Коэффициент трения скольжения тела по плоскости равен f.

В точке B тело покидает плоскость со скоростью V_B и через T сек попадает со скоростью V_C в точку C. Сопротивление воздуха не учитывать. Найти величины, указанные в таблице Д1.1

Таблица Д1.1

Исходные данные

Номер варианта	*l, м*	*h, м*	V_A, *м/с*	*τ, с*	*f*	Найти	
0	10	-	20	-	0,2	*h*	*τ*
1	-	4	15	-	0,2	*l*	*T*
2	9,8	-	10	3	-	*f*	V_C

3	-	5	-	0,2	0,1	l	V_C
4	5	-	16	-	0,1	V_B	T
5	5	4,5	0	-	0,1	V_C	τ
6	-	10	-	0,2	0,1	l	V_C
7	5	-	10	-	0,1	h	V_C
8	5	-	16	-	0,1	V_B	T
9	-	30	-	0,3	0,1	V_A	V_B

Таблица Д1.2

Схема движения точки

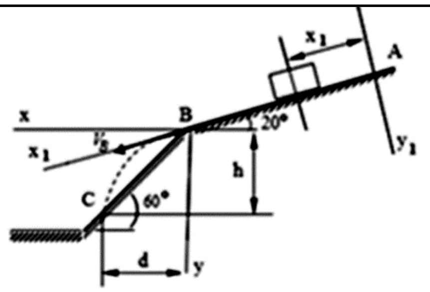


Рис. Д1.0

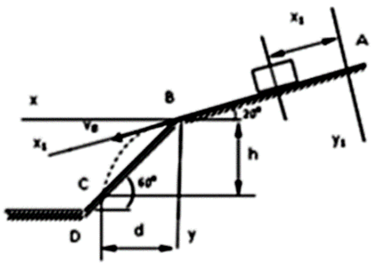


Рис. Д1.1

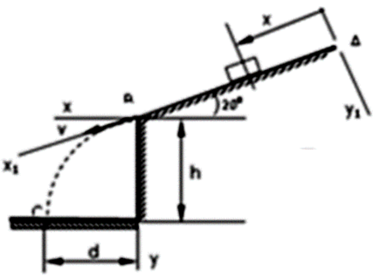


Рис. Д1.2

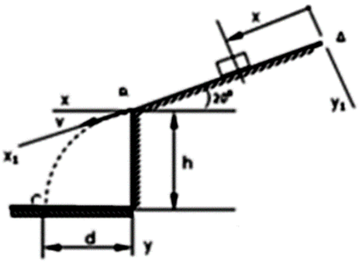


Рис. Д1.3

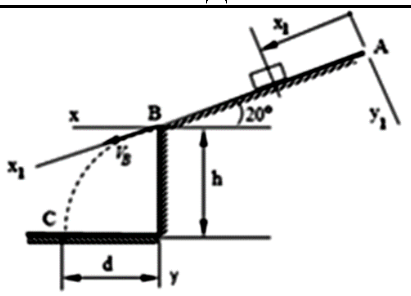


Рис. Д1.4

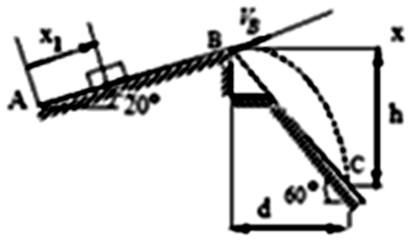


Рис. Д1.5

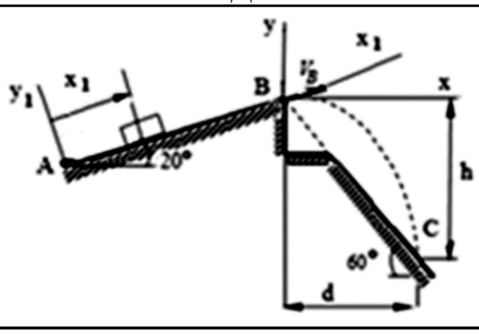


Рис. Д1.6

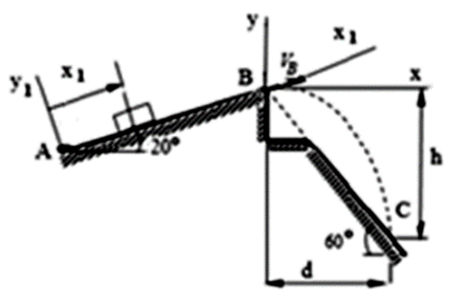


Рис. Д1.7

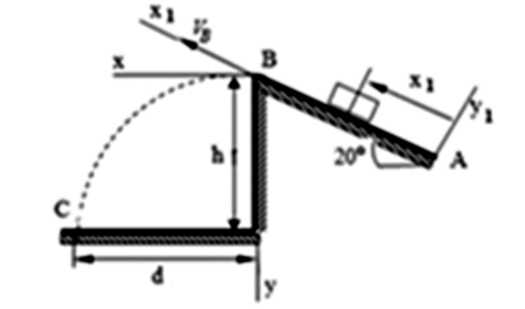


Рис. Д1.8

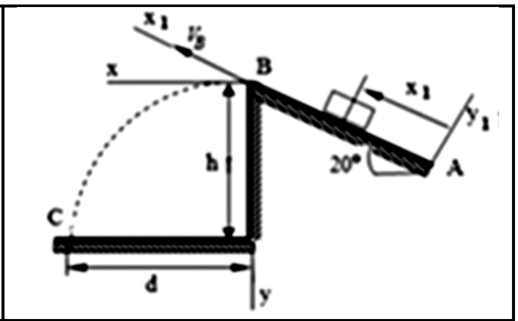


Рис. Д1.0

Пример выполнения задания Д1

Исходные данные: На вертикальном участке *АВ* трубы (рис. Д1) на груз D массой $m=2$ кг действуют сила тяжести и сила сопротивления $R=\mu\cdot V^2$, $\mu=0{,}4$ кг/м; расстояние от точки *А*, где $V=V_0=5$ м/с, до точки *В* равно $l=2{,}5$ м . На наклонном участке *ВС* на груз действуют сила тяжести и переменная сила $F_x=16\cdot\sin(4\cdot t)$, Н. Определить $x=f(t)$ - закон движения груза на участке *ВС*.

Решение: Рассмотрим движение груза на участке *АВ,* считая груз материальной точкой.

На груз действуют сила тяжести $\vec{P}$ и сила сопротивления $\overline{R}$. Составляем дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось Az:

$$m\frac{dV_z}{dt}=\Sigma F_{kz} \text{ или } mV_z\frac{dV_z}{dz}=mg-\mu V_z^2. \qquad (Д1.1)$$

Учтя, что $V_z=V$ и вводя обозначения $k=\mu/m=0{,}2$ м$^{-1}$, $n=mg/\mu=50$ м^2/с^2.

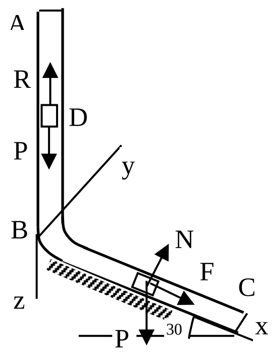


Рис.Д1. К примеру решения задачи Д1

Тогда уравнение (1) можно представить в виде

$$2V\frac{dV}{dz}=-2k(V^2-n)\ . \qquad (Д1.2)$$

Разделяя в уравнении (Д-1.2) переменные, а затем беря от обеих частей интегралы, получим

$$\frac{2VdV}{V^2-n}=-2kdz \text{ и } \ln(V^2-n)=-2kz+C_1 \qquad (Д1.3)$$

По начальным условиям при $z=0$ $V=V_0$, что дает $C_1=\ln(V_0^2-n)$.

