НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ПРАКТИКУМ ПО МАТЕМАТИКЕ

Новосибирск 2017

УДК.517 (075.8)
ББК 22
Б 125

Авторы-составители:

В.Н. Бабин, канд. техн. наук, доц.,
Р.Т. Бильданов, ст. преп.,
М.В. Грунина, доц.

Рецензент: канд. физ.-мат. наук И.В. Ершов

Бабин В.Н. **Практикум по математике** / В.Н. Бабин, Р.Т. Бильданов, М.В. Грунина, – Новосиб. гос. аграр. ун-т. Новосибирск: ИЦ НГАУ «Золотой колос», 2017. – 103 с.

В практикуме представлены краткие теоретические сведения (основные определения, формулы, теоремы, признаки), необходимые для выполнения заданий. Приводятся методические указания по решению задач, в частности, алгоритмы их решения, представлены задания для самостоятельного выполнения, сопровождающиеся ответами и указаниями.

Практикум может быть использован при проведении аудиторных занятий и для организации самостоятельной работы студентов.

Утверждён и рекомендован к изданию методическим советом Инженерного института (протокол №38 от 28 апреля 2015 г.).

УДК 517 (075.8)
ББК 22

Введение

В практикуме представлены краткие теоретические сведения (основные определения, формулы, теоремы, признаки), необходимые для выполнения заданий. Приводятся методические указания по решению задач, в частности, алгоритмы их решения, представлены задания для самостоятельного выполнения, сопровождающиеся ответами и указаниями.

Практикум может быть использован при проведении аудиторных занятий и для организации самостоятельной работы студентов.

§ 1. Определители

Определение 1. Определителем второго порядка называется число, которое ставится в соответствие матрице второго порядка и находится по формуле

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Определение 2. Определителем третьего порядка называется число, которое ставится в соответствие матрице третьего порядка и находится по формуле

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} +$$

$$+a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot M_{11} - a_{12} \cdot M_{12} + a_{13} \cdot M_{13}$$

Определители второго порядка

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix},\ M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

называются минорами элементов a_{11}, a_{12}, a_{13} определителя.

Определение 3. Минором M_{ij} определителя n-го порядка называется определитель порядка
(n-1), полученный из данного вычеркиванием i-й строки и j-го столбца, на пересечении которых находится элемент a_{ij}.

Определение 4. Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} определителя называется минор M_{ij}, взятый со знаком (+) или (–), который определяется по правилу

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

Таким образом, определитель третьего порядка запишется в виде

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13}$$

(1)

Это правило называется разложением определителя третьего порядка по элементам первой строки.

Замечание 1. Можно вычислить определитель, раскладывая его по элементам любой строки или столбца.

Пример 1. Вычислить определитель

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 6 & 1 & 7 \\ -2 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$

Решение: Найдём алгебраические дополнения, например, к элементам первой строки.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 35 = -32$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -(18 + 14) = -32$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 30 + 2 = 32$$

По формуле (1) получим

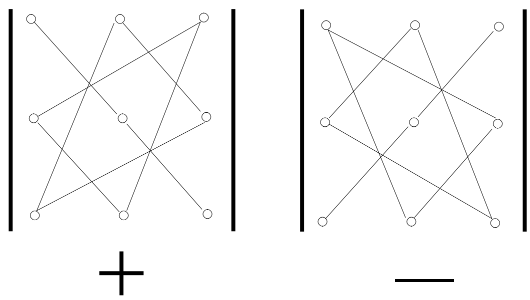
$|A| = 2\cdot(-32) - 4\cdot(-32) + 1\cdot 32 = 96$

Замечание 2. Раскроем определители второго порядка в формуле (1) и объединим члены, входящие со знаком (+) и (–). Тогда для вычисления определителя третьего порядка получим следующее правило:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} + a_{21}\cdot a_{32}\cdot a_{13} - a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31} - a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33} - a_{23}\cdot a_{32}\cdot a_{11}$$

(2)

Заметим, что первое слагаемое, входящее в правую часть этой формулы со знаком (+), есть произведение элементов главной диагонали матрицы *A*, а каждое из двух других – произведение элементов, лежащих на параллели к этой диагонали, и элемента из противоположного угла матрицы. Слагаемые, входящие в формулу (2) со знаком (–), строятся таким же образом, но относительно второй (побочной) диагонали. Это правило вычисления определителя третьего порядка называется правилом треугольника или правилом Саррюса и может быть схематично изображено в следующем виде:



Пример 2. Вычислить определитель с помощью правила треугольника:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & -7 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)\cdot(-2) + 2\cdot 6\cdot 5 + 4\cdot(-7)\cdot 3 - 3\cdot(-1)\cdot 6 - 5\cdot(-7)\cdot 1 - 2\cdot 4\cdot(-2) = 2 + 60 - 84$$

$+ 18 + + 35 + 16 = 47$

Определение 5. Определителем *n*-го порядка, соответствующим матрице $A = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}$, назовем число, которое находится по следующему правилу:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}\cdot A_{i1} + a_{i2}\cdot A_{i2} + \ldots + a_{in}\cdot A_{in}$$

Замечание 3. Вычислять определитель также можно раскладывая его по элементам любого столбца или строки.

Свойства определителей

Свойство 1. При перестановке двух строк (или столбцов) определитель меняет знак.

Свойство 2. Общий множитель какой-либо строки или столбца можно выносить за знак определителя.

Свойство 3. Если в определителе две строки (или два столбца) пропорциональны (в частности, равны), то определитель равен нулю.

Свойство 4. При замене всех строк определителя на столбцы с теми же номерами величина его не изменится.

Свойство 5. Если все элементы некоторой строки (столбца) нули, то определитель равен нулю .

Свойство 6. Определитель не изменится, если к элементам какой-либо строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же число.

Свойство 7. Сумма попарных произведений элементов какой-либо строки (столбца) на соответствующие алгебраические дополнения другой строки (столбца) равна нулю.

1. $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$ **2.** $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & -10 \end{vmatrix}$ **3.** $\begin{vmatrix} \sqrt{a} & -1 \\ a & \sqrt{a} \end{vmatrix}$ **4.** $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$ **5.** $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

6. $\begin{vmatrix} a & 1 & a \\ -1 & a & 1 \\ a & -1 & a \end{vmatrix}$ **7.** $\begin{vmatrix} a & -a & a \\ a & a & -a \\ a & -a & -a \end{vmatrix}$ **8.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -4 & 7 \\ -3 & 12 & -15 \end{vmatrix}$

9. Найти x из уравнений:

1) $\begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0;$ 2) $\begin{vmatrix} x^2 & 3 & 2 \\ x & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$

и проверить подстановкой корней в определитель.

§ 2. Системы линейных уравнений

Определение 1. Система линейных уравнений называется Крамеровской, если в ней число уравнений равно числу неизвестных. При $n = 3$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_{13} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_{13} = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_{13} = b_3 \end{cases}$$

(1)

a_{ij} называются коэффициентами при неизвестных, b_1, b_2, b_3 – свободными членами.

Определение 2. Решением системы (1) называется совокупность чисел (x_1; x_2; x_3), при подстановке которых в (1) все уравнения обращаются в тождества.

Определение 3. Система линейных уравнений называется несовместной, если у нее нет ни одного решения.

Метод Крамера для решения систем линейных уравнений

Для решения системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными методом Крамера нужно вычислить определители Δ, Δx_1, Δx_2, Δx_3, где Δ – определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных, Δx_1, Δx_2, Δx_3 получены из Δ заменой столбцов коэффициентов при x_1, x_2, x_3 соответственно на столбец свободных членов. При этом, если: 1) $\Delta \neq 0$, система имеет единственное решение $x_1 = \dfrac{\Delta x_1}{\Delta}$, $x_2 = \dfrac{\Delta x_2}{\Delta}$ и $x_3 = \dfrac{\Delta x_3}{\Delta}$;

2) $\Delta=\Delta x_1=\Delta x_2=\Delta x_3=0$, система несовместна или имеет бесконечное множество решений; 3) $\Delta=0$ и хотя бы один из Δx_1, Δx_2, Δx_3 отличен от нуля, система несовместна.

Матричная запись системы линейных уравнений (1) и ее матричное решение

Пусть A – матрица, составленная из коэффициентов при неизвестных, B – столбец свободных членов и X – матрица столбец неизвестных, тогда

$A\cdot X = B$ – матричная запись системы уравнений, а

$X = A^{-1}\cdot B$ – ее матричное решение .

Пример 1. Систему линейных уравнений записать в матричной форме и решить с помощью обратной матрицы.

$$\begin{cases} 7x_1 - 5x_2 = 31 \\ 4x_1 + 11x_3 = -43 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -20 \end{cases}$$

Решение: Пусть A – матрица, составленная из коэффициентов, стоящих при неизвестных:

$A = \begin{pmatrix} 7 & -5 & 0 \\ 4 & 0 & 11 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 31 \\ -43 \\ -20 \end{pmatrix}$ – столбец свободных членов;

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ – столбец неизвестных.

В таких обозначениях исходную систему линейных уравнений перепишем в матричной форме $A\cdot X = B$. Домножим последнее равенство на A^{-1} слева, получим $A^{-1}\cdot A\cdot X = A^{-1}\cdot B$, т.е. $X = A^{-1}\cdot B$.

Найдем матрицу A^{-1}.

Найдем алгебраические дополнения к элементам матрицы

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 11 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -33,\ A_{21} = -\begin{vmatrix} -5 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 20,\ A_{31} = \begin{vmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 11 \end{vmatrix} = -55,$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 4 & 11 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 6,\ A_{22} = \begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 28,\ A_{32} = -\begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 4 & 11 \end{vmatrix} = -77,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 12,\ A_{23} = -\begin{vmatrix} 7 & -5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -31,\ A_{33} = \begin{vmatrix} 7 & -5 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 20$$

Определитель $|A| = a_{11}\cdot A_{11} + a_{12}\cdot A_{12} + a_{13}\cdot A_{13}$,

$|A| = 7\cdot(-33) + (-5)\cdot 6 + 0\cdot 12 = -261$.

Итак, $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = -\dfrac{1}{261}\begin{pmatrix} -33 & 20 & -55 \\ 6 & 28 & -77 \\ 12 & -31 & 20 \end{pmatrix}$

Найдем столбец неизвестных

$$X = A^{-1}\cdot B = -\frac{1}{261}\begin{pmatrix} -33 & 20 & -55 \\ 6 & 28 & -77 \\ 12 & -31 & 20 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 31 \\ -43 \\ -20 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{261}\begin{pmatrix} -33\cdot 31 + 20\cdot(-43) - 55\cdot(-20) \\ 6\cdot 31 + 28\cdot(-43) - 77\cdot(-20) \\ 12\cdot 31 - 31\cdot(-43) + 20\cdot(-20) \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{261}\begin{pmatrix} -783 \\ 522 \\ 1305 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix},$$

т.е. $x_1 = 3$, $x_2 = -2$, $x_3 = -5$.

Ответ: (3; –2; –5).

Метод Гаусса для решения систем линейных уравнений

Метод Гаусса, в отличие от двух предыдущих методов, применим для любых систем, где число неизвестных необязательно равно числу уравнений. Под расширенной матрицей системы будем понимать матрицу, включающую в себя столбец свободных членов (после черты). В результате элементарных преобразований строк расширенная матрица приводится к одному из трех случаев:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} * & .. & 0 & * \\ .. & .. & .. & .. \\ 0 & .. & * & * \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{cccccc|c} * & .. & 0 & * & .. & * & * \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & .. & * & * & .. & * & * \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{ccc|c} * & .. & 0 & * \\ 0 & .. & * & .. \\ 0 & .. & 0 & * \end{array}\right)$$

I II III

В первом случае система имеет единственное решение. Во втором случае система уравнений имеет бесконечное множество решений и в третьем она несовместна.

Теорема Кронекера-Капелли.

Для того, чтобы система уравнений была совместна, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы был равен рангу расширенной матрицы.

При этом:

1) если ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы и равен числу неизвестных, то система имеет единственное решение;

2) если ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы, но меньше числа неизвестных, то система имеет бесконечное множество решений.

Если ранг матрицы системы меньше ранга расширенной матрицы, то система несовместна и решения не существует.

Нетрудно видеть, что на последнем рисунке в первом случае $r = r_1 = n$, во втором – $r_1 = r < n$ и в третьем $r > r_1$, где r – ранг расширенной матрицы; r_1 – ранг матрицы системы и n – число неизвестных.

Пример 2.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 20 \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 6 \end{cases}$$

Решение: Применим к расширенной матрице системы элементарные преобразования:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & -4 & 20 \\ 3 & -2 & -5 & 6 \end{array}\right)\begin{array}{l}(-2)(-3) \\ \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 7 & -10 & 8 \\ 0 & 4 & -14 & -12 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ (-2) \end{array} \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & -1 & 18 & 32 \\ 0 & 4 & -14 & -12 \end{array}\right)(-1)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -18 & -32 \\ 0 & 4 & -14 & -12 \end{array}\right)(-4)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -18 & -32 \\ 0 & 0 & 58 & 116 \end{array}\right):58\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -18 & -32 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)(18)(-3)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)(2)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Таким образом, данная система имеет единственное решение:

$$\begin{cases} x_1 = 8 \\ x_2 = 4 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

Ответ: (8; 4; 2).

Пример 3.

$$\begin{cases} 6x_1 + 2x_3 = 2 \\ 5x_1 + 2x_2 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

Решение: Применим к расширенной матрице системы элементарные преобразования.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 3 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)(-5)(-6)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 12 & -10 & -14 \\ 0 & 12 & -10 & -16 \end{array}\right)(-1)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 12 & 10 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

Число ненулевых строк в расширенной матрице равно трем, а в матрице системы (без столбца свободных членов) – двум.

$r = 3$, $r_1 = 2$, $r > r_1$, значит, система несовместна.

Ответ: Система несовместна.

Решить системы уравнений

1. $\begin{cases} 2x - 3y + z - 2 = 0, \\ x + 5y - 4z + 5 = 0, \\ 4x + y - 3z + 4 = 0 \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} 2x - y + z = 2, \\ 3x + 2y + 2z = -2, \\ x - 2y + z = 1 \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} x + 2y + 3z = 4, \\ 2x + 4y + 6z = 3, \\ 3x + y - z = 1 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x + 2y + 3z = 4, \\ 2x + y - z = 3, \\ 3x + 3y + 2z = 7 \end{cases}$ **5.** $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 4, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = -5, \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 4 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 1, \\ 3x_1 \qquad - x_3 - 2x_4 = 4, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$ **7.** $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 + x_5 = -14, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 10, \\ -x_1 - x_2 + x_3 - 4x_4 - 2x_5 = 15, \\ 5x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 7x_4 + 5x_5 = 2 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 6x_4 + 10x_5 - x_6 = -24, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 5x_4 + x_5 + 2x_6 = -6, \\ 2x_1 + 4x_2 + 7x_3 \qquad + 9x_5 - 3x_6 = -11, \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 + 5x_4 \qquad + 3x_6 = 42, \\ -x_1 - x_2 + 5x_3 - 7x_4 + 6x_5 - x_6 = -38, \\ \qquad 3x_2 \qquad - x_4 + x_5 \qquad = 2 \end{cases}$

§ 3. Векторная алгебра

Векторы. Линейные операции над векторами

Коллинеарные векторы – векторы, параллельные одной прямой.
Обозначения:
$\bar{a} \uparrow\uparrow \bar{b}$ – векторы сонаправлены;
$\bar{a} \uparrow\downarrow \bar{c}$ – векторы противоположно направлены;
$\bar{a} \,||\, \bar{b}$ – в общем случае (без указания взаимной направленности).

Равные векторы – векторы, удовлетворяющие условиям :
1) имеют одинаковую длину;
2) коллинеарны;
3) сонаправлены.