Тогда

$$V^2=n+(V_0^2-n)e^{-2kz}. \qquad (Д1.4)$$

Полагая в равенстве (Д-1.4) $z = l = 2.5$ м, определим скорость V_B груза в точке В

$$V_B = 6.4 \text{ м/с}. \qquad (Д1.5)$$

2.Теперь рассмотрим движение груза на участке *BC*; найденная скорость V_B будет для движения на этом участке начальной скоростью ($V_0 = V_B$). На груз в произвольном положении действуют три силы: $\vec{P},\ \vec{N},\ \vec{F}$.

Составим дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось *Bx*:

$$m\frac{dV_x}{dt} = P_x + N_x + F_x, \text{ или } m\frac{dV_x}{dt} = 0.5mg + 16\sin(4t). \qquad (Д1.6)$$

Разделив переменные в (Д-1.6) и проинтегрировав, получим

$$V_x = 5t - 2\cos(4t) + C_2 \qquad (Д1.7)$$

Учитывая, что при $t = 0$ $V_x = V_0 = V_B$, находим $C_2 = V_B + 2\cos 0 = 8.4$.

Так как $V_x = \frac{dx}{dt}$, то (7Д-1) представляет дифференциальное уравнение с разделяющими переменными. После интегрирования его получим

$$x = 2.5t^2 - 0.5\sin(4t) + 8.4t + C_3. \qquad (Д1.8)$$

Так как при $t = 0$ $x = 0$, то $C_3 = 0$ и окончательный искомый закон движения груза будет

$$x = 2.5t^2 + 8.4t - 0.5\sin(4t), \text{ м}$$

Задача Д2 (Использование теоремы об изменении количества движения системы)

Механическая система состоит из прямоугольной вертикальной плиты *1* массой m_1=18 кг, движущейся вдоль горизонтальных направляющих, и груза *D* массой m_2=6 кг (рис. Д2.0–Д2.9, табл. Д2.1). В момент времени t_0=0, когда скорость плиты u_0=2 м/с, груз под действием внутренних сил начинает двигаться по желобу плиты. На рис. 0–3 желоб *КЕ* прямолинейный и при движении груза расстояние *s =AD* изменяется по закону $s = f_1(t)$, а на рис. 4–9 желоб – окружность радиуса *R*=0,8 м и при движении груза угол $\varphi = \angle AC_1D$ изменяется по закону $\varphi = f_2(t)$. В табл. Д5 эти зависимости даны отдельно для рис. 0 и 1, для рис. 2 и 3 и т. д., где s выражено в метрах, *φ* – в радианах, *t* – в секундах.

Считая груз материальной точкой и пренебрегая всеми сопротивлениями, определить величину, указанную в таблице в столбце «Найти», где обозначено: x_1 – перемещение плиты за время от t_0=0 до t_1=1 с; *u,, a,,* N_t – значения в момент времени t_1=l с скорости плиты, ускорения плиты и полной нормальной реакции направляющих соответственно.

Задача Д-2 на применение теорем о движении центра масс и об изменении количества движения системы. Первой теоремой удобнее пользоваться, когда надо найти перемещение (или закон движения) одного из тел системы, движущегося поступательно, а второй – когда надо найти скорость такого тела. При определении ускорения тела или реакции связи тоже удобнее воспользоваться первой теоремой.

Таблица Д2.1

Номер услов ия	$s = f_1(t)$		$\varphi = f_2(t)$			Найти
	схема 0,1	схема 2,3	схема 4,5	схема 6,7	схема 8,9	
0	$0,4(2t^2-1)$	$0,2\left(1-3t^2\right)$	$\frac{\pi}{3}\left(3-2t^2\right)$	$\frac{\pi}{4}\left(1-3t^2\right)$	$\frac{\pi}{3}\left(1-4t^2\right)$	x_1
1	$0,8\cos\left(\frac{\pi}{6}t^2\right)$	$0,4\sin\left(\frac{\pi}{3}t^2\right)$	$\frac{\pi}{3}\left(t^2+1\right)$	$\frac{\pi}{6}\left(t^2-3\right)$	$\frac{\pi}{4}t^2$	u_1

2	$0{,}2\cos\left(\pi t^2\right)$	$1{,}8\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$\frac{\pi}{6}\left(1+2t^2\right)$	$\frac{\pi}{2}t^2$	$\pi\left(2-t^2\right)$	a_1
3	$0{,}5\left(2-3t^2\right)$	$0{,}3\left(6t^2-5\right)$	$\frac{\pi}{3}\left(1-3t^2\right)$	$\frac{\pi}{6}\left(3-4t^2\right)$	$\frac{\pi}{4}\left(5t^2-1\right)$	x_1
4	$0{,}8\sin\left(\frac{\pi}{2}t^2\right)$	$0{,}4\cos\left(\frac{\pi}{2}t^2\right)$	$\frac{\pi}{2}\left(t^2-2\right)$	$\pi\left(2t^2-1\right)$	$\frac{\pi}{4}\left(5t^2-1\right)$	N_1
5	$0{,}6\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$1{,}2\sin\left(\frac{\pi}{6}t^2\right)$	$\frac{\pi}{3}\left(t^2+3\right)$	$\frac{\pi}{6}\left(5-t^2\right)$	$\frac{\pi}{4}\left(t^2-2\right)$	u_1
6	$0{,}2\left(4-7t^2\right)$	$0{,}6\left(1-2t^2\right)$	$\frac{\pi}{6}\left(3+4t^2\right)$	$\frac{\pi}{3}t^2$	$\frac{\pi}{6}\left(3t^2-1\right)$	x_1
7	$1{,}2\cos\left(\frac{\pi}{2}t^2\right)$	$0{,}6\sin\left(\pi t^2\right)$	$\frac{\pi}{3}\left(t^2-4\right)$	$\frac{\pi}{4}\left(5-3t^2\right)$	$\frac{\pi}{2}(t^2+1)$	a_1
8	$0{,}5\sin\left(\pi t^2\right)$	$1{,}8\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$\frac{\pi}{6}\left(t^2+2\right)$	$\frac{\pi}{4}\left(t^2+1\right)$	πt^2	N_1
9	$1{,}2\sin\left(\frac{\pi}{4}t^2\right)$	$0{,}8\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)$	$\frac{\pi}{4}\left(2-t^2\right)$	$\frac{\pi}{6}\left(1-5t^2\right)$	$\frac{\pi}{3}\left(3+t^2\right)$	u_1