Компланарные векторы – векторы, параллельные одной плоскости.
Сумма векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ определяется по правилу треугольника или параллелограмма.
Обозначение суммы: $\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$ или $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$.
Произведением вектора $\bar{a}$ на число λ называется вектор $\bar{b}$, удовлетворяющий следующим условиям:
1) $|\bar{b}| = |\lambda| \cdot |\bar{a}|$;
2) $\bar{a} \uparrow\uparrow \bar{b}$ при $\lambda > 0$ и $\bar{b} \uparrow\downarrow \bar{a}$ при $\lambda < 0$. Обозначение $\bar{b} = \lambda \cdot \bar{a}$.

Базис на плоскости и в пространстве. Координаты вектора

Два упорядоченных неколлинеарных вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ образуют базис на плоскости.
Три упорядоченных некомпланарных вектора $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ образуют базис в пространстве.
Базис называется ортонормированным (декартовым), если базисные векторы взаимно перпендикулярны и имеют единичную длину. Обозначение декартова базиса: $\bar{i}$, $\bar{j}$ – на плоскости; $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ – в пространстве.
Разложить вектор по базису – значит представить его в виде линейной комбинации базисных векторов, т.е. в форме
$\bar{d} = \alpha\bar{a} + \beta\bar{b}$ – на плоскости или $\bar{d} = \alpha\bar{a} + \beta\bar{b} + \gamma\bar{c}$ – в пространстве.

Числа α, β, γ (коэффициенты линейной комбинации) называются координатами вектора в данном базисе. Вектор может быть задан в координатной форме: $\overline{a}=\{\alpha,\beta\}$ – на плоскости; $\overline{a}=\{\alpha,\beta,\gamma\}$ – в пространстве.

Линейным операциям над векторами соответствуют те же линейные операции над их координатами.

$\overline{a}=\{a_1,a_2,a_3\}$; $\overline{b}=\{b_1,b_2,b_3\}$;

$\overline{a}+\overline{b}=\{a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3\}$;

$\lambda\overline{a}=\{\lambda a_1,\lambda a_2,\lambda a_3\}$

Если даны координаты начала A и координаты конца B вектора $\overline{a}=\overline{AB}$, $A(x_1;y_1;z_1)$ и $B(x_2;y_2;z_2)$, то $\overline{a}=\{x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1\}$.

Условия коллинеарности и компланарности векторов в координатной форме

1. $\overline{a}\,||\,\overline{b}\Leftrightarrow\overline{a}=\lambda\overline{b}\Leftrightarrow\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\dfrac{a_3}{b_3}$

(координаты коллинеарных векторов пропорциональны);

2. $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ компланарны $\Leftrightarrow\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}=0$

(определитель третьего порядка, составленный из координат компланарных векторов, равен 0).

Пример 1. Даны векторы $\overline{a}_1=\{1;2;-1\}$, $\overline{a}_2=\{1;1;2\}$, $\overline{a}_3=\{2;1;3\}$ и $\overline{b}=\{3;6;1\}$. Показать, что векторы $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, $\overline{a}_3$ образуют базис трехмерного пространства и найти координаты вектора $\overline{b}$ в этом базисе.

Решение. Вычислим определитель, составленный из координат векторов $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$ и $\overline{a}_3$:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 3\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=1\cdot1-2\cdot(-1)-1\cdot(-1)=4$$

Так как $\Delta\neq0$, векторы $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, $\overline{a}_3$ некомпланарны и, следовательно, образуют базис. Разложим вектор $\overline{b}$ по базису:

$$\overline{b}=x\cdot\overline{a}_1+y\cdot\overline{a}_2+z\cdot\overline{a}_3,$$

где x, y, z – искомые координаты вектора $\overline{b}$ в базисе $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, $\overline{a}_3$.

Записав координаты векторов $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, $\overline{a}_3$, $\overline{b}$ в столбцы, представим разложение вектора $\overline{b}$ в виде

$$\begin{pmatrix}3\\6\\1\end{pmatrix}=x\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}+y\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+z\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$$

Приравняв координаты векторов, стоящих в правой и левой частях равенства, получаем систему линейных уравнений относительно неизвестных x, y, z:

$$\begin{cases} x+y+2z=3 \\ 2x+y+z=6 \\ -x+2y+3z=1 \end{cases}$$

Решаем систему уравнений, например, методом Гаусса. Запишем расширенную матрицу системы и применим к ней элементарные преобразования:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right)(-2)(1) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 4 \end{array}\right)(3) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ :(-1) \\ :(-4) \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)(-3)(-2) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)(-1) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Итак, $x = 2, y = 3, z = -1$.

Следовательно, $\overline{b} = 2\overline{a}_1 + 3\overline{a}_2 - \overline{a}_3$.

Скалярное произведение

Скалярным произведением векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла φ между ними. Обозначение $\overline{a}\cdot\overline{b} = \left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|\cdot\cos\varphi$.

Если векторы заданы координатами в декартовом базисе $\overline{a} = \left\{a_x, a_y, a_z\right\}$, $\overline{b} = \left\{b_x, b_y, b_z\right\}$, то скалярное произведение векторов равно сумме произведений их координат:

$$\overline{a}\cdot\overline{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

С помощью скалярного произведения находят:

– длину вектора: $|\overline{a}| = \sqrt{\overline{a}\cdot\overline{a}} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$,

– расстояние между двумя точками: $\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$,

– косинус угла между векторами: $\cos\varphi = \dfrac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{\left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|} = \dfrac{a_x\cdot b_x + a_y\cdot b_y + a_z\cdot b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$

Условие перпендикулярности (ортогональности) векторов

$$\overline{a}\perp\overline{b} \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \cos\varphi = 0 \Leftrightarrow \overline{a}\cdot\overline{b} = 0 \Leftrightarrow a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0, \ \ (\left|\overline{a}\right| \neq 0, \quad \left|\overline{b}\right| \neq 0)$$

Векторное произведение

Векторным произведением $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется вектор $\overline{c}$ такой, что

1) $\left|\overline{c}\right| = \cdot\left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|\cdot\sin\varphi$ – модуль $\overline{c}$ равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$ (S);

2) $\overline{c}\perp\overline{a}$, $\overline{c}\perp\overline{b}$;

3) тройка векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ – правая.

Обозначение $\overline{c} = \left[\overline{a}, \ \overline{b}\right]$ или $\overline{c} = \overline{a}\times\overline{b}$.

Координаты вектора $\overline{c} = \left\{c_x, c_y, c_z\right\}$ $\overline{c}$ = (c_x, c_y, c_z) в декартовом базисе вычисляются по формулам:

$$\overline{c}=\begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\overline{i}-\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\overline{j}+\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\overline{k}$$

Смешанное произведение векторов

Смешанным произведением векторов называется число

$$(\overline{a}\times\overline{b})\cdot\overline{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Абсолютная величина смешанного произведения $(\overline{a},\overline{b},\overline{c})$ равна объему параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$

$$V=\left|(\overline{a},\overline{b},\overline{c})\right|=\pm\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

1. По сторонам OA и OB прямоугольника $OACB$ отложены единичные векторы $\overline{i}$ и $\overline{j}$. Выразить через $\overline{i}$ и $\overline{j}$ векторы $\overline{OA}$, $\overline{AC}$, $\overline{CB}$, $\overline{BO}$, $\overline{OC}$ и $\overline{BA}$, если $OA=3$ и $OB=4$.

2. Пусть у прямоугольника $OACB$ из предыдущей задачи M – середина BC и N – середина AC. Определить векторы $\overline{OM}$, $\overline{ON}$ и $\overline{MN}$ при $OA=3$ и $OB=4$.

3. Построить точку $M(5;-3;4)$ и определить длину и направление её радиус-вектора.

4. Даны точки $A(1;2;3)$ и $B(3;-4;6)$. Построить вектор $\overline{AB}=\overline{u}$, его проекции на оси координат и определить длину и направление вектора. Построить углы вектора $\overline{u}$ с осями координат.

5. Построить параллелограмм на векторах $\overline{OA}=\overline{i}+\overline{j}$ и $\overline{OB}=\overline{k}-3\overline{j}$ и определить его диагонали.

6. Даны три последовательные вершины параллелограмма $A(1;-2;3)$, $B(3;2;1)$ и $C(6;4;4)$. Найти его четвёртую вершину D.

7. Определить угол между векторами $\overline{a}=-\overline{i}+\overline{j}$ и $\overline{b}=\overline{i}-2\overline{j}+2\overline{k}$.

8. Определить углы ΔABC с вершинами $A(2;-1;3)$, $B(1;1;1)$ и $C(0;0;5)$.

9. Найти угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}=2\overline{i}+\overline{j}$ и $\overline{b}=-2\overline{j}+\overline{k}$.

10. Раскрыть скобки в выражении $(2\overline{i}-\overline{j})\cdot\overline{j}+(\overline{j}-2\overline{k})\cdot\overline{k}+(\overline{i}-2\overline{k})^2$

11. Вычислить: 1) $(\overline{m}+\overline{n})^2$, если $\overline{m}$ и $\overline{n}$ – единичные векторы с углом между ними 30°; 2) $(\overline{a}-\overline{b})^2$, если $|\overline{a}|=2\sqrt{2}$, $|\overline{b}|=4$ и $(\widehat{\overline{a},\overline{b}})=135^\circ$.

12. Определить длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}=2\overline{m}+\overline{n}$, $\overline{b}=\overline{m}-2\overline{n}$, где $\overline{m}$ и $\overline{n}$ – единичные векторы, угол между которыми 60°.

13. Дан вектор $\overline{a}=2\overline{m}-\overline{n}$, где $\overline{m}$ и $\overline{n}$ – единичные векторы с углом 120° между ними. Найти $\cos(\overline{a},\widehat{\ }\overline{m})$ и $\cos(\overline{a},\widehat{\ }\overline{n})$.

14. Проекции перемещения движущейся точки на оси координат $s_x=2$ м, $s_y=1$ м, $s_z=-2$ м. Проекции действующей силы $\overline{F}$ на оси координат равны $F_x=5$ Н, $F_y=4$ Н и $F_z=3$ Н. Вычислить работу A силы $\overline{F}$ $(A=\overline{F}\cdot\overline{s})$ и угол между силой $\overline{F}$ и перемещением $\overline{s}$.

15. Определить и построить вектор $\overline{c}=\overline{a}\times\overline{b}$, если 1) $\overline{a}=3\overline{i}$, $\overline{b}=2\overline{k}$; 2) $\overline{a}=\overline{i}+\overline{j}$, $\overline{b}=\overline{i}-\overline{j}$; 3) $\overline{a}=2\overline{i}+3\overline{j}$, $\overline{b}=3\overline{j}+2\overline{k}$. Найти в каждом случае площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

16. Вычислить площадь треугольника с вершинами $A(7;3;4)$, $B(1;0;6)$ и $C(4;5;-2)$.

17. Построить параллелограмм на векторах $\overline{a}=2\overline{j}+\overline{k}$ и $\overline{b}=\overline{i}+2\overline{k}$ и вычислить его площадь и высоту.

18. Раскрыть скобки и упростить выражения:

1) $\overline{i}\times(\overline{j}+\overline{k})-\overline{j}\times(\overline{i}+\overline{k})+\overline{k}\times(\overline{i}+\overline{j}+\overline{k})$;

2) $(\overline{a}+\overline{b}+\overline{c})\times\overline{c}+(\overline{a}+\overline{b}+\overline{c})\times\overline{b}+(\overline{b}-\overline{c})\times\overline{a}$;

3) $(2\overline{a}+\overline{b})\times(\overline{c}-\overline{a})+(\overline{b}+\overline{c})\times(\overline{a}+\overline{b})$;

4) $2\overline{i}\cdot(\overline{j}\times\overline{k})+3\overline{j}\cdot(\overline{i}\times\overline{k})+4\overline{k}\cdot(\overline{i}\times\overline{j})$.

19. Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ составляют угол 45°. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\overline{a}-2\overline{b}$ и $3\overline{a}+2\overline{b}$, если $|\overline{a}|=|\overline{b}|=5$.

20. Найти площадь параллелограмма, диагоналями которого служат векторы $2\overline{m}-\overline{n}$ и $4\overline{m}-5\overline{n}$, где $\overline{m}$ и $\overline{n}$ – единичные векторы, образующие угол 45°.

Указание. Имеем $\overline{a}+\overline{b}=2\overline{m}-\overline{n}$ и $\overline{a}-\overline{b}=4\overline{m}-5\overline{n}$, где $\overline{a}$ и $\overline{b}$ – векторы-стороны параллелограмма. Перемножив, найдём вектор $2\overline{b}\times\overline{a}$, модуль которого и равен удвоенной искомой площади.

21. Построить параллелепипед на векторах $\overline{a}=3\overline{i}+4\overline{j}$, $\overline{b}=-3\overline{j}+\overline{k}$, $\overline{c}=2\overline{j}+5\overline{k}$ и вычислить его объём. Правой или левой будет тройка векторов $(\overline{a},\overline{b},\overline{c})$?

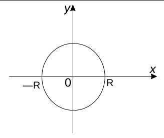
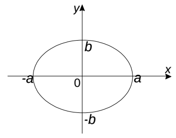
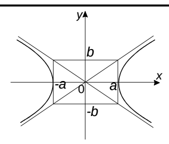
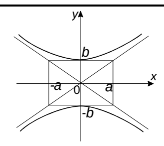
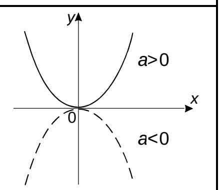
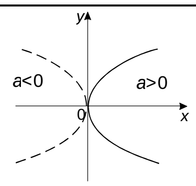
22. Построить пирамиду с вершинами $O(0;0;0)$, $A(5;2;0)$, $B(2;5;0)$ и $C(1;2;4)$ и вычислить её объём, площадь грани ABC и высоту пирамиды, опущенную на эту грань.

23. Показать, что точки $A(2;-1;-2)$, $B(1;2;1)$, $C(2;3;0)$ и $D(5;0;-6)$ лежат в одной плоскости.

24. Показать, что векторы $\overline{a} = -\overline{i} + 3\overline{j} + 2\overline{k}$, $\overline{b} = 2\overline{i} - 3\overline{j} - 4\overline{k}$, $\overline{c} = -3\overline{i} + 12\overline{j} + 6\overline{k}$ компланарны, и разложить вектор $\overline{c}$ по векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

§ 4. Кривые второго порядка

Приведем канонические (простейшие) уравнения кривых второго порядка и их графики в виде следующей таблицы.

№ п/п	Название кривой	Уравнение кривой	График кривой
1	2	3	4
1	Окружность	$x^2 + y^2 = R^2$ R – радиус окружности (центр в начале координат)	
2	Эллипс	$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ a, b – полуоси эллипса (центр в начале координат)	
3	Гипербола	а) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ a, b – полуоси гиперболы (a – вещественная, b – мнимая)	
		Центр в начале координат	
		б) $-\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ a, b – полуоси гиперболы (a – мнимая, b – вещественная)	
4	Парабола	а) $y = ax^2$ Вершина в начале координат	
		б) $x = ay^2$	

Уравнения кривых второго порядка с центром или вершиной (для параболы) в точке $C(x_0, y_0)$, не совпадающей в общем случае с началом координат без поворота осей относительно начала координат, имеют вид:

1. $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2$ – окружность;

2. $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}+\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$ – эллипс;

3. а) $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}-\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$,

   б) $-\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}+\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$ – гипербола;

4. а) $y-y_0=a\,(x-x_0)^2$,

   б) $x-x_0=a\,(y-y_0)^2$ – парабола.

Пример 1. Составить уравнение геометрического места точек, равноудаленных от точки $A(1, 4)$ и прямой $y = 2$. Полученное уравнение привести к простейшему виду. Сделать чертеж.