Таблица Д2.2

Схемы движения

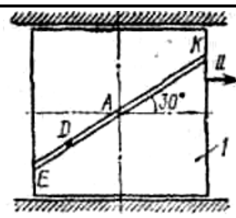


Рис. Д2.0

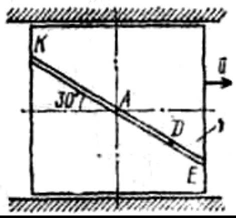


Рис. Д2.1

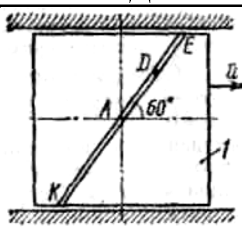


Рис. Д2.2

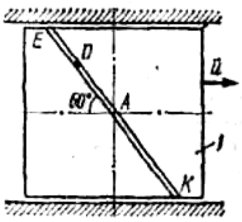


Рис. Д2.3

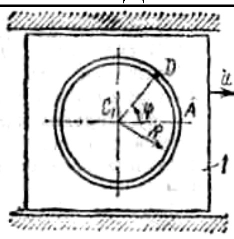


Рис. Д2.4

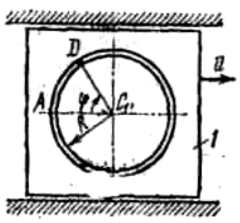


Рис. Д2.5

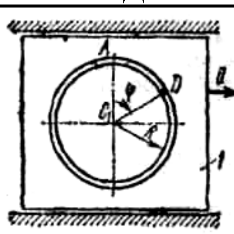


Рис. Д2.6

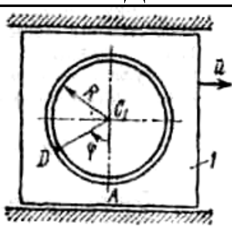


Рис. Д2.7

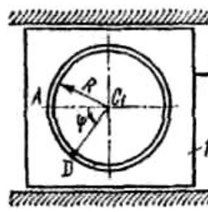
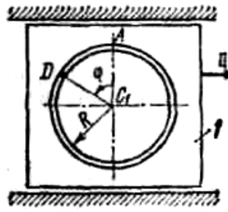
	

Рис. Д2.8	Рис. Д2.9

Пример решения задачи Д2

Исходные данные: В центре тяжести A тележки массой m_1, движущейся по гладкой горизонтальной плоскости, укреплен невесомый стержень AD длиной l с грузом D массой m_2 на конце (рис. Д2*а*). В момент времени t_0=0, когда скорость тележки u_0, стержень AD начинает вращаться вокруг оси A по закону $\varphi = \varphi(t)$.

а *б*

Рис. Д2.1. К примеру решения задачи Д2

m_1= 24 кг, m_2=12 кг, u_0=0,5 м/с, l=0,6 м, $\varphi = (\pi/3)\left(1+2t^3\right)$ *рад* (t – в секундах).

Определить в момент времени t_1=1 с: а) перемещение x_1 тележки (перемещение за время от t_0=0 до t_1=l с); б) ускорение a_1 тележки; в) скорость u_1 тележки; г) полную нормальную реакцию N_1 плоскости.

Решение: Рассмотрим механическую систему, состоящую из тележки н груза D, в произвольном положении. Изобразим действующие на систему внешние силы: силы тяжести Рь *Pг* и реакции плоскости N', N''. Проведем координатные оси Oxy так, чтобы ось y проходила через точку A_0, где находился центр масс тележки в момент времени t_0=0.

а) **Определение перемещения** x_1. Для определения x_1 воспользуемся теоремой о движении центра масс системы. Составим дифференциальное уравнение его движения в проекции на ось x. Получим

$$M\,\ddot{x}_C = \sum F_{kx}^e \text{ или } M\,\ddot{x}_C = 0, \tag{1}$$

так как $\sum F_{kx}^e = 0$, поскольку все действующие на систему внешние силы вертикальны.

Определим значение Mx_C. Из рис. Д2*а* видно, что в произвольный момент времени абсциссы x_A – центра масс тележки и x_D – груза равны соответственно: $x_A = x$, $x_D = x - l\sin\varphi$. Так как по формуле, определяющей координату x_C центра масс системы. $Mx_C = m_1x_A + m_2x_D$, то

$$Mx_C = m_1x + m_2x - m_2t\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}t^3\right) \tag{2}$$

Теперь, проинтегрировав уравнение (1), найдем, что

$$M\,\dot{x}_C = C_1;\; Mx_C = C_1t + C_2 \tag{3}$$

где C_1 и C_2 – постоянные интегрирования. Подставив во второе из этих уравнений значение Mx_C из равенства (2), получим

$$\left(m_1+m_2\right)x-m_2 l\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}t^3\right)=C_1 t+C_2\ . \tag{4}$$

Для определения C_1 и C_2 понадобится еще одно уравнение, которое получим, продифференцировав обе части равенства (4) по времени:

$$(m_1+m_2)\dot{x}-2m_2 l\pi t^2\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}t^2\right)=C_1 \tag{5}$$

где $\dot{x}=u$ – скорость тележки. По начальным условиям при t=0, x=0, $\dot{x}=u_0$. Подставляя эти величины в равенства (4) и (5), найдем, что $C_1=\left(m_1+m_2\right)u_0$, $C_2=-m_2 l\sin\left(\pi/3\right)$. При этих значениях C_1 и C_2 уравнение (4) примет вид

$$(m_1+m_2)x-m_2 l\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}t^3\right)=(m_1+m_2)u_0 t-m_2 l\sin\frac{\pi}{3}$$

Отсюда получаем зависимость от времени координаты x, определяющей одновременно перемещение тележки;

$$x=u_0 t+\frac{m_2 l}{m_1+m_2}\left[\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}t^3\right)-\sin\frac{\pi}{3}\right]. \tag{6}$$

Полагая здесь t=1 с, найдем искомое перемещение x_1. Ответ: x_1=0,33 м.

б) **Определение ускорения** a_1. Проделав те же рассуждения и выкладки, что и в предыдущем примере, получим уравнение (1) и формулу (2). Для определения a_1 продифференцируем дважды по времени обе части равенства (2). Получим

$$M\,\dot{x}=(m_1+m_2)\dot{x}-2m_2 l\pi t^2\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}t^3\right);$$

$$M\,\ddot{x}=(m_1+m_2)\ddot{x}-4m_2 l\pi t\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}t^3\right)+4m_2 l\pi t^4\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}t^3\right),$$

где $\ddot{x}=a$ – ускорение тележки. Но согласно уравнению (1) $M\,\ddot{x}=0$; в результате находим следующую зависимость a от времени:

$$a=\frac{m_2 l}{m_1+m_2}\left[4\pi\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}t^3\right)-4\pi^2 t^4\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}t^3\right)\right].$$

Полагая здесь t=1 с, определим искомое ускорение a_1. Ответ: a_1=–2,51 м/с^2. Знак минус указывает, что ускорение тележки направлено влево.

в) **Определение скорости** u_1. Чтобы определить u_1, воспользуемся теоремой об изменении количества движения системы $\overline{Q}$ в проекции на ось x. Так как все действующие на систему внешние силы вертикальны (рис. Д2*б*), то $\sum F_{kx}^e=0$ и теорема дает

$$\frac{dQ_x}{dt}=\sum F_{kx}^e=0\text{, откуда } Q_x=C_1\ . \tag{1}$$

Для рассматриваемой механической системы $\overline{Q}=\overline{Q}^T+\overline{Q}^D$, где $\overline{Q}^T=m_1\overline{u}$ и $\overline{Q}^D=m_2\overline{v}_D$ – количества движения тележки и груза D соответственно ($\overline{u}$ – скорость тележки, $\overline{v}_D$ – скорость груза по отношению к осям Oxy). Тогда из равенства (1) следует, что

$$Q_x^T+Q_x^D=C_1\text{, или } m_1 u_x+m_2 v_{Dx}=C_1 \tag{2}$$

Для определения v_{Dx} рассмотрим движение груза D как сложное, считая его движение по отношению к тележке относительным (это движение, совершаемое при вращении стержня AD вокруг оси A), а движение самой тележки – переносным. Тогда $\overline{v}_D=\overline{v}_D^{пер}+\overline{v}_D^{от}$ и

$$v_{Dx} = v_{Dx}^{пер} + v_{Dx}^{от}. \tag{3}$$

Но $\bar{v}_D^{пер} = \bar{u}$ и, следовательно, $v_{Dx}^{пер} = u_x$. Вектор $\bar{v}_D^{от}$ направлен перпендикулярно стержню и численно $v_D^{от} = l\omega_{AD} = l\dot{\varphi} = 2l\pi t^2$.