Решение. Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка искомого геометрического места точек. Пусть точка B – проекция точки M на прямую $y = 2$. Тогда абсцисса точки B равна абсциссе точки M, ордината точки B равна 2, т.е. $B(x, 2)$. В силу условий задачи $|AM| = |MB|$. Следовательно,

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-4)^2}=\sqrt{(x-x)^2+(y-2)^2}$$

Отсюда

$(x-1)^2+(y-4)^2=(x-x)^2+(y-2)^2$

$(x-1)^2+y^2-8y+16=y^2-4y+4$

$(x-1)^2=4y-12$

$y-3=\dfrac{1}{4}\cdot(x-1)^2$

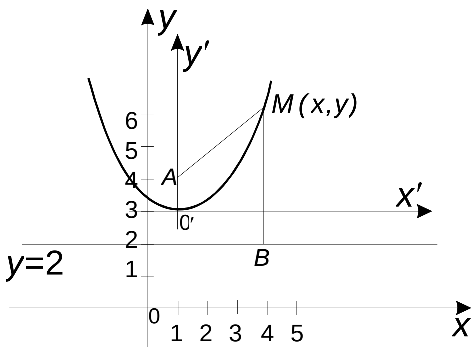


Рис.1

Последнее уравнение определяет параболу с вершиной в точке $O'(1, 3)$. Чтобы уравнение привести к простейшему виду, положим $x' = x-1$, $y' = y-3$. Тогда уравнение примет вид $y' = \dfrac{1}{4}\cdot x'^2$

Простейший способ построения параболы на чертеже состоит в следующем. Вводим новую систему координат $x'O'y'$ с началом в точке O' и осями, параллельными осям Ox и Oy, и затем строим в новой системе параболу $y' = \dfrac{1}{4}\cdot x'^2$ (рис. 1).

Пример 2. Составить уравнение геометрического места точек, отношение расстояний которых до точки $F(1, 0)$ и прямой $x = 4$ равно $\dfrac{1}{2}$. Сделать чертеж.

Решение. Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка искомого геометрического места точек. Пусть точка B – проекция точки M на прямую $x = 4$. Тогда абсцисса точки B равна 4, ордината равна ординате точки M, т.е. $B(4, y)$.

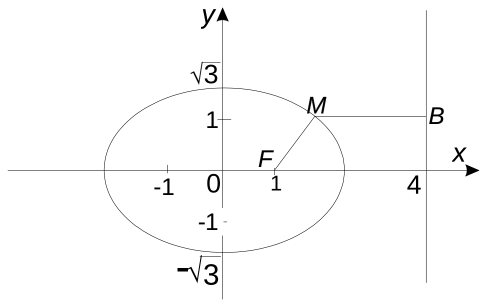


Рис.2

В силу условий $|FM| = \frac{1}{2}|MB|$. Следовательно, $\sqrt{(x-1)^2+(y-0)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(x-4)^2+(y-y)^2}$

Отсюда

$$(x-1)^2 + y^2 = \frac{1}{4}(x-4)^2$$

$$y^2 + x^2 - 2x + 1 = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 4$$

$$\frac{3}{4}x^2 + y^2 = 3$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$$

Последнее уравнение определяет эллипс с полуосями $a = 2$, $b = \sqrt{3}$. Фокусы эллипса расположены в точках $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$, где $c^2 = a^2 - b^2 = 4 - 3 = 1$, т.е. $F_1(-1, 0)$, $F_2(1, 0)$. Эксцентриситет эллипса $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$ (рис. 2).

Пример 3. Составить уравнение геометрического места точек, отношение расстояний которых до точки $F(-4, 0)$ и до прямой $x = -1$ равно 2. Сделать чертеж.

Решение. Пусть $M(x,y)$ – произвольная точка искомого геометрического места точек. Пусть точка B – проекция точки M на прямую $x = -1$. Тогда абсцисса точки B равна -1, ордината равна ординате точки M, т.е. $B(-1, y)$. В силу условий $|FM| = 2\cdot|MB|$.

Следовательно, $\sqrt{(x+4)^2+(y-0)^2} = 2\sqrt{(x+1)^2+(y-y)^2}$.

Отсюда

$$(x + 4)^2 + y^2 = 4\cdot(x + 1)^2$$

$$x^2 + 8x + 16 + y^2 = 4x^2 + 8x + 4$$

$$3x^2 - y^2 = 12$$

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$$

Полученное уравнение определяет гиперболу, у которой $a = 2$, $b = 2\sqrt{3}$. Фокусы гиперболы расположены в точках $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$, где $c^2 = a^2 + b^2 = 12 + 4 = 16$, т.е. $F_1(-4, 0)$, $F_2(4, 0)$. Эксцентриситет гиперболы $\varepsilon = \frac{c}{a} = 2$. Уравнения асимптот гиперболы имеют вид: $y = \frac{b}{a}x$, $y = -\frac{b}{a}x$, т.е. в нашем случае $y = \sqrt{3}\,x$ и $y = -\sqrt{3}\,x$ (рис. 3).

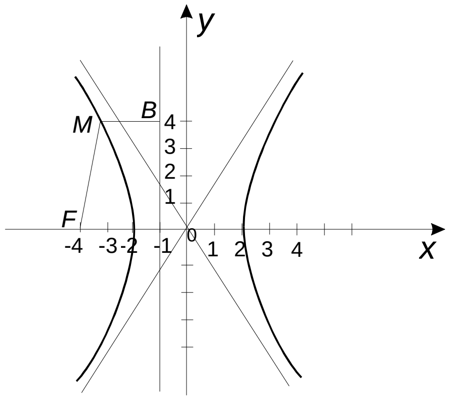


Рис.3

1. Построить эллипс $x^2+4y^2=16,$ найти его фокусы и эксцентриситет.

2. Написать каноническое уравнение эллипса, зная, что: 1) расстояние между фокусами равно 8, а малая полуось $b=3;$ 3) большая полуось $a=6,$ а эксцентриситет $\varepsilon=0,5.$

3. Найти малую полуось b и эксцентриситет ε эллипса, имеющего большую полуось $a=5$ и параметр c, равный: 1) 4,8; 2) 4; 3) 3; 4) 1,4; 5) 0. Построить каждый из эллипсов.

4. Земля движется по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце. Наименьшее расстояние от земли до Солнца равно приблизительно 147,5 миллиона километров, а наибольшее 152,5 миллиона километров. Найти большую полуось и эксцентриситет орбиты Земли.

5. Определить траекторию точки M, которая при своём движении остаётся втрое ближе к точке $A(1;0),$ чем к прямой $x=9.$

6. Построить гиперболу $x^2-4y^2=16$ и её асимптоты. Найти фокусы, эксцентриситет и угол между асимптотами.

7. Написать каноническое уравнение гиперболы, зная, что: 1) расстояние между фокусами $2c=10,$ а между вершинами $2a=8;$ 2) вещественная полуось $a=2\sqrt{5},$ а эксцентриситет $\varepsilon=\sqrt{1,2}.$

8. Определить траекторию точки M, которая движется так, что остаётся вдвое дальше от точки $F(-8;0),$ чем от прямой $x=-2.$

9. Составить уравнение геометрического места точек, одинаково удалённых от точки $F(0;2)$ и от прямой $y=4.$ Найти точки пересечения этой кривой с осями координат и построить её.

10. Составить уравнение геометрического места точек, одинаково удалённых от начала координат и от прямой $x=-4.$ Найти точки пересечения этой кривой с осями координат и построить её.

11. Построить параболы, заданные уравнениями: 1) $y^2=4x;$ 2) $y^2=-4x;$ 3) $x^2=4y;$ 4) $x^2=-4y,$ а также их фокусы и директрисы и написать уравнения директрис.

12. Зеркальная поверхность прожектора образована вращением параболы вокруг её оси симметрии. Диаметр зеркала 80 см, а глубина его 10 см. На каком расстоянии от вершины параболы нужно поместить источник света, если для отражения лучей параллельным пучком он должен быть в фокусе параболы?

§ 5. Аналитическая геометрия в пространстве

Уравнение плоскости Q, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно вектору $\overline{n} = \{A, B, C\}$, имеет вид

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

$\overline{n}$ называется нормальным вектором плоскости.

Общее уравнение плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Для двух плоскостей, заданных уравнениями

Q_1: $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и Q_2: $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

1. Условие параллельности

$$Q_1 \parallel Q_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

2. Условие перпендикулярности

$$Q_1 \perp Q_2 \Leftrightarrow A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2 = 0$$

3. Угол между плоскостями

$$\cos(Q_1 \hat{\ } Q_2) = \cos(\overline{N_1 \hat{\ } N_2}) = \frac{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

Прямая L в пространстве задается как линия пересечения двух плоскостей:

$$L: \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$ – общие уравнения прямой.

Уравнения прямой L, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ параллельно вектору $\overline{s} = \{m, n, p\}$:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$ – называются каноническими уравнениями прямой. Вектор $\overline{s}$ называется направляющим вектором прямой.

Замечание. Канонические уравнения прямой имеют смысл и в том случае, когда одна или две координаты направляющего вектора обращаются в нуль.

Для двух прямых, заданных каноническими уравнениями,

$$L_1: \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1} \text{ и } L_2: \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}.$$

1. Условие параллельности

$$L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow \overline{s_1} \parallel \overline{s_2} \Leftrightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

2. Условие перпендикулярности

$$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow \overline{s_1} \perp \overline{s_2} \Leftrightarrow m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2 + p_1 \cdot p_2 = 0$$

3. Угол между ними

$$\cos(L_1 \hat{\ } L_2) = \cos(\overline{s_1} \hat{\ } \overline{s_2}) = \frac{m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2 + p_1 \cdot p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$$

Для плоскости Q: $Ax + By + Cz + D = 0$ и прямой L: $\dfrac{x-x_1}{m_1} = \dfrac{y-y_1}{n_1} = \dfrac{z-z_1}{p_1}$.

1. Условие параллельности

$$Q \parallel L \Leftrightarrow \overline{n} \perp \overline{s} \Leftrightarrow A{\cdot}m + B{\cdot}n + C{\cdot}p = 0$$

2. Условие перпендикулярности

$$\mathrm{Q} \perp \mathrm{L} \Leftrightarrow \overline{n} \parallel \overline{s} \Leftrightarrow \frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$$

3. Расстояние от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости $Ax + By + + Cz + D = 0$ находят по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

1. Построить плоскости: 1) $5x - 2y + 3z - 10 = 0;$ 2) $3x + 2y - z = 0;$ 3) $3x + 2z = 6;$ 4) $2z - 7 = 0.$

2. Найти плоскость, проходящую через точку $(2; 2; -2)$ и параллельную плоскости $x - 2y - 3z = 0.$

3. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $(-1; -1; 2)$ и перпендикулярной к плоскостям $x - 2y + z - 4 = 0$ и $x + 2y - 2z + 4 = 0.$

4. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(-1; -2; 0)$ и $M_2(1; 1; 2)$ и перпендикулярной к плоскости $x + 2y + 2z - 4 = 0.$

5. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(1; -1; 2),$ $M_2(2; 1; 2)$ и $M_3(1; 1; 4).$

6. Написать уравнение плоскости, проходящей через ось Ox и точку $M_1(0; -2; 3).$ Построить плоскость.

7. Через точку $M(-1; 2; 3)$ проведена плоскость, перпендикулярная к OM. Написать её уравнения.

8. Найти расстояние от точки $(5; 1; -1)$ до плоскости $x - 2y - 2z + 4 = 0.$

9. Найти расстояние между параллельными плоскостями $4x + 3y - 5z - 8 = 0$ и $4x + 3y - 5z + 12 = 0.$

10. Уравнения прямой $\begin{cases} x + 2y + 3z - 13 = 0 \\ 3x + y + 4z - 14 = 0 \end{cases}$ написать: 1) в проекциях; 2) в канонической форме. Найти следы прямой на координатных плоскостях, построить прямую и её проекции.

11. Написать уравнения прямой, проходящей через точку $A(4; 3; 0)$ и параллельной вектору $\overline{p} = \{-1; 1; 1\}$. Найти след прямой на плоскости yOz и построить прямую.

12. Построить прямую, проходящую через точки $A(2; -1; 3)$ и $B(2; 3; 3),$ и написать её уравнения.

13. Написать параметрические уравнения прямой: 1) проходящей через точку $(-2; 1; -1)$ и параллельной вектору $\overline{p} = \{1; -2; 3\}$; 2) проходящей через точки $A(3; -1; 4)$ и $B(1; 1; 2)$.

14. Написать уравнения прямой, проходящей через точку $(-4; 3; 0)$ и параллельной прямой $\begin{cases} x - 2y + z = 4, \\ 2x + y - z = 0. \end{cases}$

15. Найти угол между прямой $\begin{cases} y = 3x - 1 \\ 2z = -3x + 2 \end{cases}$ и плоскостью $2x + y + z - 4 = 0$.

16. Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z+1}{3}$ и точку $(3; 4; 0)$.

17. Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z+2}{2}$ и перпендикулярной к плоскости $2x + 3y - z = 4$.

18. Написать уравнение плоскости, проходящей через параллельные прямые $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-1}{2}$ и $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z}{2}$.

19. Найти точку пересечения прямой $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z+1}{2}$ с плоскостью $x + 2y + 3z - 29 = 0$.

§ 6. Предел функции

Определение 1. Функция, областью определения которой служит множество всех натуральных чисел, называется последовательностью.

Такие функции принято кратко записывать $y_n = f(n)$, $n \in \mathbf{N}$.

Последовательность считается заданной, если задан ее общий член y_n.

Определение 2. Число a называется пределом последовательности $y_n = f(n)$, если для любого положительного числа ε существует такое число N, что для всех натуральных чисел $n > N$ выполнено неравенство

$| f(n) - a | < \varepsilon$ или, что то же самое, $| y_n - a | < \varepsilon$.

Тот факт, что a есть предел последовательности y_n, символически записывается так:

$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$ или $y_n \to a$ при $n \to \infty$.

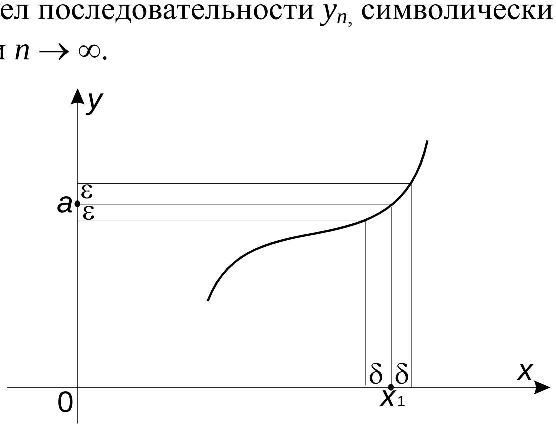


Рис. 1

Определение 3. Число a называется пределом функции $f(x)$ в точке x_1, если для всякого числа $\varepsilon > 0$ можно указать такую δ-окрестность точки x_1, что как только $| x - x_1 | < \delta$ $(x \neq x_1)$, то
$| f(x) - a | < \varepsilon$.
Это записывают так: $\lim\limits_{x \to x_1} f(x) = a$ или $f(x) \to a$ $(x \to x_1)$ и графически иллюстрируют так, как это показано на рис. 1.

Замечание 1. Если $f(x)$ стремится к пределу a_1 при x, стремящемуся к некоторому числу так, что x принимает только значения, меньшие x_1, то пишут $\lim\limits_{x \to x_1 - 0} f(x) = a_1$ и называют a_1 пределом функции $f(x)$ в точке x_1 слева. Если x принимает только значения, больше чем x_1, то пишут $\lim\limits_{x \to x_1 + 0} f(x) = a_2$ и называют a_2 пределом функции $f(x)$ в точке x_1 справа.
Если пределы слева и справа существуют и равны, т.е. $a_1 = a_2 = a$, то a и будет пределом. И обратно, если существует предел функции a в точке x_1, то существуют пределы функции в точке x_1 слева и справа и они равны.

Определение 4. Функция $f(x)$ стремится к пределу a при $x \to \infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $N(\varepsilon) > 0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $| x | > N$, выполняется неравенство $| f(x) - a | < \varepsilon$. Графически это показано на рис.2.

Определение 5. Функция $\alpha = \alpha(x)$ называется бесконечно малой при $x \to x_1$, или при
$x \to \infty$, если $\lim\limits_{x \to x_1} \alpha(x) = 0$ или $\lim\limits_{x \to \infty} \alpha(x) = 0$.

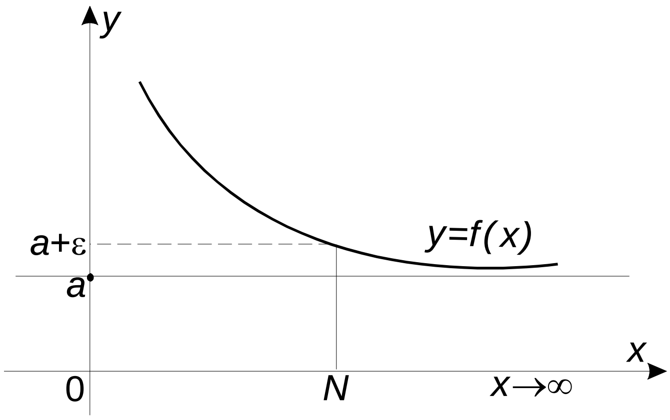


Рис. 2

Определение 6. Функция $f(x)$ называется бесконечно большой при $x \to x_1$, т.е. $\lim\limits_{x \to x_1} f(x) = \infty$, если для любого $M > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $| f(x) | > M$ $\forall x \in (x_1 - \delta; x_1 + \delta)$.

Определение 7. Переменная величина y называется ограниченной, если можно указать такое число $M > 0$, что $y \leq | M |$. В частности, функция $y = f(x)$ ограничена в интервале (a, b), если найдется постоянное число $M > 0$ такое, что $| f(x) | < M$ для любого x, удовлетворяющего неравенству $a < x < b$. Если для переменной величины нельзя указать числа M, ограничивающего ее, то говорят: переменная величина неограниченная.

Основные теоремы о пределах функций

Теорема 1. Для того, чтобы функция $y = f(x)$ в точке $x = x_1$ имела пределом число a, необходимо и достаточно, чтобы она была представима в окрестности этой точки в виде суммы $f(x) = a + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция в окрестности точки $x = x_1$.

Теорема 2. Предел алгебраической суммы конечного числа функций, имеющих пределы, равен такой же сумме пределов слагаемых.

Теорема 3. Предел произведения конечного числа функций, имеющих пределы, равен произведению пределов сомножителей.

Теорема 4. Если функция $f(x)$ имеет в точке $x = x_1$ предел, отличный от нуля, то функция $\frac{1}{f(x)}$ ограничена в окрестности той же точки.

Теорема 5. Предел частного двух функций, имеющих пределы, равен частному пределов, если предел знаменателя отличен от нуля.

Теорема 6. Если $\alpha(x)$ есть функция бесконечно малая в окрестности точки $x = x_1$, то функция $\frac{1}{\alpha(x)}$ бесконечно большая в окрестности той же точки .

Замечательные пределы

Теорема 7. Предел отношения синуса бесконечно малой дуги к самой дуге, выраженной в радианах, равен единице, т.е. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ – первый замечательный предел.

Теорема 8. Предел последовательности $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e,\ e = 2{,}71828...$$

Теорема 9. Предел функции $f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ при $x \to \pm\infty$ равен числу e.

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e,\\ &\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e.\end{aligned}\right\}\text{ – второй замечательный предел.}$$

Раскрытие неопределенностей

В простейших случаях нахождение предела функции сводится к подстановке в аналитическое выражение, задающее эту функцию, предельного значения аргумента. Часто подстановка предельного значения аргумента приводит к неопределенным выражениям вида

$$\frac{0}{0};\ \frac{\infty}{\infty};\ 0\cdot\infty;\ \infty-\infty;\ 0^0;\ \infty^0;\ 1^\infty$$

Нахождение предела функции в этих случаях называется раскрытием неопределенности. Для раскрытия неопределенности приходится, прежде чем перейти к пределу, проводить преобразования данного выражения.

В последующих задачах показывается, какими приемами обычно пользуются при таких преобразованиях.

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-2x}$.

Решение. Прежде всего отметим, что при $x_1 = 2$ функция разрывна и непосредственная подстановка предельного значения аргумента приводит к неопределенному выражению вида $\frac{0}{0}$. Следовательно, прежде чем перейти к пределу, необходимо данное выражение

преобразовать. Разложив на множители числитель и знаменатель, вспомним, что $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$,
тогда $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)\cdot(x - 3)$ и $x^2 - 2x = x\cdot(x - 2)$, получим:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-2x} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-3)}{x\cdot(x-2)} = \lim_{x\to 2}\frac{x-3}{x} = -\frac{1}{2}.$$

Заметим, что аргумент x только стремится к своему предельному значению 2, но не совпадает с ним. Таким образом, разность $x - 2$, т.е. множитель, на который мы сокращаем, отличен от нуля при $x \to 2$.

Пример 2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1+x}}{x}$.

Решение. Подстановка $x = 0$ приводит к неопределенности вида $\dfrac{0}{0}$. Домножим на сопряженное к $1-\sqrt{1+x}$ числитель и знаменатель дроби:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-\sqrt{1+x})(1+\sqrt{1+x})}{x\cdot(1+\sqrt{1+x})} = \lim_{x\to 0}\frac{1-(\sqrt{1+x})^2}{x\cdot(1+\sqrt{1+x})} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-1-x}{x\cdot(1+\sqrt{1+x})} = \lim_{x\to 0}\frac{-1}{1+\sqrt{1+x}} = -\frac{1}{2}.$$

Пример 3. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{2x+1}}$.

Решение: Неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$, для ее раскрытия домножим на сопряженные к числителю и знаменателю:

$$\lim_{x\to 4}\frac{(2-\sqrt{x})(2+\sqrt{x})(3+\sqrt{2x+1})}{(3-\sqrt{2x+1})(3+\sqrt{2x+1})(2+\sqrt{x})} =$$

$$= \lim_{x\to 4}\frac{[2^2-(\sqrt{x})^2](3+\sqrt{2x+1})}{[3^2-(\sqrt{2x+1})^2](2+\sqrt{x})} = \lim_{x\to 4}\frac{(4-x)(3+\sqrt{2x+1})}{(9-2x-1)(2+\sqrt{x})} =$$

$$= \lim_{x\to 4}\frac{(4-x)(3+\sqrt{2x+1})}{2(4-x)(2+\sqrt{x})} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}.$$

Правило 1. Если неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$ образована рациональными или иррациональными функциями, нужно преобразовать подпредельную функцию таким образом, чтобы выделить в числителе и знаменателе множитель, предел которого равен нулю, и, сократив на него дробь, найти предел частного.

Правило 2. Для нахождения предела частного от деления двух рациональных или иррациональных функций при $x \to \infty$ нужно раскрыть неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$, для чего числитель и знаменатель подпредельной дроби необходимо разделить на высшую степень аргумента знаменателя и находить далее предел частного.

Результаты возможны следующие:

1) искомый предел равен отношению коэффициентов при старших степенях аргумента числителя и знаменателя, если эти степени одинаковы;

2) предел равен бесконечности, если степень аргумента числителя выше степени аргумента знаменателя;

3) предел равен нулю, если степень аргумента числителя ниже степени аргумента знаменателя.

Пример 4.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{6x^2-3x+2}{3x^2-7}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(6-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(3-\frac{7}{x^2}\right)}=\frac{6}{3}=2,\ \text{т.к.}\ \lim_{x\to\infty}\frac{3}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{7}{x^2}=0.$$

Пример 5.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x^3+1}}{x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^3\left(4+\frac{1}{x^3}\right)}}{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x\left(4+\frac{1}{x^3}\right)}}{\left(1-\frac{2}{x}\right)}=\infty.$$

Пример 6.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-7}}{\sqrt[4]{x^6+2x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\cdot\sqrt{1-\frac{7}{x^2}}}{x\cdot\sqrt[4]{x^2\left(1+\frac{2}{x^5}\right)}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0.$$

Пример 7. $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2+5x})$.

В этом примере неопределенность вида $\infty-\infty$. Этот случай нахождения предела нужно привести к случаю $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$. Домножим на сопряженное числитель и знаменатель, получим:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x-\sqrt{x^2+5x})(x+\sqrt{x^2+5x})}{(x+\sqrt{x^2+5x})}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-(x^2+5x)}{x+\sqrt{x^2\left(1+\frac{5}{x}\right)}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-5x}{x\left(1+\sqrt{1+\frac{5}{x}}\right)}=-\frac{5}{2}=-2,5.$$

Неопределенность 1^∞.

Пример 8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x-3}{4x+1}\right)^{2x-1}$ (неопределенность 1^∞).

Решение. Преобразуем выражение в скобках, выделив единицу

$\frac{4x-3}{4x+1}=\frac{4x+1-1-3}{4x+1}=\left(1+\frac{-4}{4x+1}\right)$, понимаем, что $\lim\limits_{x\to\infty}\left(-\frac{4}{4x+1}\right)=0$, т.е. $\frac{-4}{4x+1}=\frac{1}{y}$, тогда

$\frac{4x+1}{-4}=y$. Получаем $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x-3}{4x+1}\right)^{2x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-4}{4x+1}\right)^{\frac{4x+1}{-4}}\right]^{\frac{-4}{4x+1}\cdot(2x-1)}=$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-4(2x-1)}{4x+1}}=e^{-2}.$$

Эквивалентные бесконечно малые функции (б.м.ф.).

Применение б.м.ф. к вычислению пределов

Определение. Две бесконечно малые функции в окрестности точки $x = x_1$ α и β называются **эквивалентными** (равносильными), если предел их отношения в этой точке равен единице, т.е.

$$\lim_{x\to x_1}\frac{\beta}{\alpha}=1$$

Эквивалентность обозначается символом ~, т.е. пишут $\beta \sim \alpha$.

В окрестности точки $x = 0$

$\sin x \sim \operatorname{tg} x \sim \arcsin x \sim \operatorname{arctg} x \sim e^x - 1 \sim \ln(1+x) \sim x$.

Теорема 1. Предел отношения двух бесконечно малых функций в точке $x = x_1$ равен пределу отношения им эквивалентных бесконечно малых функций в той же точке .

Пример 9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x+\sin^2 x}{\sin 2x - x^3}$ (неопределенность $\dfrac{0}{0}$).

При $x \to 0$ $\sin x \sim x$, $\sin 2x \sim 2x$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x+\sin^2 x}{\sin 2x - x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{3x+x^2}{2x-x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x(3+x)}{x(2-x^2)}=1,5.$$

Пример 10. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin(x-2)}{x^2-4}$ (неопределенность $\dfrac{0}{0}$).

Так как при $x \to 2$, $x - 2 \to 0$ и $\sin(x-2) \sim x - 2$.

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sin(x-2)}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)(x+2)}=\frac{1}{4}.$$

Пример 11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} 2x}{5x}$ (неопределенность $\dfrac{0}{0}$).

При $x \to 0$ $\operatorname{arctg} 2x \sim 2x$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} 2x}{5x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{5x}=\frac{2}{5}.$$

Пример 12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{x\cdot \operatorname{tg} 3x}$ (неопределенность $\dfrac{0}{0}$).

Так как $1 - \cos 4x = 2\cdot\sin^2 2x$ (из формулы

$\sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$), при $x \to 0$ $\sin 2x \sim 2x$, $\operatorname{tg} 3x \sim 3x$, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{x\cdot \operatorname{tg} 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 2x}{x\cdot \operatorname{tg} 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{2(2x)^2}{x\cdot 3x}=\frac{8}{3}.$$

Пример 13. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{\arcsin(1-2x)}{4x^2-1}$ (неопределенность $\dfrac{0}{0}$).

Так как при $x \to \dfrac{1}{2}$ $1 - 2x \to 0$,

$\arcsin(1-2x) \sim 1 - 2x$,

получим $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{\arcsin(1-2x)}{4x^2-1}=\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{(1-2x)}{(2x-1)(2x+1)}=-\dfrac{1}{2}.$

Пример 14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-12x)}{e^{-6x}-1}$ (неопределенность $\dfrac{0}{0}$).

Так как при $x \to 0$ $\ln(1-12x) \sim -12x$, $e^{-6x}-1 \sim (-6x)$, получим

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1-12x)}{e^{-6x}-1}=\lim_{x\to0}\frac{-12x}{-6x}=2.$$

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-1}{x^2+1}$.

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-1}{x^2+1}$.

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x}{1-2x}$.

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-3x+2}{2x^2+4x+1}$.

5. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-2}{x^2-3x+2}$.

6. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-9}{x^2-2x-3}$.

7. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{3x+6}{x^3+8}$.

8. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-x-2}{x^3+1}$.

9. $\lim\limits_{x\to7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$.

10. $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\sqrt[3]{4x+7}-3}{x^2-x-20}$.

11. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt[3]{x-10}+2}{x^2-3x+2}$.

12. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin4x}{x}$.

13. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin\frac{x}{3}}{x}$.

14. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}x}{x}$.

15. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}$.

16. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos2x}{x\sin x}$.

17. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin3x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}$.

18. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{\arcsin(1-2x)}{4x^2-1}$.

19. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

20. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sin3x}$.

21. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin4x}{\sqrt{x+1}-1}$.

22. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\arcsin(x+2)}{x^2+2x}$.

23. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+3x}-x)$.

24. $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right)$.

25. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x})$.

26. $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{2}{x^3-8}\right)$.

27. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+3+\ldots(2n-1)}{n+3}-n\right)$.

28. $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-4x})$.

29. $\lim\limits_{x\to-2}\left(\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{4}{x^2-4}\right)$.

30. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x^2-x+1})$.

31. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+2+3+\ldots+n}{n+2}-\dfrac{n}{2}\right)$. **32.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)\operatorname{tg} x$.

33. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{\sin 5x}$. **34.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{1-5x}$.

35. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{\sin(x+1)}$. **36.** $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+x-2}{x^2+2x}$.

37. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\cos\frac{x}{2}}{x-\pi}$. **38.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(1-x)}{\sqrt{x}-1}$.

39. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1-10^n}{1+10^{n+1}}$. **40.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^4}{1-2x^4}-2^{\frac{1}{x}}\right)$.

41. $\lim\limits_{n\to-\infty}\dfrac{3-10^n}{2+10^{n+1}}$. **42.** $\lim\limits_{n\to-\infty}\left(1+\dfrac{4}{n}\right)^{n+3}$.

43. $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$. **44.** $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot[\ln(n+3)-\ln n]$.

45. $\lim\limits_{n\to-\infty}\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^{3n}$. **46.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-2}{3x+1}\right)^{2x}$.

47. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{-3x}-1}{x}$. **48.** $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot[\ln n-\ln(n+2)]$.

§ 7. Непрерывность функции

Определение 1. Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если она определена в этой точке и ее окрестности и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ или $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y = 0$.

Определение 2. Функция непрерывна на интервале (a, b), если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

Классификация точек разрыва

Если не выполнено определение непрерывности, то функция в точке x_0 терпит разрыв, причём:

а) если хотя бы один из односторонних пределов $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ или $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ бесконечен или не существует, то x_0 – точка разрыва второго рода;

б) если оба односторонних предела $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ конечны, но не равны между собой, то x_0 – точка неустранимого разрыва первого рода;

в) если оба односторонних предела $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ конечны и равны между собой, то x_0 – точка устранимого разрыва первого рода.

1. Построить график функции $y=\begin{cases}0{,}5x^2 & \text{при } |x|<2\\ 2{,}5 & \text{при } |x|=2\\ 3 & \text{при } |x|>2\end{cases}$ и указать точки её разрыва.

2. Найти точки разрыва и построить график функции $y=\dfrac{x^3-x^2}{2|x-1|}$.

3. Построить график функции $y=\begin{cases}2 & \text{при } x=0 \text{ и } x=\pm 2\\ 4-x^2 & \text{при } 0<|x|<2\\ 4 & \text{при } |x|>2\end{cases}$ и указать точки разрыва. Какие условия непрерывности выполнены в точках разрыва и какие нет?

4. Найти точки разрыва и построить графики функций:

1) $y=2-\dfrac{|x|}{x}$; 2) $y=2^{\frac{1}{x-2}}$; 3) $y=\dfrac{x^2+x}{2|x|}$.