Изобразив этот вектор на рис. Д2*б* с учетом знака $\dot{\varphi}$, найдем, что $v_{Dx}^{от} = -v_D^{от}\cos\varphi$. Окончательно из равенства (3) получим

$$v_{Dx} = u_x - v_D^{от}\cos\varphi = u_x - 2l\pi t^2\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}t^3\right). \tag{4}$$

(В данной задаче величину v_{Dx} можно еще найти другим путем, определив абсциссу x_D груза *D*, для которой, как видно из рис. Д2*а*, получим $x_D = x - l\sin\varphi$; тогда $v_{Dx} = \dot{x}_D - l\cos\varphi\dot{\varphi}$, где $\dot{x} = u_x$, а $\dot{\varphi} = 2\pi t^2$).

При найденном значении v_{Dx} равенство (2), если учесть, что $u_x = u$, примет вид

$$m_1 u + m_2 u - m_2 2l\pi t^2\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}t^3\right) = C_1 \tag{5}$$

Постоянную интегрирования C_1 определим по начальным условиям: при t=0 $u=u_0$. Подстановка этих величин в уравнение (5) дает $C_1 = (m_1 + m_2)u_0$ и тогда из (5) получим

$$m_1 u + m_2 u - m_2 2l\pi t^2\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}t^3\right) = (m_1 + m_2)u_0$$

Отсюда находим следующую зависимость скорости к тележки от времени:

$$u = u_0 + \frac{2l\pi m_2}{m_1 + m_2}t^2\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}t^3\right) \tag{6}$$

Положив в уравнении (6) $t=l$ с, определим искомую скорость u_1. Ответ: u_1=–0,76 м/с. Знак минус указывает, что скорость тележки направлена влево.

г) **Определение реакции** N_1. Для определения N_1 воспользуемся теоремой о движении центра масс системы. Составим дифференциальное уравнение его движения в проекции на ось *у* (см. рис. Д2*а*):

$$M\ddot{y}_C = \sum F_{ky}^e \text{ или } M\ddot{y}_C = N' + N'' - P_1 - P_2. \tag{1}$$

Отсюда, полагая $N' + N'' = N$, получим

$$N = M\ddot{y}_C + P_1 + P_2. \tag{2}$$

Из формулы, определяющей ординату y_C центра масс системы, $My_C = m_1 y_A + m_2 y_D$, где y_A и y_D – соответственно ординаты центра масс *А* тележки и груза *D*. В нашем случае $y_A = A_0O = const$, $y_D = A_0O - l\cos\varphi$. Тогда

$$My_C = (m_1 + m_2)A_0O - m_2 l\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}t^3\right).$$

Продифференцировав обе части этого равенства два раза по времени, получим

$$M\dot{y}_C = 2m_2 l\pi t^2\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}t^3\right);$$

$$M\ddot{y}_C = 4m_2 l\pi t\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}t^3\right) + 4m_2 l\pi t^4\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}t^3\right).$$

Подставив найденное выражение $M\ddot{y}_C$ в уравнение (2), получим зависимость *N* от *t*:

$$N = 4m_2 l\pi t\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}t^3\right) + 4m_2 l\pi^2 t^4\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}t^3\right) + (m_1 + m_2)g.$$

Полагая здесь t=1 с, найдем искомую реакцию N_1. Ответ: N_1=68,9 Н.

Задача Д3 (Использование теоремы об изменении кинетической энергии)

Механическая система состоит из грузов *1* и *2*, ступенчатого шкива *3* с радиусами ступеней R_3=0,3 м, r_3=0,1 м и радиусом инерции относительно оси вращения ρ_3=0,2 м, блока *4* радиуса R_4=0,2 м и катка (или подвижного блока) *5* (рис. Д3.0–Д3.9, табл. Д3.1); тело *5* считать сплошным однородным цилиндром, а массу блока *4*–равномерно распределенной по ободу. Коэффициент трения грузов о плоскость f=0,1. Тела системы соединены друг с другом нитями, перекинутыми через блоки и намотанными на шкив 3 (или на шкив и каток); участки нитей параллельны соответствующим плоскостям. К одному из тел прикреплена пружина с коэффициентом жесткости c.

Под действием силы $F = f(s)$, зависящей от перемещения s точки ее приложения, система приходит в движение из состояния покоя; деформация пружины в момент начала движения равна нулю. При движении на шкив *3* действует постоянный момент *M* сил сопротивления (от трения в подшипниках).

Определить значение искомой величины в тот момент времени, когда перемещение *s* станет равным s_1=0,2 м. Искомая величина указана в столбце «Найти» таблицы, где обозначено: v_1, v_2, v_{c5} – скорости грузов *1, 2* и центра масс тела *5* соответственно, ω_3 и ω_4 – угловые скорости тел *3* и *4*.

Все катки, включая и катки, обмотанные нитями (как, например, каток 5 на рис. 1), катятся по плоскостям без скольжения.

На всех рисунках не изображать груз *2*, если $m_2 = 0$; остальные тела должны изображаться и тогда, когда их масса равна нулю.

Указания. Задача Д4 – на применение теоремы об изменении кинетической энергии системы. При решении задачи учесть, что кинетическая энергия *T* системы равна сумме кинетических энергий всех входящих в систему тел; эту энергию нужно выразить через ту скорость (линейную или угловую), которую в задаче надо определить. При вычислении *T* для установления зависимости между скоростями точек тела, движущегося плоскопараллельно, или между его угловой скоростью и скоростью центра масс воспользоваться мгновенным центром скоростей (кинематика). При вычислении работы надо все перемещения выразить через заданное перемещение s_1, учтя, что зависимость между перемещениями здесь будет такой же, как между соответствующими скоростями.

Таблица Д3.1

Исходные данные

Номер условия	m_1, кг	m_2, кг	m_3, кг	m_4, кг	m_5, кг	c, Н/м	М, Н·м	$F = f(s)$, Н	Найти
0	0	6	4	0	5	200	1,2	80(4+5s)	ω_3
1	8	0	0	4	С	320	0,8	50(8+3s)	v_1
2	0	4	6	0	5	240	1,4	60(6+5s)	v_2
3	0	6	0	5	4	300	1,8	80(5+6s)	ω_4
4	5	0	4	0	6	240	1,2	40(9+4s)	v_1
5	0	5	0	6	4	200-	1,6	50(7+8s)	v_{C6}
6	8	0	5	0	6	280	0,8	50(7+8s)	ω_3
7	0	4	0	6	5	300	1,5	50(7+8s)	v_2
8	4	0	0	5	6	320	1,4	50(9+2s)	ω_4
9	0	5	6	0	4	280	1,6	80(6+7s)	v_{C5}

Таблица Д3.2

Схемы механической системы

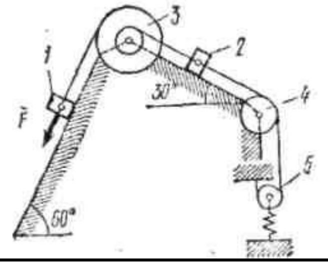
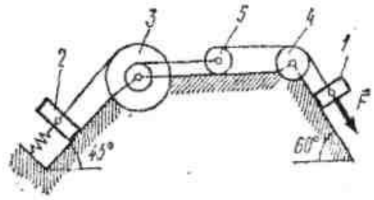
	

Рис. Д3.0	Рис. Д3.1

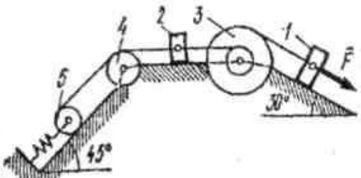
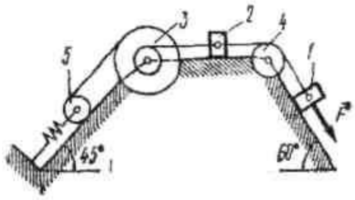

	

Рис. Д3.2	Рис. Д3.3

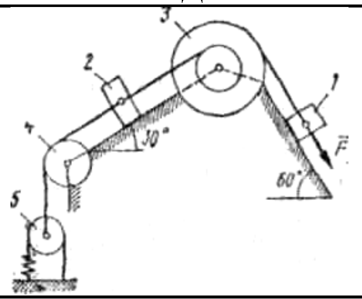
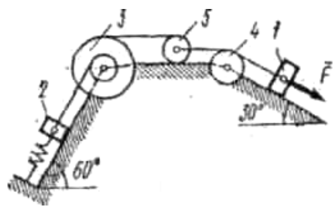

	

Рис. Д3.4	Рис. Д3.4

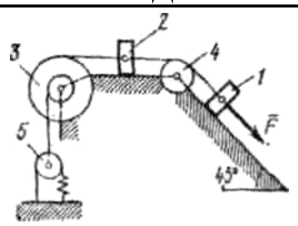
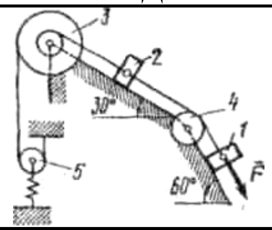

	

Рис. Д3.6	Рис. Д3.7

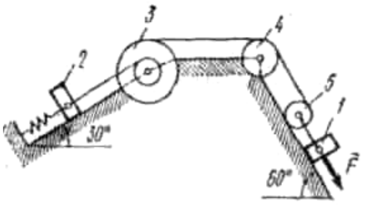
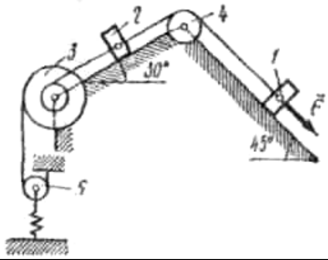

	

Рис. Д3.8	Рис. Д3.9

Пример решения задачи Д3

Исходные данные: Механическая система (рис. Д3*а*) *состоит* из сплошного однородного цилиндрического катка *1*, подвижного блока *2*, ступенчатого шкива *3* с радиусами ступеней R_3 и r_3 и радиусом инерции относително оси вращения ρ_3, блока *4* и груза *5*

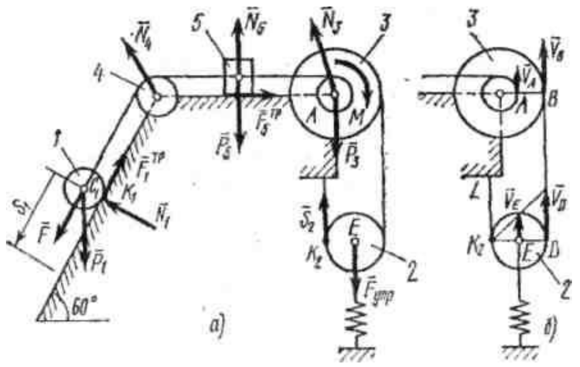


Рис. Д3. К примеру решения задачи Д3

(коэффициент трения груза о плоскость равен f). Тела системы соединены нитями, намотанными на шкив *3*. К центру *E* блока *2* прикреплена пружина с коэффициентом жесткости *c*; ее начальная деформация равна нулю.

Система приходит в движение из состояния покоя под действием силы $F=f(s)$, зависящей от перемещения *s* точки ее приложения. На шкив *3* при движении действует постоянный момент М1 сил сопротивления.

Дано: m_1=8 кг, m_2=0, m_3=4 кг, m_4=0, m_3=10 кг, R_3=0,3 м, r_3=0,1 м, ρ_3=0,2 м, f=0,1, c=240 Н/м, M=0,6 Н·м, $F = 20(3+2s)\,H$, s_1=0,2 м.

Определить: ω_3 в тот момент времени, когда $s=s_1$.

Решение. 1. Рассмотрим движение неизменяемой механической системы, состоящей из весомых тел *1*, *3*, *5* и невесомых тел *2*, *4*, соединенных нитями. Изобразим действующие на систему внешние силы: активные $\overline{F}$, $\overline{F}_{упр}$, $\overline{P}_1$, $\overline{P}_3$, $\overline{P}_5$, реакции $\overline{N}_1$, $\overline{N}_3$, $\overline{N}_4$, $\overline{N}_5$, натяжение нити $\overline{S}_2$, силы трения $\overline{F}_1^{тр}$, $\overline{F}_5^{тр}$ и момент M.

Для определения ш3 воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии

$$T - T_0 = \sum A_k^e \,. \tag{1}$$

2. Определяем T_0 и T. Так как в начальный момент система находилась в покое, то T_0=0. Величина T равна сумме энергий всех тел системы:

$$T = T_1 + T_3 + T_5 \tag{2}$$

Учитывая, что тело *1* движется плоскопараллельно, тело *5* – поступательно, а тело *3* вращается вокруг неподвижной оси, получим

$$T_1 = \frac{1}{2}m_1 v_{C1}^2 + \frac{1}{2}I_{C1}\omega_1^2;$$

$$T_3 = \frac{1}{2}I_3\omega_3^2,\; T_5 = \frac{1}{2}m_5 v_5^2 \tag{3}$$

Все входящие сюда скорости надо выразить через искомую ω_3. Дли этого предварительно заметим, что $v_{C1} = v_5 = v_A$, где *A* – любая точка обода радиуса r_3 шкива *3* и что точка K_1 – мгновенный центр скоростей катка *1*, радиус которого обозначим r_1. Тогда

$$v_{C1} = v_5 = \omega_3 r_3;\; \omega_1 = \frac{v_{C1}}{K_1C_1} = \frac{v_{C1}}{r_1} = \omega_3\frac{r_3}{r_1} \tag{4}$$

Кроме того, входящие в (3) моменты инерции имеют значения

$$I_{C1} = 0{,}5 m_1 r_1^2;\; I_3 = m_3\rho_3^2\,. \tag{5}$$

Подставив все величины (4) и (5) в равенства (3), а затем, используя равенство (2), получим окончательно

$$T = \left(\frac{3}{4}m_1 r_3^2 + \frac{1}{2}m_3\rho_3^2 + \frac{1}{2}m_2 r_3^2\right)\omega_3^2\,. \tag{6}$$

3. Теперь найдем сумму работ всех действующих внешних сил при том перемещении, которое будет иметь система, когда точка C_1 пройдет путь s_1. Введя обозначения: s_5 – перемещение груза 5 $(s_5=s_1)$, φ_3 – угол поворота шкива *3,* λ_0 и λ_1 – начальное и конечное

удлинения пружины, получим

$$A\left(\overline{F}\right)=\int_0^{s_1}20(3+2s)ds=20(3s_1+s_1^2)$$

$$A\left(\overline{P}_1\right)=P_1s_1\sin 60^\circ$$

$$A\left(\overline{F}_5^{mp}\right)=-F_5^{mp}s_5=-fP_5s_1;$$

$$A(M)=-M\varphi_3;\ A\left(\overline{F}_{ynp}\right)=\frac{c}{2}\left(\lambda_0^2-\lambda_1^2\right).$$

Работы остальных сил равны нулю, так как точки K_1 и K_2, где приложены силы $\overline{N}_1$, $\overline{F}_1^{mp}$ и $\overline{S}_2$ –мгновенные центры скоростей; точки, где приложены $\overline{P}_3$, $\overline{N}_3$ и $\overline{P}_4$ неподвижны; а реакция $\overline{N}_5$ перпендикулярна перемещению груза.