§ 8. Производная

Производная и дифференциал

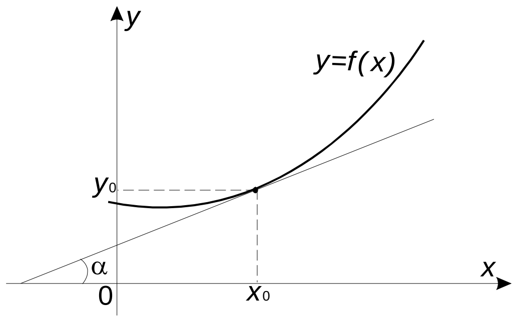
Определение 1. Производной функции $y = f(x)$ в точке x называется предел (если он существует и конечен) отношения приращения функции к приращению аргумента при условии, что последнее стремится к нулю.

Обозначается $y' = f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$.

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Геометрический смысл производной

Производная функции $y = f(x)$ в точке x_0 равна тангенсу угла, который образует касательная, проведенная к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0 с положительным направлением оси Ox. $f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$.



Операция нахождения производной называется дифференцированием функции. Функция называется дифференцируемой в некоторой точке, если она имеет в этой точке производную, и дифференцируемой на некотором множестве, если она дифференцируема в каждой точке этого множества.

Теорема 1. Если функция дифференцируема в некоторой точке, то она непрерывна в этой точке.

Основные правила дифференцирования

Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – функции, дифференцируемые в некоторой точке x_0, C – постоянная величина, тогда:

1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$;

2) $(C \cdot u)' = C \cdot u'$;

3) $(C)' = 0$;

4) $(u \cdot v)' = u' \cdot v + v' \cdot u$;

5) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$.

Производная сложной функции

Теорема 2. Пусть y – сложная функция x, т.е. $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$, или $y = f[\varphi(x)]$. Если $\varphi(x)$ и $f(u)$ – дифференцируемые функции своих аргументов соответственно в точках x и $u = \varphi(x)$, то сложная функция также дифференцируема в точке x и ее производная находится по формуле

$y'(x) = f'(u) \cdot \varphi'(x)$, или $y_x' = y_u' \cdot u_x'$.

Таблица производных

1) $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$;

2) $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$;

3) $(e^u)' = e^u \cdot u'$;

4) $(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \cdot \ln a}$;

5) $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$;

6) $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$;

7) $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$;

8) $(\mathrm{tg}\, u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$;

9) $(\mathrm{ctg}\, u)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$;

10) $(\arcsin u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$;

11) $(\arccos u)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$;

12) $(\mathrm{arctg}\, u)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$;

13) $(\mathrm{arcctg}\, u)' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$.

Замечание. Если $u = x$, то $u' = x' = 1$.

Примеры.

Найти производные от функций:

Пример 1. $y = 6\sqrt{x} + \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2}} - \dfrac{4}{x^2} + 6x - x^2 + 4$.

Преобразуем функцию, введя дробные и отрицательные показатели:

$$y = 6 \cdot x^{\frac{1}{2}} + x^{1-\frac{2}{3}} - 4 \cdot x^{-2} + 6x - x^2 + 4.$$

Вычислим y', используя правила 1, 2, 3 и формулу (1)

$$y' = 6 \cdot (x^{\frac{1}{2}})' + (x^{\frac{1}{3}})' - 4 \cdot (x^{-2})' + 6(x)' - (x^2)' + (4)' =$$

$$= 6 \cdot \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} + \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}-1} - 4 \cdot (-2x^{-2-1}) + 6 - 2 \cdot x^{2-1} =$$

$$= 3x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} + 8x^{-3} + 6 - 2x = \frac{3}{\sqrt{x}} + \frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{x^2}} + \frac{8}{x^3} - 2x + 6.$$

Пример 2. $y = \dfrac{4\sqrt{x}-1}{\operatorname{tg} x}$.

Применим правило 5 и формулы (1) и (8):

$$y' = \frac{(4\sqrt{x}-1)'\cdot\operatorname{tg} x - (\operatorname{tg} x)'\cdot(4\sqrt{x}-1)}{\operatorname{tg}^2 x} =$$

$$= \frac{4\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\cdot\operatorname{tg} x - \frac{1}{\cos^2 x}\cdot(4\sqrt{x}-1)}{\operatorname{tg}^2 x} = \frac{\frac{2}{\sqrt{x}}\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{4\sqrt{x}-1}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg}^2 x} =$$

$$= \frac{(2\sin x\cdot\cos x - 4 + \sqrt{x})\cos^2 x}{\sqrt{x}\cdot\cos^2 x\cdot\sin^2 x} = \frac{\sin 2x + \sqrt{x} - 4}{\sqrt{x}\cdot\sin^2 x}.$$

Пример 3. $y = 3^x \cdot (\log_3 x - x)$.

Применим правило 4 и формулы (2) и (4):

$y' = (3^x)' \cdot (\log_3 x - x) - 3^x \cdot (\log_3 x - x)' =$

$$= 3^x\cdot\ln 3(\log_3 x - 3) - 3^x\cdot\left(\frac{1}{x\ln 3} - 1\right) =$$

$$= \frac{3^x\cdot(x\ln^2 3\cdot\log_3 x - 3\cdot x\ln^2 3 - 1 + x\ln 3)}{x\ln 3}.$$

Пример 4. $y = 2x\cdot\sqrt{x} + \ln\sin x + 4^{3x}$.

Используем правила 1 и 2, применим теорему о производной сложной функции и по таблице производных имеем:

$$y' = 2(x^{\frac{3}{2}})' + (\ln\sin x)' + (4^{3x})' = 2\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\sin x}\cdot(\sin x)' +$$

$$+4^{3x}\cdot\ln 4\cdot(3x)' = 3\sqrt{x} + \frac{1}{\sin x}\cdot\cos x + 4^{3x}\cdot\ln 4\cdot 3 =$$

$$= 3\sqrt{x} + \operatorname{ctg} x + 3\ln 4\cdot 4^{3x}.$$

Пример 5. $y = 7^{\operatorname{arcctg} x - \sqrt{x}}$.

Воспользуемся формулой (2):

$$y' = 7^{\operatorname{arcctg} x-\sqrt{x}}\cdot\ln 7\cdot(\operatorname{arcctg} x - \sqrt{x})' = 7^{\operatorname{arcctg} x-\sqrt{x}}\cdot\ln 7\times$$

$$\times\left(\frac{-1}{1+x^2} - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right) = -7^{\operatorname{arcctg} x-\sqrt{x}}\cdot\ln 7\cdot\frac{2\sqrt{x}+1+x^2}{2(1+x^2)\sqrt{x}}.$$

Пример 6. $y = \sqrt{\sin^2 4x - x^2}$.

$$y' = ((\sin^2 4x - x^2)^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}(\sin^2 4x - x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(\sin^2 4x - x^2)' =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\sin^2 4x - x^2}}\cdot(2\sin 4x\cdot(\sin 4x)' - 2x) =$$

$$= \frac{2\sin 4x\cdot\cos 4x\cdot 4 - 2x}{2\sqrt{\sin^2 4x - x^2}} = \frac{4\sin 8x - 2x}{2\sqrt{\sin^2 4x - x^2}} = \frac{2\sin 8x - x}{\sqrt{\sin^2 4x - x^2}}.$$

Пример 7. $y = x^{2x}$.

Чтобы найти производную от показательно-степенной функции, необходимо ее предварительно прологарифмировать, например, по основанию e.

$\ln y = \ln x^{2x}$, т.к. $\ln x^n = n \ln x$, получим $\ln y = 2x \cdot \ln x$.

Теперь берем производную от обеих частей. Слева производную сложной функции, справа производную произведения.

$$\frac{1}{y} \cdot y' = 2 \cdot (x' \cdot \ln x + x \cdot (\ln x)') \Rightarrow \frac{1}{y} \cdot y' = 2\left(\ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right) \Rightarrow y' = 2y(\ln x + 1),$$

так как $y = x^{2x}$, $y' = 2x^{2x} \cdot (\ln x + 1)$.

Пример 8. $y = 3^{xy} + x^2$.

Дифференцируем обе части равенства, учитывая, что y есть функция от x:

$$y' = 3^{xy} \cdot \ln 3 \cdot (x \cdot y)' + 2x \Rightarrow y' = 3^{xy} \cdot \ln 3 \cdot (x' \cdot y + x \cdot y') + 2x \Rightarrow$$

$$y' = 3^{xy} \cdot \ln 3 \cdot (y + x \cdot y') + 2x \Rightarrow$$

$$y' = 3^{xy} \cdot \ln 3 \cdot y + x \cdot y' \cdot 3^{xy} \cdot \ln 3 + 2x \Rightarrow$$

$$y' \cdot (1 - x \cdot 3^{xy} \cdot \ln 3) = 3^{xy} \cdot \ln 3 \cdot y + 2x \Rightarrow$$

$$y' = \frac{3^{xy} \cdot \ln 3 \cdot y + 2x}{1 - x \cdot 3^{xy} \cdot \ln 3}.$$

Определение 2. Дифференциал функции равен ее производной, умноженной на дифференциал независимой переменной:

$$dy = y' \cdot dx,$$

дифференциал независимой переменной равен ее приращению

$$dx = \Delta x$$

При достаточно малых значениях $|\Delta x|$

$$\Delta y \approx dy$$

Из этого следует формула приближенного вычисления

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$$

Примеры.

Пример 9. Найти дифференциал от функции $y = e^{-x}(x^2 - 1)$.

Сначала найдем y'.

$$y' = (e^{-x})' \cdot (x^2 - 1) + (e^{-x}) \cdot (x^2 - 1)' =$$

$$= (e^{-x}) \cdot (-x)' \cdot (x^2 - 1) + e^{-x} \cdot 2x = e^{-x} \cdot (-x^2 + 1 + 2x)$$

$$dy = y' \cdot dx$$

$$dy = e^{-x} \cdot (2x + 1 - x^2)dx$$

Пример 10. Вычислить приближенное значение функции $y = x^7 - 3x^4 + 4x^3 - 2$ при $x = 1{,}002$.

Пусть $x_0 = 1$, тогда $\Delta x = 0{,}002$. Найдем y'.

$$y' = 7x^6 - 12x^3 + 12x^2$$

Найдем значение функции и ее производной в точке $x_0 = 1$:

$$f(1) = 1 - 3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 - 2 = 0,$$

$$f'(1) = 7 \cdot 1 - 12 \cdot 1 + 12 \cdot 1 = 7,$$

$$f(1{,}002) \approx f(1) + f'(1) \cdot \Delta x \Rightarrow$$

$$f(1{,}002) \approx 0 + 7 \cdot 0{,}002 = 0{,}014$$

Определение 3. Производной n-го порядка называется первая производная от производной $(n$-1)-го порядка.

Обозначается $y^{(n)} = \dfrac{d^n y}{dx^n} = f^{(n)}(x)$.

Пример 11. Найти производную третьего порядка от функции $y = x^2 \cdot e^x$.

Найдем y':

$$y' = (x^2)' \cdot e^x + x^2 \cdot (e^x)' = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = e^x \cdot (x^2 + 2x)$$

Найдем y''.

$$y'' = (y')' = (e^x)' \cdot (x^2 + 2x) + e^x \cdot (x^2 + 2x)' = e^x \cdot (x^2 + 2x + 2x + 2) = e^x \cdot (x^2 + 4x + 2)$$

Затем найдем y'''.

$$y''' = (y'')' = e^x \cdot (x^2 + 4x + 2) + e^x \cdot (2x + 4) = e^x \cdot (x^2 + 6x + 6)$$

Найти производные функций:

1. $y = \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x - 5.$

2. $y = \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{2x^3}{3} + x.$

3. $y = x + 2\sqrt{x}.$

4. $y = \dfrac{10}{x^3}.$

5. $y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}.$

6. $y = x + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{5x^5}.$

7. $y = 3x - 6\sqrt{x}.$

8. $y = 6\sqrt[3]{x} - 4\sqrt[4]{x}.$

9. $y = \dfrac{1}{2x^2} - \dfrac{1}{3x^3}.$

10. $y = \dfrac{8}{\sqrt[4]{x}} - \dfrac{6}{\sqrt[3]{x}}.$

11. $y = x - \sin x.$

12. $y = x - \operatorname{tg} x.$

13. $y = x^2 \cos x.$

14. $y = x^2 \operatorname{ctg} x.$

15. $y = \dfrac{\cos x}{x^2}.$

16. $y = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}.$

17. $y = \dfrac{x}{1 - 4x}.$

18. $y = \dfrac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{x}}.$

19. $y = \dfrac{\cos x}{1 - \sin x}.$

20. $y = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1}.$

21. $s = \dfrac{gt^2}{2}.$

22. $x = a(t - \sin t).$

23. $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - x^2 + x;$ вычислить $f'(0),\ f'(1),\ f'(-1).$

24. $f(x) = x^2 - \dfrac{1}{2x^2};$ вычислить $f'(2) - f'(-2).$

25. $f(x) = \dfrac{x}{2x - 1};$ найти $f'(0),\ f'(2),\ f'(-2).$

26. $y = \sin 6x.$

27. $y = \sin\dfrac{x}{2} + \cos\dfrac{x}{2}.$

28. $y = \sqrt{2x - \sin 2x}.$

29. $y = \sin^2 x.$

30. $y = \sin^3 x + \cos^3 x.$

31. $y = \operatorname{tg}^3 x - 3\operatorname{tg} x + 3x.$

32. $y=\sin\sqrt{x}$.

33. $y=\dfrac{1}{(1+\cos 4x)^5}$.

34. $y=\dfrac{\sin^2 x}{\cos x}$.

35. $y=x\sqrt{x^2-1}$.

36. $y=\dfrac{\sqrt{2x-1}}{x}$.

37. $y=\dfrac{1+\sin 2x}{1-\sin 2x}$.

38. $y=x\ln x$.

39. $y=\dfrac{1+\ln x}{x}$.

40. $y=\lg 5x$.

41. $y=\ln x-\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{2x^2}$.

42. $y=\ln(x^2+2x)$.

43. $y=\ln(1+\cos x)$.

44. $y=\ln\sin x-\dfrac{1}{2}\sin^2 x$.

45. $y=x^2+3^x$.

46. $y=x^2 2^x$.

47. $y=x^2e^x$.

48. $y=\ln\cos x-\dfrac{1}{2}\cos^2 x$.

49. $y=\dfrac{1}{2}\ln \operatorname{tg} x+\ln\cos x$.

50. $y=\ln(e^{2x}+\sqrt{e^{4x}+1})$.

51. $y=\sqrt{1-x^2}+\arcsin x$.

52. $y=x-\operatorname{arctg} x$.

53. $y=\arcsin\sqrt{1-4x}$.

54. $y=\arccos(1-2x)$.

55. $y=x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x$.

56. $y=\arcsin e^{3x}$.

57. $y=\arcsin\sqrt{x}$.

58. $y=\operatorname{arctg}\sqrt{6x-1}$.

59. $y=\arccos(1-x^2)$.

60. $y=\operatorname{arcctg} x-\dfrac{1}{x}$.

61. $y=e^x\sqrt{1-e^{2x}}+\arcsin e^x$.

62. $y=x\arccos x-\sqrt{1-x^2}$.

63. $s=\sqrt{4t-t^2}+4\arcsin\dfrac{\sqrt{t}}{2}$.

64. $y=\arccos\sqrt{1-2x}+\sqrt{2x-4x^2}$.

65. $y=\operatorname{sh}^2 x$.

66. $y=x-\operatorname{th} x$.

67. $y=2\sqrt{\operatorname{ch} x-1}$.

68. $F(x)=\dfrac{\cos^2 x}{1+\sin^2 x}$; показать, что $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)-3F'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=3$.

69. Показать, что функция $x=\dfrac{t-e^{-t^2}}{2t^2}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $t\dfrac{dx}{dt}+2x=e^{-t^2}$.

Геометрический смысл производной

70. Написать уравнение касательной к кривой $y=\dfrac{x^3}{3}$ в точке $x=-1$. Построить кривую и касательную.