По условиям задачи λ_0=0. Тогда $\lambda_1 = s_E$, где s_E – перемещение точки *E* (конца пружины). Величины s_E и φ_3 надо выразить через заданное перемещение s_1; для этого учтем, что зависимость между перемещениями здесь такая же, как и между соответствующими скоростями. Тогда, поскольку $\omega_3=v_A/r_3=v_{C1}/r_3$ (равенство $v_{C1}=v_A$ уже отмечалось), то и $\varphi_3=s_1/r_3$.

Далее, из рис. Д4, б видно, что $v_D=v_B=\omega_3R_3$, а так как точка K_2 является мгновенным центром скоростей для блока 2 (он как бы «катится» по участку нити K_2L), то $v_B=0{,}5v_D=0{,}5\omega_3R_3$; следовательно, и $\lambda_1=s_E=0{,}5\,\varphi_3R_3=0{,}5s_1R_3/r_3$. При найденных значениях φ_3 и λ_1 для суммы всех вычисленных работ получим

$$\sum A_K^e=20(3s_1+s_1^2)+P_1s_1\sin 60^\circ-fP_5s_1-M\frac{s_1}{r_3}-\frac{c}{8}\frac{R_3^2}{r_3^2}s_1^2. \qquad (7)$$

Подставляя выражения (6) и (7) в уравнение (1) и учитывая, что T_0=0, придем к равенству

$$\left(\frac{3}{4}m_1r_3^2+\frac{1}{2}m_3\rho_3^2+\frac{1}{2}m_5r_3^2\right)\omega_3^2=20(3s_1+s_1^2)+P_1s_1\sin 60^\circ-fP_5s_1-\frac{M}{r_3}s_1-\frac{c}{8}\frac{R_3^2}{r_3^2}s_1^2. \qquad (8)$$

Из равенства (8), подставив в него числовые значения заданных величин, найдем искомую угловую скорость ω_3. Ответ: ω_3 =8,1 с$^{-1}$.

Задание Д4 (Применение принципа Даламбера к определению реакций связей)

На механическую систему действует (таблица Д4.2) пара сил с движущим моментом *M* (или движущая сила *P*) и момент сил сопротивления M_C. Передача вращения осуществляется за счет сил трения. Колеса движутся без проскальзывания. Известны массы всех звеньев системы, а также большие *R* и малые *r* радиусы окружностей всех колес. Колеса считать сплошными однородными дисками. Необходимо определить реакции в шарнирах механизма в момент времени t_1. В условии задан либо величина движущего момента (движущей силы), либо закон движения ведущего звена. В вариантах №1; 4; 7 механизм расположен в горизонтальной плоскости, в остальных вариантах – в вертикальной плоскости.

Таблица Д4.1

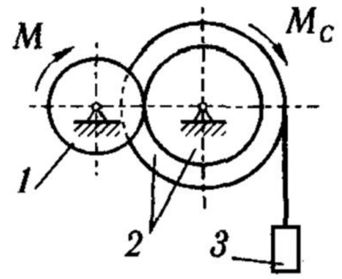
Исходные данные

Номер варианта	m_1, *кг*	m_2, *кг*	m_3, *кг*	M_c, *Нм*	t_1, *с*
0	100	300	500	1000	2
1	10	15	2	1	1.5
2	15	30	60	150	1

3	200	200	400	500	2
4	10	20	15	5	0.5
5	100	100	300	80	1
6	200	200	40	500	0.5
7	100	50	30	400	2
8	100	200	400	400	0.5
9	60	60	100	400	1

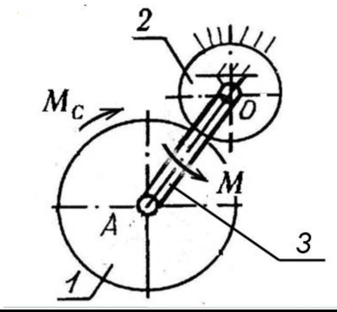
Таблица Д4.2

Схемы механизмов



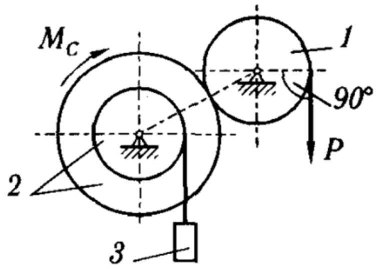
R_1=0,2 м
R_2=0,6 м
r_2=0,4 м
M=2000 Нм

Рис. Д4.0



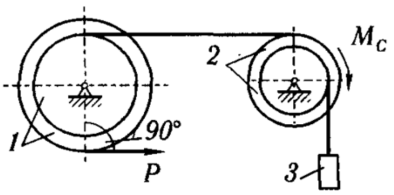
R_1=0,2 м
R_2=0,6 м
M=10 Нм

Рис. Д4.1



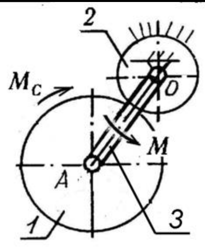
R_1=0,3 м
R_2=0,3 м
r_2=0,2 м
P=600 Н

Рис. Д4.2



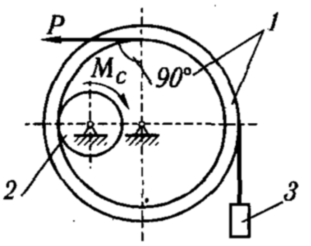
R_1=0,6 м
R_2=0,3 м
r_1=0,4 м
r_2=0,2 м
P=600 Н

Рис. Д4.3



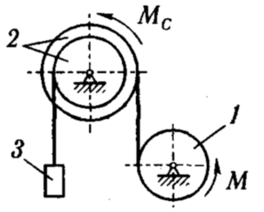
$R_1=0,4$ *м*
$R_2=0,2$ *м*
$\varphi_{OA}=\pi t^4/8$ *рад*

Рис. Д4.4



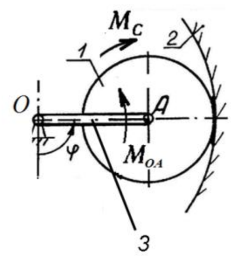
$R_1=0,8$ *м*
$R_2=0,2$ *м*
$r_1=0,6$ *м*
$P=6000$ *Н*

Рис. Д4.5



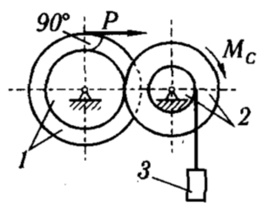
$R_1=0,3$ *м*
$R_2=0,3$ *м*
$r_2=0,2$ *м*
$M=1000$ *Нм*

Рис. Д4.6



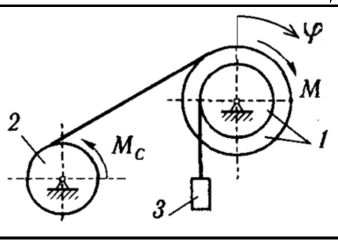
$R_1=0,2$ *м*
$R_2=0,9$ *м*
$\varphi_{OA}=\pi t^4/4$ *рад*

Рис. Д4.7



$R_1=0,6$ *м*
$R_2=0,3$ *м*
$r_1=0,4$ *м*
$r_2=0,2$ *м*
$P=3000$ *Н*

Рис. Д4.8



$R_1=0,8$ *м*
$R_2=0,1$ *м*
$r_1=0,5$ *м*
$\varphi=\pi(t^2-4)$ *рад*

Рис. Д4.9

Пример решения задачи Д4

Исходные данные: Дифференциальный механизм движется в горизонтальной плоскости под действием пары сил с моментом М, приложенного к водилу *ОА* и технологической пары сил с моментом сопротивления M_C, приложенного к колесу 1.

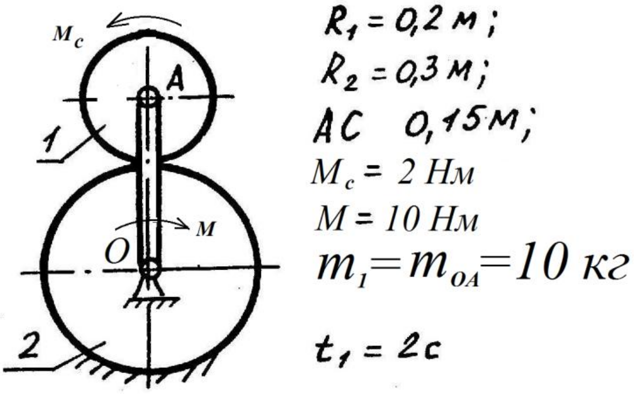


Рис. Д4.1 К примеру решения задачи Д4

Определить реакции в шарнирах *O* и *A* в момент времени t_1 после начала движения из состояния покоя. Сопротивлением трения качения пренебречь.

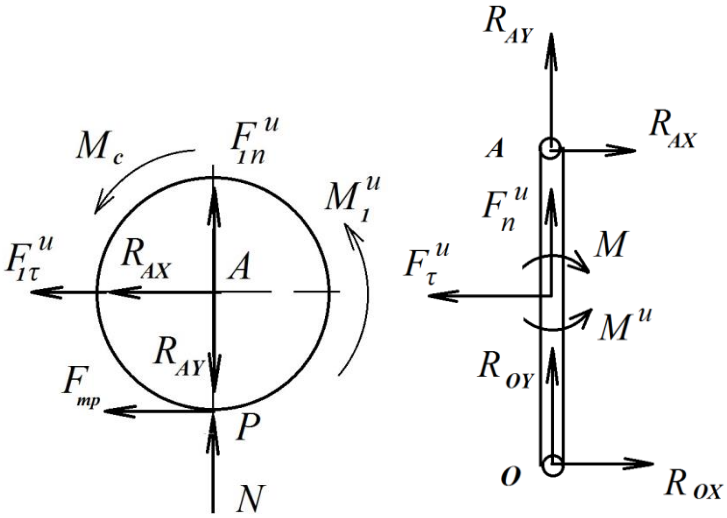


Рис.Д4.2. К примеру решения задачи Д4. Силы реакции и силы инерции

Решение: Воспользуемся принципом Даламбера. Рассмотрим по отдельности звенья *OA* и 2. Присоединим ко всем активным силам реакциям опор силы инерции.

Составим уравнения равновесия.

$$\Sigma F_X = 0 \; : \; R_{AX} - F_\tau^u + R_{OX} = 0 \tag{4.1}$$

$$\Sigma F_Y = 0: \; R_{AY} - F_n^u + R_{OY} = 0 \tag{4.2}$$

$$\Sigma M_O = 0 \; : \; M^u - M - R_{AX}(R_1 + R_2) + F_\tau^u \frac{(R_1 + R_2)}{2} = 0 \tag{4.3}$$

$$\Sigma F_X = 0 \; : \; -R_{AX} - F_{1\tau}^u - F_{mp} = 0 \tag{4.4}$$

$$\Sigma F_Y = 0: \; N - R_{AY} + F_{1n}^u = 0 \tag{4.5}$$

$$\Sigma M_A = 0 \; : \; M_1^u + M_C - F_{mp} R_1 = 0 \tag{4.6}$$

Для передачи движения без пробуксовки должно выполняться условие $N \geq cF_{mp} / f$.Здесь с –коэффициент запаса сцепления $1{,}25 < c < 3$. Примем *c*=2.

Умножим уравнение (4.4) на R_1 из уравнения 12.6. $M_1^u + M_C + R_{AX} R_1 + F_{1\tau}^u R_1 = 0$.

Затем полученное уравнение помножим на (R_1 + R_2) . а уравнение (4.3) на R_1 и сложим эти уравнения.

$$M_1^u(R_1 + R_2) + M_C(R_1 + R_2) + F_{1\tau}^u R_1(R_1 + R_2) + M^u R_1 - MR_1 + F_\tau^u \frac{(R_1 + R_2)}{2} R_1 = 0 \text{ или}$$

$$M_1^u + F_{1\tau}^u R_1 + M^u R_1/(R_1+R_2) + \frac{F_\tau^u}{2} R_1 = -M_C - MR_1/(R_1+R_2) \qquad (4.7)$$

Учитывая, что колесо 1 совершает плоское движение и то что в точке соприкосновения колес находится мгновенный центр скоростей, определим скорость шарнира *A*, $V_A = \omega_1 R_1$. Тогда угловая скорость водила *OA* $\omega = \frac{V_A}{(R_1+R_2)}$, угловое ускорение $\varepsilon = \dot{\omega} = \frac{\varepsilon_1 R_1}{(R_1+R_2)}$.

Учтем, что $M_1^u = J_1\varepsilon_1 = \frac{mR_1^2}{2}\varepsilon_1$, $M^u = J_{OA}\varepsilon = \frac{m(R_1+R_2)^2}{12}\varepsilon$, $F_\tau^u = ma_\tau = m\varepsilon\frac{R_1+R_2}{2}$ и $F_{1\tau}^u = ma_{1\tau} = m\varepsilon_1(R_1+R_2)$.

Подставляем полученные соотношения в уравнение (4.7) и находим угловое ускорение.

$$J_1\varepsilon_1 + m_1\varepsilon_1(R_1+R_2)R_1 + J_{OA}\frac{\varepsilon_1 R_1^2}{(R_1+R_2)^2} + m\frac{\varepsilon_1 R_1^2}{4} = -M_C(R_1+R_2) + MR_1/(R_1+R_2)$$

$$\varepsilon_1 = \frac{-M_C + MR_1/(R_1+R_2)}{J_1 + m_1(R_1+R_2)R_1 + J_{OA}\frac{R_1^2}{(R_1+R_2)^2} + \frac{mR_1^2}{4}}$$

$$\varepsilon_1 = \frac{-M_C + MR_1/(R_1+R_2)}{\frac{mR_1^2}{2} + m_1(R_1+R_2)R_1 + \frac{m(R_1+R_2)^2}{12}\frac{R_1^2}{(R_1+R_2)^2} + \frac{mR_1^2}{4}}$$

$$\varepsilon_1 = \frac{-2+10\cdot 0{,}2/0{,}5}{\frac{10\cdot 0{,}04}{2} + 10\cdot 0{,}5\cdot 0{,}2 + \frac{10\cdot 0{,}25}{12}\frac{0{,}04}{0{,}25} + \frac{10\cdot 0{,}04}{4}} = \frac{2}{1{,}33} = 1{,}5c^{-2}$$

Определим угловую скорость колеса в момент времени 2 с, $\omega_1 = \varepsilon_1 t = 1{,}5\cdot 2 = 3c^{-1}$.