71. Написать уравнение касательной к кривой $y=\dfrac{8}{4+x^2}$ в точке $x=2$. Построить кривую и касательную.

72. Под каким углом пересекаются кривые $2y=x^2$ и $2y=8-x^2$?

73. В какой точке касательная к параболе $y=x^2+4x$ параллельна оси Ox?

74. В какой точке параболы $y=x^2-2x+5$ нужно провести касательную, чтобы она была перпендикулярна к биссектрисе первого координатного угла?

Производные высших порядков

75. Найти производную второго порядка функции:

1) $y=\sin^2 x$; 2) $y=\operatorname{tg} x$; 3) $y=\sqrt{1+x^2}$.

76. Найти производную третьего порядка функции:

1) $y=\cos^2 x$; 2) $y=\dfrac{1}{x^2}$; 3) $y=x\sin x$;

4) $y=x\ln x$; 5) $s=te^{-t}$; 6) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a}$.

77. По формуле Лейбница найти производную третьего порядка функции:

1) $y=x^3e^x$; 2) $y=x^2\sin\dfrac{x}{a}$.

78. Показать, что функция $y=e^x\cos x$ удовлетворяют дифференциальному уравнению $y^{\mathrm{IV}}+4y=0$.

Производная неявной функции

Найти y' из уравнений:

79. $x^2+y^2=a^2$. **80.** $y^2=2px$.

81. $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$. **82.** $e^x\sin y-e^{-y}\cos x=0$.

83. $x=y+\operatorname{arctg} y$. **84.** $e^{xy}-x^2+y^3=0$.

85. Написать уравнения касательных к астроиде $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ в точках пересечения её с прямой $y=x$.

86. Написать уравнения касательных к окружности $x^2+y^2+4x-4y+3=0$ в точках пересечения её с осью Ox. Построить окружность и касательные.

Дифференциал функции

Найти дифференциалы функций:

87. $y = x^3 - 3x^2 + 3x.$ **88.** $y = \sqrt{1 + x^2}.$

89. $s = \dfrac{gt^2}{2}.$ **90.** $d(\sin^2 t).$

91. $d(1 - \cos u).$

92. 1) $y = x^2;$ найти приближённо изменение y $(\Delta y \approx dy),$ когда x изменяется от 2 до 2,01; 2) $y = \sqrt{x};$ найти приближённо изменение y, когда x изменяется от 100 до 101.

93. 1) Сторона куба $x = 5 \pm 0{,}01$ м. Определить абсолютную и относительную погрешность при вычислении объёма куба.

2) Длина телеграфного провода $s = 2b\left(1 + \dfrac{2f^2}{3b^2}\right),$ где $2b$ – расстояние между точками подвеса, а f – наибольший прогиб. На сколько увеличится прогиб f, когда провод от нагревания удлинится на ds.

Производная функции, заданной параметрически

Найти y'_x:

94. $x = a\cos t,$ $y = a\sin t.$

95. $x = a\cos^3 t,$ $y = a\sin^3 t.$

96. $x = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2},$ $y = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}.$

97. $x = \operatorname{tg} t,$ $y = \cos^2 t.$

98. Написать уравнение касательной к циклоиде $x = a(t - \sin t),$ $y = a(1 - \cos t)$ в точке, где $t = \dfrac{\pi}{2}.$ Построить кривую и касательную.

Найти $\dfrac{d^2 y}{dx^2}$ из уравнений:

99. $x = a\cos t,$ $y = a\sin t.$

100. $x = t^2,$ $y = \dfrac{t^3}{3} - t.$

101. $x = a(t - \sin t),$ $y = a(1 - \cos t).$

102. $x = 2\cos t,$ $y = \sin t.$

103. $x = t^2,$ $y = t + t^2.$

104. $x = e^{2t},$ $y = e^{3t}.$

§ 9. Приложения производной

Правило Лопиталя. Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ дифференцируемы в некоторой окрестности точки x_0, за исключением, быть может, самой точки x_0, причем в этой окрестности $\varphi'(x)\neq 0$, и если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=0$ или $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\infty$, то $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$.

Таким образом, для неопределенностей $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$ предел отношения двух функций равен пределу отношения их производных, если последний существует (конечный или бесконечный).

Замечание. Символ x_0 может быть как конечным числом, так и бесконечностью.

Пример 1. Вычислить $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-16}{x^3+5x^2-6x-16}$.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^4-16}{x^3+5x^2-6x-16}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{(x^4-16)'}{(x^3+5x^2-6x-16)'}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{4x^3}{3x^2+10x-6}=\frac{32}{26}=\frac{16}{13}.$$

Пример 2. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{\ln(1+x)}$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\ln(1+x)}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x'}{(\ln(1+x))'}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{1+x}}=\lim_{x\to\infty}(1+x)=\infty.$$

Определение 1. Функция $y=f(x)$ называется возрастающей на интервале (a, b), принадлежащем области определения функции, если большему значению аргумента соответствует большее значение функции, т.е. если $x_2>x_1 \Rightarrow f(x_2)>f(x_1)$.

Определение 2. Функция $y=f(x)$ называется убывающей на интервале (a, b), если большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции,
т.е. если $x_2>x_1 \Rightarrow f(x_2)<f(x_1)$.

Функции убывающие или возрастающие на некотором интервале называются монотонными.

Теорема 1 (достаточный признак возрастания функции).
Если во всех точках интервала $f'(x)>0$, то функция $f(x)$ возрастает на этом интервале.

Теорема 2 (достаточный признак убывания функции).
Если во всех точках интервала $f'(x)<0$, то $f(x)$ убывает на этом интервале.

Определение 3. Функция $y=f(x)$ имеет минимум в точке x_0, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех $x\neq x_0$ из этой окрестности $f(x_0)<f(x_0+\Delta x)$, $(\Delta x\neq 0)$.

Определение 4. Функция $y=f(x)$ имеет максимум в точке x_0, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех $x\neq x_0$ из этой окрестности $f(x_0)>f(x_0+\Delta x)$, $(\Delta x\neq 0)$.

Точки минимума и максимума функции называются точками экстремума.

Теорема 3 (необходимый признак экстремума).
Если функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и имеет в этой точке экстремум, то ее производная при $x=x_0$ обращается в нуль: $f'(x_0)=0$.

Следствие. Функция может иметь экстремум лишь в тех точках, где производная равна нулю, либо в тех точках области определения, где производная не существует. Такие точки называются критическими точками I-го рода.

Теорема 4 (первый достаточный признак экстремума).
Если при переходе через критическую точку I-го рода первая производная меняет знак с "+" на "–", то в этой точке максимум, если она меняет знак с "–" на "+", то минимум.

Теорема 5 (второй достаточный признак экстремума).
Пусть функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема в точке x_0 и пусть выполняются условия $f'(x_0) = 0$ и $f''(x_0) \neq 0$, тогда $f(x)$ имеет минимум в точке x_0, если $f''(x_0) > 0$, и максимум, если $f''(x_0) < 0$.
Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значения функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$:
1) найти критические точки внутри $[a, b]$;
2) вычислить значение функции в этих точках и на границе области $f(a)$ и $f(b)$;
3) выбрать среди этих значений наибольшее и наименьшее.

Определение 5. График функции называется выпуклым в интервале (a,b), если в этом интервале он расположен ниже любой своей касательной, и вогнутым, если в этом интервале он расположен выше любой своей касательной.

Теорема 6 (достаточный признак вогнутости-выпуклости графика). Если для функции
$y = f(x)$ во всех точках интервала (a, b) $f''(x) > 0$, то кривая вогнута на этом интервале, и если $f''(x) < 0$, то выпукла.

Определение 6. Точки графика непрерывной функции, в которых изменяется выпуклость на вогнутость или наоборот, называются точками перегиба.

Теорема 7 (достаточный признак существования точки перегиба). Если в точке x_0 функция $y = f(x)$ имеет первую производную $f'(x_0)$, а $f''(x_0) = 0$ или не существует и $f''(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак, то точка $(x_0; f(x_0))$ является точкой перегиба графика функции
$y = f(x)$.

Определение 7. Прямая называется асимптотой кривой, если расстояние от переменной точки M кривой до этой прямой стремится к нулю при неограниченном удалении точки M от начала координат по какой-либо ветви кривой.

Вертикальные асимптоты: прямая $x = a$ является вертикальной асимптотой $\Leftrightarrow$ когда выполняется одно из условий: $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \pm\infty$ или $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \pm\infty$.

Горизонтальные асимптоты: прямая $y = b$ является горизонтальной асимптотой $\Leftrightarrow$ когда $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$ или $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$.

Наклонные асимптоты: для того, чтобы кривая $y = f(x)$ имела асимптоту $y = kx + b$ $\Leftrightarrow$ чтобы существовали конечные пределы:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x};\ b = \lim_{x\to\infty}[f(x) - kx] \text{ или}$$

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x};\ b = \lim_{x\to-\infty}[f(x) - kx].$$

Замечание. Горизонтальная асимптота является частным случаем наклонной.
В примере 3 исследовать функцию и построить её график.

Пример 3. Исследовать функцию $y = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$ построить её график.

Исследование будем проводить по следующей схеме:

1) найти область определения функции и исследовать ее поведение на границах области; 2) исследовать функцию на непрерывность; 3) определить, является ли данная функция четной, нечетной; 4) найти интервалы возрастания и убывания функции и точки ее экстремума; 5) найти интервалы выпуклости и вогнутости графика функции и точки перегиба; 6) найти асимптоты графика функции.

1. Областью определения функции D является вся числовая прямая, за исключением точки с абсциссой $x = 1$, в которой знаменатель функции обращается в нуль, т.е.

D: $(-\infty; 1)\cup(1; \infty)$.

а) $x\to -\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} y=-\infty$;

б) $x\to1-0$; $\lim\limits_{x\to1-0}\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to1-0} y=-\infty$;

в) $x\to1+0$; $\lim\limits_{x\to1+0}\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}=\infty$; $\lim\limits_{x\to1+0} y=\infty$;

г) $x\to\infty$; $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}=\infty$; $\lim\limits_{x\to\infty} y=\infty$.

2. Функция непрерывна во всей области определения, как частное двух непрерывных функций.

3. Если функция четная, то выполняется равенство $f(-x) = f(x)$, если нечетная, то выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$, если ни одно из этих равенств не выполняется, то функция не является ни четной, ни нечетной.

Найдем $f(-x)$:

$$f(-x)=\frac{(-x)^2-2\cdot(-x)+2}{-x-1}=\frac{x^2+2x+2}{-x-1}$$

$f(-x) \neq f(x)$ и $f(-x) \neq -f(x)$, значит, функция ни четная, ни нечетная.

4. Для нахождения точек экстремума найдем критические точки функции, т.е. те точки, в которых первая производная обращается в нуль или не существует.

$$y'=\frac{2x^2-4x+2-x^2+2x-2}{(x-1)^2};\ \ y'=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

Производная не существует только при $x = 1$, где функция не определена, найдем значения x, при которых она обращается в нуль.

$$y'=0\Leftrightarrow\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}=0\Leftrightarrow\begin{matrix}x=0\ \text{ или}\\ x-2=0\end{matrix}\Leftrightarrow\begin{matrix}x=0\\ x=2\end{matrix}$$

Вычислим значение функции при $x = 0$ и $x = 2$:

$$y=\left.\frac{x^2-2x+2}{x-1}\right|_{x=0}=-2$$

$$y=\left.\frac{x^2-2x+2}{x-1}\right|_{x=2}=2$$

Получили две критические точки $A_1(0; -2)$ и $A_2(2; 2)$, которые проверим на экстремум с помощью первого достаточного признака. Для этого исследуем, как ведет себя первая производная этой функции при переходе через критические точки.

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; 1)$	1	$(1; 2)$	2	$(2; \infty)$
y'	+	0	–	не сущ.	–	0	+
y	$\nearrow$	макс.	$\searrow$	не сущ.	$\searrow$	мин.	$\nearrow$

При переходе через точку A_1 производная меняет знак с "+" на "–", значит в этой точке максимум функции, а при переходе через точку A_2 – с "–" на "+", значит в этой точке функция достигает своего минимума. Там, где производная положительна, функция возрастает, где отрицательна – убывает.

5. Для определения точек перегиба и направления вогнутости функции найдем вторую производную: $y'' = \left[\dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2}\right]'$; $y'' = \dfrac{2}{(x-1)^3}$

Вторая производная нигде не обращается в нуль, поэтому точек перегиба у функции нет. Знак второй производной зависит от знака ее знаменателя:

$y'' > 0$, если $(x-1)^3 > 0$, т.е. $x > 1$;

$y'' < 0$, если $(x-1)^3 < 0$, т.е. $x < 1$.

Таким образом, функция вогнута на интервале $(1; \infty)$ и выпукла на интервале $(-\infty; 1)$.

6. Определим, имеет ли функция асимптоты. Вернемся к исследованиям в пункте 1: из 1а, 1г по определению следует, что горизонтальных асимптот у функции нет; из 1б, 1в также по определению следует, что $x = 1$ является вертикальной асимптотой функции.

Для того, чтобы существовала наклонная асимптота $y = ax + b$, необходимо существование конечного отличного от нуля предела $a = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{y}{x}$:

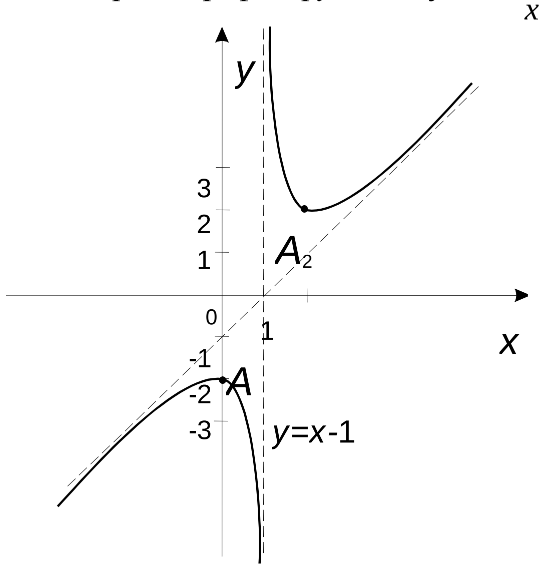
$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 2x + 2}{x^2 - x} = 1$$

b определяется по формуле $b = \lim\limits_{x\to\infty}(y - ax)$:

$$b = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 2x + 2}{x-1} - x = \lim_{x\to\infty} \frac{-x+2}{x-1} = -1.$$

Таким образом, наклонная асимптота существует и имеет вид $y = x - 1$.

По полученным исследованиям строим график функции $y = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x-1}$.



1. Зенитный снаряд выброшен вертикально вверх с начальной скоростью a м/с. На какой высоте x он будет через t секунд? Определить скорость и ускорение движения снаряда. Через сколько секунд снаряд достигнет наивысшей точки и на каком расстоянии от земли?

2. Тело движется по прямой Ox по закону $x = \frac{t^3}{3} - 2t^2 + 3t$. Определить скорость и ускорение движения. В какие моменты тело меняет направление движения?

3. Колесо радиуса a катиться по прямой. Угол φ поворота колеса за t секунд определяется уравнением $\varphi = t + \frac{t^2}{2}$. Определить скорость и ускорение центра колеса.

4. Тело с высоты 10 м брошено вертикально вверх с начальной скоростью 20 м/с. На какой высоте x оно будет через t секунд? Определить скорость и ускорение движения. Через сколько секунд тело достигнет наивысшей точки и на какой высоте?

5. Зависимость между количеством x вещества, получаемого в некоторой химической реакции, и временем t выражается уравнением $x = A(1 - e^{-kt})$. Определить скорость реакции.

Найти пределы, используя правило Лопиталя:

6. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{x}$.

7. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\sin 2x}$.

8. $\lim\limits_{x\to a} \frac{x - a}{x^n - a^n}$.

9. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x - 1}{\ln x}$.

10. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1 - \cos ax}{1 - \cos bx}$.

11. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^3}$.

12. $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{e^x}{x^3}$.

13. $\lim\limits_{x\to \pi} (\pi - x)\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

14. $\lim\limits_{x\to 0} x \ln x$.

15. $\lim\limits_{x\to +\infty} x^n e^{-x}$.

16. $\lim\limits_{x\to 0} x^x$.

17. $\lim\limits_{x\to 0} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$.

18. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x$.

19. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x \sin x} - \frac{1}{x^2}\right)$.

Найти экстремумы функций:

20. $y = \frac{x^3}{3} + x^2$.

21. $y = x^3 + 6x^2 + 9x$.

22. $y = \frac{x^2}{x - 2}$.

23. Решёткой длиной 120 м нужно огородить прилегающую к дому прямоугольную площадку наибольшей площади. Определить размеры прямоугольной площадки.

24. Из квадратного листа картона со стороной a вырезаются по углам одинаковые квадраты и из оставшейся части склеивается прямоугольная коробка.

Какова должна быть сторона вырезаемого квадрата, чтобы объём коробки был наибольшим?

25. Определить размер открытого бассейна с квадратным дном объёмом 32 м^3 так, чтобы на облицовку его стен и дна пошло наименьшее количество материала.

26. В конус с радиусом основания 4 дм и высотой 6 дм вписан цилиндр наибольшего объёма. Найти этот объём.

Провести полное исследование функции и построить её график:

27. $y = \dfrac{x^3}{3} - x^2 - 3x.$ **28.** $y = \dfrac{x}{2} + \dfrac{2}{x}.$

29. $y = \dfrac{1}{1+x^2}.$ **30.** $y = x - \ln x.$

§ 10. Неопределенный интеграл

Определение 1. Функция $F(x)$ называется первообразной от функции $f(x)$, если $F'(x) = f(x)$ или $dF(x) = f(x)dx$.

Отыскание функции $F(x)$ по ее производной (дифференциалу) называется интегрированием.

Всякая непрерывная функция $f(x)$ имеет бесконечное множество различных первообразных функций, которые отличаются друг от друга на постоянную.

Определение 2. Неопределенным интегралом от функции $f(x)$ называется совокупность всех ее первообразных и обозначается

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Свойства неопределенного интеграла:

1) $(\int f(x)dx)' = f(x)$ или $d\int f(x)dx = f(x)dx$;

2) $\int F'(x)dx = F(x) + C$ или $\int dF(x) = F(x) + C$;

3) $\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx$, т.е. постоянный множитель можно выносить за знак интеграла;

4) $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$, т.е. интеграл от алгебраической суммы равен сумме интегралов от всех слагаемых.

Основные формулы интегрирования

1. $\int u^{\alpha} du = \dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1;$

2. $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + C;$

3. $\int a^u du = \dfrac{a^u}{\ln a} + C;$

4. $\int e^u du = e^u + C;$

5. $\int \sin u du = -\cos u + C;$

$$6.\int \cos u du = \sin u + C;$$

$$7.\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C;.$$

$$8.\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C;$$

$$9.\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C;$$

$$10.\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C;$$

$$11.\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln |u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C;$$

$$12.\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C.$$

В этих формулах a и α постоянны, а u – независимая переменная или любая дифференцируемая функция от независимой переменной.

Найти интегралы:

Пример 1. $\int \left(6x^3 - \frac{3x}{\sqrt[3]{x}} + 4x \cdot \sqrt[5]{x} - 2 + \frac{5}{x} \right) dx = J$.

Преобразуем подынтегральную функцию и воспользуемся свойствами 2, 3, и 4:

$$J = 6\int x^3 dx - 3\int x^{1-\frac{1}{3}} dx + 4\int x^{1+\frac{1}{5}} dx - 2\int dx + 5\int \frac{dx}{x} = 6\frac{x^{3+1}}{3+1} -$$

$$-3\frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} - 4\frac{x^{\frac{6}{5}+1}}{\frac{6}{5}+1} - 2x + 5\ln|x| + C = \frac{3}{2}x^4 - \frac{9}{5}x^{\frac{5}{3}} - \frac{20}{11}x^{\frac{11}{5}} - 2x +$$

$$+5\ln|x| + C = \frac{3}{2}x^4 - \frac{9}{5}x \cdot \sqrt[3]{x^2} - \frac{20}{11}x^2 \cdot \sqrt[5]{x} - 2x + 5\ln|x| + C.$$

(Использовали табличные интегралы 1 и 2.

Пример 2.

$$\int \frac{3\sqrt{x} - x\sin x}{x} dx = \int (3x^{\frac{1}{2}-1} - \sin x) dx = 3\int x^{-\frac{1}{2}} dx - \int \sin x dx =$$

$$= 3\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + \cos x + C = 6\sqrt{x} + \cos x + C.$$

Интегрирование методом внесения под знак дифференциала

Из определения дифференциала и таблицы производных следуют формулы:

Таблица дифференциалов

1) $dx = d(x + c)$;	8) $e^x dx = de^x$;
2) $dx = \frac{1}{a} d(ax + b)$;	9) $\cos x dx = d\sin x$;
3) $xdx = \frac{1}{2} dx^2$;	10) $\sin x dx = -d\cos x$;

4) $x^2dx = \frac{1}{3}dx^3$;

5) $x^n dx = \frac{1}{n+1}dx^{n+1}$;

6) $\frac{dx}{x} = d\ln|x|$;

7) $a^x dx = \frac{da^x}{\ln a}$;

11) $\frac{dx}{\cos^2 x} = d\,\mathrm{tg}\,x$;

12) $\frac{dx}{\sin^2 x} = -d\,\mathrm{ctg}\,x$;

13) $\frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} d\,\mathrm{arctg}\,x; \\ -d\,\mathrm{arcctg}\,x; \end{cases}$

14) $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} d\arcsin x; \\ -d\arccos x. \end{cases}$

Пример 3. Найти интеграл $\int (2x+3)^{11}dx$.

$$\int (2x+3)^{11}dx = \left| dx = \frac{1}{2}d(2x+3) \right| = \frac{1}{2}\int (2x+3)^{11}d(2x+3) =$$

$$\frac{1}{2}\frac{(2x+3)^{12}}{12} + C = \frac{(2x+3)^{12}}{24} + C.$$

Пример 4. Найти интеграл $\int \sin^2 x \cdot \cos x dx$.

$$\int \sin^2 x \cos x\, dx = \left|\cos x dx = d\sin x\right| = \int (\sin x)^2 \cdot d\sin x =$$

$$= \frac{(\sin x)^3}{3} + C = \frac{\sin^3 x}{3} + C.$$

Пример 5. Найти интеграл $\int \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$.

$$\int \frac{e^x dx}{1+e^{2x}} = \left| e^x dx = d(e^x) \right| = \int \frac{d(e^x)}{1+(e^x)^2} = \mathrm{arctg}\, e^x + C.$$

Пример 6. Найти интеграл $\int e^{x^3} x^2 dx$.

$$\int e^{x^3} x^2 dx = \left| x^2 dx = \frac{1}{3}dx^3 \right| = \frac{1}{3}\int e^{x^3} dx^3 = \frac{1}{3}e^{x^3} + C.$$

Пример 7. Найти интеграл $\int \frac{\sqrt{\ln x}dx}{x}$.

$$\int \frac{\sqrt{\ln x}dx}{x} = \left| \frac{dx}{x} = d\ln x \right| = \int (\ln x)^{\frac{1}{2}} d\ln x = \frac{(\ln x)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2}{3}\sqrt{\ln^3 x} + C.$$

Пример 8. Найти интеграл $\int \frac{\cos x dx}{3+5\sin x}$.

$$\int \frac{\cos x dx}{3+5\sin x} = \left|\cos x dx = d\sin x\right| = \int \frac{d\sin x}{3+5\sin x} =$$

$$= \frac{1}{5}\int \frac{d(3+5\sin x)}{3+5\sin x} = \frac{1}{5}\ln|3+5\sin x| + C.$$

Метод подстановки (замены переменной)

Замена переменной в неопределенном интеграле производится с помощью подстановок двух видов:

1) $x = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ – монотонная, непрерывно дифференцируемая функция новой переменной t. Формула замены переменной в этом случае имеет вид:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt$$

2) $u = \psi(x)$, где u – новая переменная. Формула замены переменной при такой подстановке:

$$\int f(\psi(x))\psi'(x)dx = \int f(u)du$$

Замечание. Очевидно, что метод внесения под знак интеграла и второй вид подстановки практически один и тот же.

Пример 9. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$, результат интегрирования проверить дифференцированием.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}} = \left| \begin{array}{ll} \sqrt{1+e^x} = z & x = \ln(z^2-1) \\ (1+e^x) = z^2 & dx = d(\ln(z^2-1)) \\ e^x = z^2-1 & dx = \frac{1}{z^2-1} \cdot 2zdz \end{array} \right| = \int \frac{2zdz}{z(z^2-1)} =$$

$$= 2\int \frac{dz}{(z^2-1)} = \ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right| + C = \ln\left|\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right| + C.$$

Проверка:

$$\left(\ln\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1} + C\right)' = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right)} \cdot \left(\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right)' =$$

$$= \frac{\sqrt{1+e^x}+1}{\sqrt{1+e^x}-1} \cdot \frac{\frac{1}{2\sqrt{1+e^x}} \cdot e^x(\sqrt{1+e^x}+1) - \frac{1}{2\sqrt{1+e^x}} \cdot e^x(\sqrt{1+e^x}-1)}{(\sqrt{1+e^x}+1)^2} =$$

$$= \frac{\frac{e^x}{2\sqrt{1+e^x}}(\sqrt{1+e^x}+1-\sqrt{1+e^x}+1)}{(\sqrt{1+e^x}+1)(\sqrt{1+e^x}-1)} =$$

$$= \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}(e^x+1-1)} = \frac{1}{\sqrt{e^x+1}}.$$

Верно!

Пример 10. Найти интеграл $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^2 x}} dx$.

$$\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^2 x}} dx = \left| \begin{array}{ll} 1+\cos^2 x = z & 2\cos x \cdot (-\sin x)dx = dz \\ d(1+\cos^2 x) = dz & -\sin 2xdx = dz \\ (1+\cos^2 x)'dx = dz & \sin 2xdx = -dz \end{array} \right| =$$

$$=-\int\frac{dz}{\sqrt{z}}=-\int z^{-\frac{1}{2}}dz=-\frac{z^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C=-2\sqrt{z}+C=-2\sqrt{1+\cos^2 x}+C.$$

Интегрирование по частям

Интегрированием по частям называется нахождение интеграла по формуле $\int udv = u\cdot v - \int vdu$, где $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – непрерывно дифференцируемые функции от x. С помощью этой формулы $\int udv$ сводится к отысканию другого интеграла $\int vdu$. Применение этой формулы нужно в тех случаях, когда последний интеграл либо проще исходного, либо ему подобен. При этом за u берется такая функция, которая при дифференцировании упрощается, а за dv – та часть подынтегрального выражения, интеграл от которой известен или может быть найден.

Так, например, для интегралов $\int P(x)\,a^{\alpha x}dx$, $\int P(x)\,e^{\alpha x}dx$, $\int P(x)\sin\alpha x dx$, $\int P(x)\cos\alpha x dx$, где $P(x)$ – многочлен, за u следует принять $P(x)$, а за dv – соответственно выражения $a^{\alpha x}dx$, $e^{\alpha x}dx$, $\sin\alpha x dx$, $\cos\alpha x dx$; для интегралов вида $\int P(x)\ln\alpha x dx$, $\int P(x)\arcsin x dx$, $\int P(x)\,\mathrm{arctg}\, x dx$ за u принимается соответственно функции $\ln\alpha x$, $\arcsin x$, $\mathrm{arctg}\, x$, а за dv – $P(x)dx$.

Пример 11. Найти интеграл $\int(3-2x)\sin\frac{x}{2}dx$.

$$\int(3-2x)\sin\frac{x}{2}dx=\begin{vmatrix} u=3-2x & du=u'dx=(3-2x)'dx=-2dx \\ dv=\sin\frac{x}{2}dx & v=\int dv=\int\sin\frac{x}{2}dx=-2\cos\frac{x}{2}\end{vmatrix}=$$

$$=-2(3-2x)\cos\frac{x}{2}-\int\left(-2\cos\frac{x}{2}\right)\cdot(-2dx)=(4x-6)\cos\frac{x}{2}-$$

$$-4\int\cos\frac{x}{2}dx=(4x-6)\cos\frac{x}{2}-8\sin\frac{x}{2}+C.$$

Пример 12. Найти интеграл $\int\arcsin xdx$, результаты интегрирования проверить дифференцированием.

$$\int\arcsin x\,dx=\begin{vmatrix} u=\arcsin x & du=(\arcsin x)'dx=\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv=dx & v=\int dv=\int dx=x\end{vmatrix}=$$

$$=x\arcsin x-\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}=\begin{vmatrix} 1-x^2=z & (1-x^2)'dx=dz \\ d(1-x^2)=dz & -2xdx=dz \\ & xdx=-\dfrac{1}{2}dz\end{vmatrix}=$$

$$x\arcsin x-\int\frac{-\frac{1}{2}dz}{\sqrt{z}}=x\arcsin x+\frac{1}{2}\int z^{-\frac{1}{2}}dz=x\arcsin x+\frac{1}{2}\frac{z^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C=$$

$$=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C.$$

Проверка:

$$(x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C)'=x'\arcsin x+x(\arcsin x)'+$$
$$+\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(1-x^2)'=\arcsin x+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x.$$

Верно!

Пример 13. Найти интеграл $\int e^{2x}\cos 3x dx$.

Пусть $J=\int e^{2x}\cos 3x\,dx$.

$$J=\int e^{2x}\cos 3x\,dx=\begin{vmatrix} u=e^{2x} & du=(e^{2x})'dx=2e^{2x}dx \\ dv=\cos 3x\,dx & v=\int\cos 3x dx=\frac{1}{3}\sin 3x \end{vmatrix}=$$
$$=\frac{e^{2x}}{3}\sin 3x-\int\frac{1}{3}\sin 3x\cdot 2e^{2x}dx=\frac{e^{2x}}{3}\sin 3x-\frac{2}{3}\int e^{2x}\cdot\sin 3x dx=$$
$$=\begin{vmatrix} du=2e^{2x}dx \\ v=\int\sin 3x\,dx=-\frac{1}{3}\cos 3x \end{vmatrix}=\frac{e^{2x}}{3}\sin 3x-\frac{2}{3}\left[-\frac{e^{2x}}{3}\cos 3x-\right.$$
$$\left.-\int\left(-\frac{1}{3}\cos 3x\right)\cdot 2e^{2x}dx\right]=\frac{e^{2x}}{3}\sin 3x+\frac{2e^{2x}}{9}\cos 3x-\frac{4}{9}\int e^{2x}\cdot\cos 3x dx.$$

Итак, $J=\frac{e^{2x}}{9}(3\sin 3x+2\cos 3x)-\frac{4}{9}J+C$.

Решаем уравнение относительно J.

$$\frac{13}{9}J=\frac{e^{2x}}{9}(3\sin 3x+2\cos 3x)+C\Rightarrow J=\frac{e^{2x}}{13}(3\sin 3x+2\cos 3x)+C.$$

Таким образом $\int e^{2x}\cos 3x dx=\frac{e^{2x}}{13}(3\sin 3x+2\cos 3x)+C.$

Интегрирование рациональных дробей

Рациональной дробью $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ называется отношение многочленов $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ степеней n и m соответственно.

Рациональная дробь называется правильной, если $n < m$, в противном случае она называется неправильной.

Простейшими дробями называются правильные дроби вида

I. $\frac{A}{x-a}$; II. $\frac{A}{(x-a)^m}$; III. $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ ($ax^2+bx+c=0$ не имеет действительных корней).