Определим скорость шарнира *A*, $V_A = \omega_1 R_1 = 3\cdot 0{,}2 = 0{,}6\, м/с$.

Тогда угловая скорость водила *OA* $\omega = \frac{V_A}{(R_1+R_2)} = \frac{0{,}6}{0{,}5} = 1{,}2c^{-1}$, угловое ускорение

$$\varepsilon = \dot{\omega} = \frac{\varepsilon_1 R_1}{(R_1+R_2)} = \frac{1{,}5\cdot 0{,}2}{0{,}5} = 0{,}6c^{-2}.$$

Определим все силы инерции и подставим их в уравнения равновесия.

$$F_\tau^u = ma_\tau = m\varepsilon\frac{R_1+R_2}{2} = 10\cdot 0{,}6\cdot 0{,}25 = 1{,}5H$$

$$F_{1\tau}^u = ma_{1\tau} = m\varepsilon_1(R_1+R_2) = 10\cdot 1{,}5\cdot 0{,}5 = 7{,}5H$$

$$F_n^u = m\omega^2\frac{R_1+R_2}{2} = 10\cdot 1{,}44\cdot 0{,}25 = 3{,}6H$$

$$F_{1n}^u = m\omega_1^2(R_1+R_2) = 10\cdot 9\cdot 0{,}5 = 45H$$

$$M_1^u = J_1\varepsilon_1 = \frac{mR_1^2}{2}\varepsilon_1 = \frac{10\cdot 0{,}04}{2}1{,}5 = 0{,}3\,Нм$$

$$M^u = J_{OA}\varepsilon = \frac{m(R_1+R_2)^2}{12}\varepsilon = \frac{10\cdot 0{,}25}{12}0{,}36 = 0{,}75\,Нм$$

Решая систему уравнений равновесия получим

$$R_{AX} = -F_{1\tau}^{u} = 7{,}5 H$$

$$R_{AY} = F_{1n}^{u} = 45\ H$$

$$R_{OX} = R_{AX} - F_{\tau}^{u} = 7{,}5 - 1{,}5 = 6\ H$$

$$R_{OY} = -R_{AY} + F_{n}^{u} + = 45 - 3{,}6 = 41{,}4\ H$$

4. Вопросы к экзамену

1. Основные понятия, аксиомы статики.
2. Разложение силы на составляющие; проекции силы на оси, на плоскость.
3. Несвободное тело. Принцип освобождаемости от связей. Виды связей и их реакции.
4. Приведение сходящихся сил к равнодействующей, условия их равновесия.
5. Сложение параллельных сил, пара сил.
6. Момент силы, аналитическое выражение момента силы относительно декартовых осей.
7. Главный момент системы сил. Момент пары.
8. Лемма Пуансо о переносе силы. Приведение системы сил к главному вектору и главному моменту.
9. Условия равновесия произвольной системы сил.
10. Теорема Вариньона о моменте равнодействующей и её следствия. Условия равновесия плоской системы сил.
11. Устойчивость при равновесии. Трение скольжения, качения, верчения.
12. Правило вычисления момента силы относительно оси.
13. Равновесие пространственных систем сил.
14. Центр параллельных сил. Центр тяжести объёма, площади, линии.
15. Три способа определения движения.
16. Скорость точки и при координатном и естественном способах задания движения.
17. Вектор ускорения, разложение его на декартовы и естественные оси.
18. Поступательное движение твёрдого тела.
19.Вращение тела вокруг неподвижной оси. Скорости и ускорения точек вращающегося тела.
20. Преобразования простейших движений. Передаточное число редуктора с неподвижными осями.
21. Плоское движение твёрдого тела.
22. Теорема о существовании МЦС, способы его определения.
23.Теорема Шаля, МЦВ.
24. Ускорение точки в плоском движении.
25.Сложное движение точки. Теорема о сложении переносной и относительной скоростей.
26. Сложное движение точки. Теорема о сложении переносной и относительной скоростей.
27. Составное движение твёрдого тела. Сложение вращений относительно пересекающихся и параллельных осей.
29. Сферическое и свободное движения твёрдого тела. Мгновенная ось вращения.
30. Теорема о равенстве проекций скоростей точек тела на прямую, проходящую через эти точки.
31. Аксиомы Галилея-Ньютона. Дифференциальное уравнение движения материальной точки.
32. Свободные колебания, учёт сопротивления среды, вынужденные колебания.
33. Резонанс, способы его устранения.
34. Динамика относительного движения, принцип относительности в классической механике.
35. Общие теоремы динамики механической системы.
36. Центр масс. Классификация сил, действующих на точки механической системы. Теорема о движении центра масс. Закон сохранения движения центра масс.
37. Теорема об изменении количества движения механической системы.
38. Закон сохранения количества движения.
39. Теорема об изменении кинетического момента, закон его сохранения.
40. Дифференциальное уравнение вращательного движения тела.
41. Осевые моменты инерции твёрдого тела.
42. Теорема Гюйгенса о моментах инерции относительно параллельных осей.

43. Работа силы, работа момента пары. Мощность. КПД.
44. Теорема Кёнига о кинетической энергии механической системы.
45. Теорема об изменении кинетической энергии в дифференциальной и интегральной формах.
46. Принцип возможных перемещений.
47. Главный вектор и главный момент сил инерции. Принцип Даламбера.

5. Литература

Список основной литературы

1. Теоретическая механика / Белов М.И., Палаев Б.В. - 2-е изд. - М.:ИЦ РИОР НИЦ ИНФРА-М, 2017 - 336 с.

Список дополнительной литературы

1. Теоретическая механика. Сборник задач: Учебное пособие / М.Н. Кирсанов. - М.: НИЦ ИНФРА-М, 2015. - 430 с.
2. Решения задач по теоретической механике: Учебное пособие / М.Н. Кирсанов. - М.: НИЦ ИНФРА-М, 2015. - 216 с
3. Бать М.И. Теоретическая механика в примерах и задачах: учеб. пособие. Т.1: Статика и кинематика / М.И. Бать, Г.Ю. Джанелидзе, А.С. Кельзон. ─ 11-е изд., стер. ─ СПб.: Изд-во "Лань", 2010. ─ 669 с.
4. Бать М.И. Теоретическая механика в примерах и задачах: учеб. пособие .Т.2: Динамика / М.И. Бать, Г.Ю. Джанелидзе, А.С. Кельзон. ─ 9-е изд., стер. ─ СПб.: Изд-во "Лань", 2010. ─ 638 с.
5. Бутенин Н.В. Курс теоретической механики: учеб. пособие для студ. вузов по техническим спец. В 2 т.: Т.1: Статика и кинематика; Т.2: Динамика / Н.В. Бутенин, Я.Л. Лунц, Д.Р. Меркин. ─ 10-е изд., стер. ─ СПб.: Изд-во "Лань", 2008. ─ 729 с.

Составители: Бурков Сергей Николаевич,
Косых Владимир Петрович

Теоретическая механика

Методические указания по самостоятельному изучению дисциплины и выполнению контрольных и расчетно-графических работ

Печатается в авторской редакции

Издательский центр НГАУ

630039, Новосибирск, ул. Добролюбова, 160