Пример 14. Найти интеграл $\int\frac{3dx}{x-4}$.

$$\int\frac{3dx}{x-4}=3\int\frac{d(x-4)}{x-4}=3\ln|x-4|+C.$$

Пример 15. Найти интеграл $\int\frac{7dx}{(x-5)^5}$.

$$\int \frac{7dx}{(x-5)^5} = 7\int (x-5)^{-5} d(x-5) = 7\frac{(x-5)^{-4}}{-4} + C = -\frac{7}{4(x-5)^4} + C.$$

Подробно остановимся на интегралах III типа, заметим, что $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$ интегрируются таким же способом и объединяются в общий класс функций (функции, содержащие квадратный трехчлен).

Пример 16. Найти интеграл $\int \frac{3x-1}{x^2-6x+10} dx$, результат интегрирования проверить дифференцированием.

Прежде чем перейти к интегрированию, сделаем следующие «заготовки»:

1) найдем дифференциал от квадратного трехчлена:

$$d(x^2 - 6x + 10) = (x^2 - 6x + 10)'dx = (2x - 6)dx;$$

2) преобразуем числитель $3x - 1 = \frac{3}{2}(2x - 6) + 8$;

3) выделим полный квадрат в квадратном трехчлене

$$x^2 - 6x + 10 = x^2 - 2 \cdot 3x + 9 - 9 + 10 = (x - 3)^2 + 1.$$

$$\int \frac{3x-1}{x^2-6x+10} dx = |\text{ применяем «заготовку» (2) }| =$$

$$\int \frac{\frac{3}{2}(2x-6)+8}{x^2-6x+10} dx = \frac{3}{2}\int \frac{(2x-6)dx}{x^2-6x+10} + 8\int \frac{dx}{x^2-6x+10} =$$

| к 1-му интегралу применяем (1), ко 2-му интегралу применяем (3) |

$$= \frac{3}{2}\int \frac{d(x^2-6x+10)}{x^2-6x+10} + 8\int \frac{d(x-3)}{(x-3)^2+1} =$$

$$= \frac{3}{2}\ln|x^2-6x+10| + 8\operatorname{arctg}(x-3) + C.$$

Проверка:

$$\left(\frac{3}{2}\ln|x^2-6x+10| + 8\operatorname{arctg}(x-3) + C\right)' =$$

$$= \frac{3}{2}\frac{1}{x^2-6x+10}(x^2-6x+10)' + 8\cdot\frac{1}{(x-3)^2+1}\cdot(x-3)' =$$

$$= \frac{3(2x-6)}{2(x^2-6x+10)} + \frac{8}{(x-3)^2+1} = \frac{3x-9+8}{x^2-6x+10} = \frac{3x-1}{x^2-6x+10}.$$

Чтобы найти интеграл от любой рациональной дроби, нужно:

1) если дана неправильная рациональная дробь, выделить из нее целую часть, т.е. представить в виде

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = M_k(x) + \frac{R_{n_1}(x)}{Q_m(x)},\ n \ge m,\ n_1 < m;$$

2) разложить знаменатель $Q_m(x)$ на простейшие действительные множители. По основной теореме алгебры это разложение может содержать линейные и квадратные множители:

$$Q_m(x) = (x - a)^p \ldots (x - b)^l \cdot (x^2 + px + q)^t \ldots (x^2 + cx + d)^r,$$

$$p + \ldots + l + t + \ldots = m;$$

3) написать схему разложения данной дроби на простейшие слагаемые дроби в следующем виде:

$$\frac{R_{n_1}(x)}{Q_m(x)}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_p}{(x-a)^p}+\ldots+\frac{B_1}{x-b}+\frac{B_2}{(x-b)^2}+$$
$$+\ldots+\frac{B_l}{(x-b)^l}+\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2}+\ldots+\frac{M_tx+N_t}{(x^2+px+q)^t}+$$
$$+\frac{C_1x+D_1}{x^2+cx+d}+\frac{C_2x+D_2}{(x^2+cx+d)^2}+\ldots+\frac{C_rx+D_r}{(x^2+cx+d)^r}. \qquad (*)$$

Заметим, что квадратные трехчлены x^2+px+q и x^2+cx+d не имеют действительных корней;
4) привести к общему знаменателю правую часть равенства (*). Получим две дроби, у которых знаменатели равны, приравняем числители. Из равенства двух многочленов найдем значение коэффициентов (способы их нахождения посмотрим на примерах).

Пример 17. Найти интеграл $\int\frac{x^4+4x^3+2x^2-7}{x^3+5x^2+6x}dx$ и результат проверить дифференцированием.

Замечаем, что в числителе стоит многочлен порядка 4, в знаменателе – порядка 3, т.е. дробь неправильная. Выделим целую часть, разделив числитель на знаменатель:

$$\begin{array}{rl|l} - & x^4+4x^3+2x^2-7 & x^3+5x^2+6x \\ & x^4+5x^3+6x^2 & \overline{x-1} \\ \hline - & -x^3-4x^2-7 & \\ & -x^3-5x^2-6x & \\ \hline & x^2+6x-7 & \end{array}$$

Итак, $\frac{x^4+4x^3+2x^2-7}{x^3+5x^2+6x}=x-1+\frac{x^2+6x-7}{x^3+5x^2+6x}$.

Разложим на линейные множители x^3+5x^2+6x:
$x^3+5x^2+6x=x(x^2+5x+6)=x(x+2)(x+3)$,
т.к. $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

Разложим дробь $\frac{x^2+6x-7}{x^3+5x^2+6x}$ на простейшие слагаемые:

$$\frac{x^2+6x-7}{x(x+2)(x+3)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x+3}=\frac{A(x+2)(x+3)+Bx(x+3)+Cx(x+2)}{x(x+2)(x+3)}$$

Знаменатели равны, приравняем числители:
$x^2+6x-7=A(x+2)(x+3)+Bx(x+3)+Cx(x+2)$.
Если два многочлена равны, то они равны при любых значениях x. Подставим в последнее равенство $x=0$, $x=-2$,
$x=-3$, соответственно.

При $x=0$: $-7=6A\Rightarrow A=-\frac{7}{6}$,

при $x=-2$: $-15=-2B\Rightarrow B=\frac{15}{2}$,

при $x=-3$: $-16=3C\Rightarrow C=-\frac{16}{3}$.

Итак, подынтегральную дробь можно представить в виде:

$$\frac{x^4+4x^3+2x^2-7}{x^3+5x^2+6x}=x-1+\frac{-\frac{7}{6}}{x}+\frac{\frac{15}{2}}{x+2}+\frac{-\frac{16}{3}}{x+3}.$$

Найдем интеграл

$$\int\left(x-1-\frac{\frac{7}{6}}{x}+\frac{\frac{15}{2}}{x+2}-\frac{\frac{16}{3}}{x+3}\right)dx==\int x\,dx-\int dx-\frac{7}{6}\int\frac{dx}{x}+\frac{15}{2}\int\frac{d(x+2)}{x+2}-\frac{16}{3}\int\frac{d(x+3)}{x+3}=$$

$$=\frac{x^2}{2}-x-\frac{7}{6}\ln|x|+\frac{15}{2}\ln|x+2|-\frac{16}{3}\ln|x+3|+C.$$

Проверка:

$$\left(\frac{x^2}{2}-x-\frac{7}{6}\ln|x|+\frac{15}{2}\ln|x+2|-\frac{16}{3}\ln|x+3|+C\right)'=\frac{1}{2}\cdot 2x-1-\frac{7}{6}\cdot\frac{1}{x}+\frac{15}{2}\cdot\frac{1}{x+2}-\frac{16}{3}\cdot\frac{1}{x+3}=$$

$$=x-1-\frac{7}{6x}+\frac{15}{2(x+2)}-\frac{16}{3(x+3)}=$$

$$=\frac{6x(x-1)(x+2)(x+3)-7(x+2)(x+3)+15\cdot 3x(x+3)-16\cdot 2x(x+2)}{6x(x+2)(x+3)}=$$

$$=\frac{6x^4+30x^3+36x^2-6x^3-30x^2-36x-7x^2-35x-42+45x^2}{6x(x+2)(x+3)}+$$

$$+\frac{135x-32x^2-64x}{6x(x+2)(x+3)}=\frac{6x^4+24x^3+12x^2-42}{6x(x+2)(x+3)}=\frac{x^4+4x^3+2x^2-7}{x^3+5x^2+6x}.$$

Пример 18. Найти интеграл $\int\frac{dx}{x(x+1)^2}$.

Разложим подынтегральную функцию на простейшие слагаемые:

$$\frac{1}{x(x+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}=\frac{A(x+1)^2+Bx(x+1)+Cx}{x(x+1)^2}.$$

Знаменатели дробей равны, приравняем числители:

$$1=A(x+1)^2+Bx(x+1)+Cx.$$

Подставим в равенство $x=0$ и $x=-1$.

При $x=0$: $1=A\Rightarrow A=1$, при $x=-1$: $1=-C\Rightarrow C=-1$.

Для определения B приравняем, например, коэффициенты при x^2, так как если два многочлена равны, то равны и коэффициенты при одинаковых степенях x.

x^2: $0=A+B\Rightarrow B=-A=-1$.

Итак, подынтегральную функцию можно представить в виде $\frac{1}{x(x+1)^2}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}$,

тогда $\int\frac{dx}{x(x+1)^2}=\int\frac{dx}{x}-\int\frac{d(x+1)}{x+1}-\int\frac{d(x+1)}{(x+1)^2}=\ln|x|-\ln|x+1|-\frac{(x+1)^{-2+1}}{-2+1}+C=$

$$=\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|+\frac{1}{x+1}+C.$$

Пример 19. Найти интеграл $\int\frac{x^3-1}{4x^3+x}dx$.

Подынтегральное выражение – неправильная рациональная дробь. Выделим целую часть:

$$\begin{array}{r|l} x^3-1 & 4x^3+x \\ \cline{2-2} -\ \ x^3+x/4 & 1/4 \\ \cline{1-1} -x/4-1 & \end{array}$$

Итак, $\dfrac{x^3-1}{4x^3+x}=\dfrac{1}{4}+\dfrac{-\frac{1}{4}x-1}{4x^3+x}$.

Разложим $\dfrac{-\frac{1}{4}x-1}{4x^3+x}$ на простейшие слагаемые дроби:

$$\frac{-\frac{1}{4}x-1}{x(4x^2+1)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{4x^2+1}=\frac{A(4x^2+1)+Bx^2+Cx}{x(4x^2+1)}$$

Знаменатели дробей равны, приравняем числители:

$$-\frac{1}{4}x-1=4Ax^2+A+Bx^2+Cx$$

Два многочлена равны, значит, равны коэффициенты при одинаковых степенях x. Приравняем коэффициенты при x^2, x, x^0 (свободный член).

x^2: $0=4A+B\Rightarrow B=-4A\Rightarrow B=4$,

x: $-\dfrac{1}{4}=C\Rightarrow C=-\dfrac{1}{4}$,

x^0: $-1=A\Rightarrow A=-1$.

Итак,

$$\int\frac{x^3-1}{4x^3+x}dx=\int\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{x}+\frac{4x-\frac{1}{4}}{4x^2+1}\right)dx=\frac{1}{4}\int dx-\int\frac{dx}{x}+4\int\frac{xdx}{4x^2+1}-$$

$$-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{4x^2+1}=\frac{1}{4}x-\ln|x|+4\int\frac{\frac{1}{2}dx^2}{4\left(x^2+\frac{1}{4}\right)}-\frac{1}{16}\int\frac{dx}{x^2+\frac{1}{4}}=\frac{1}{4}x-$$

$$-\ln|x|+\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x^2+\frac{1}{4}\right)}{\left(x^2+\frac{1}{4}\right)}-\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}}\operatorname{arctg}2x==\frac{1}{4}x-\ln|x|+\frac{1}{2}\ln\left|x^2+\frac{1}{4}\right|-\frac{1}{8}\operatorname{arctg}2x+C.$$

Интегрирование тригонометрических выражений

1. Интеграл вида $\int R(\sin x,\cos x)dx$, где R – рациональная функция.

Универсальная тригонометрическая подстановка $t=\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$ приводит интегралы такого типа к интегралам от рациональной функции. В результате этой подстановки имеем: $\dfrac{x}{2}=\operatorname{arctg}t$ $\Rightarrow$

$x=2\operatorname{arctg}t\Rightarrow dx=(2\operatorname{arctg}t)'dt\Rightarrow dx=\dfrac{2dt}{1+t^2}$,

$$\sin x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2},\ \cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Пример 20. Найти интеграл $\int \frac{dx}{3+5\sin x+3\cos x}$.

$$\int \frac{dx}{3+5\sin x+3\cos x}=\left|\begin{matrix} t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}, & \sin x=\frac{2t}{1+t^2}, \\ dx=\frac{2dt}{1+t^2}, & \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2} \end{matrix}\right|=$$

$$=\int \frac{2dt}{(1+t^2)\left(3+\frac{10t}{1+t^2}+\frac{3-3t^2}{1+t^2}\right)}=\int \frac{2dt}{3+3t^2+10t+3-3t^2}=$$

$$=\int \frac{2dt}{2(3+5t)}=\frac{1}{5}\int \frac{d(5t+3)}{5t+3}=\frac{1}{5}\ln|5t+3|+C=\frac{1}{5}\ln\left|5\operatorname{tg}\frac{x}{2}+3\right|+C.$$

2. Интеграл вида $\int \sin^m x\cdot\cos^n x dx$.

Рассмотрим три случая:

1) по крайней мере, один из показателей m или n – нечетное положительное число. Если n – нечетное, то подстановка $\sin x = t$, если m, то $t = \cos x$.

Пример 21. Найти интеграл $\int \sin^3 x dx$.

$$\int \sin^3 x\, dx=\left|\begin{matrix} \cos x=t & \sin x\, dx=-dt \\ d\cos x=dt & \sin^3 x\, dx=\sin^2 x\cdot\sin x\, dx= \\ -\sin x\, dx=dt & =(1-\cos^2 x)\sin x\, dx \end{matrix}\right|=$$

$$=\int (1-t^2)(-dt)=\int t^2 dt-\int dt=\frac{t^3}{3}-t+C=\frac{\cos^3 x}{3}-\cos x+C;$$

2) оба показателя m и n – четные положительные числа. Для понижения степени подынтегральной функции применяем формулы:

$$\sin x\cdot\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$$

$$\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$$

$$\cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x)$$

Пример 22. Найти интеграл $\int \cos^4 x dx$.

$$\int \cos^4 x dx=\int \left[\frac{1}{2}(1+\cos 2x)\right]^2 dx=\frac{1}{4}\int (1+2\cos 2x+\cos^2 2x)dx=$$

$$=\frac{1}{4}\int dx+\frac{2}{4}\int \cos 2x dx+\frac{1}{4}\int \frac{1}{2}(1+\cos 4x)dx=\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}\int \cos 2x d2x+\frac{1}{8}\int dx+\frac{1}{8}\int \cos 4x dx=$$

$$\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{8}x+\frac{1}{32}\int \cos 4x d4x=\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C;$$

3) m, n – четные целые числа, но хотя бы одно из них отрицательно. Подстановка $t = \operatorname{tg} x$, тогда $x = \operatorname{arctg} t$, откуда $dx=\frac{dt}{1+t^2}$.

Используем известные тригонометрические формулы:

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}, \ \sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$$

Пример 23. Найти интеграл $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x} dx$.

$$\int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x} dx = \left| \begin{matrix} t = \operatorname{tg} x, & \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}, \\ dx = \frac{dt}{1+t^2}, & \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}. \end{matrix} \right| = \int \frac{\frac{1}{1+t^2} \cdot \frac{dt}{1+t^2}}{\left(\frac{t^2}{1+t^2} \right)^2} =$$

$$= \int \frac{dt}{t^4} = \int t^{-4} dt = \frac{t^{-3}}{-3} + C = -\frac{1}{3\operatorname{tg}^3 x} + C.$$

3. Интеграл вида $\int R(\operatorname{tg} x) dx$ приводится к интегралу от рациональной функции подстановкой $t = \operatorname{tg} x$.

Пример 24. Найти интеграл $\int \operatorname{tg}^5 x dx$.

$$\int \operatorname{tg}^5 x dx = \left| \begin{matrix} t = \operatorname{tg} x \\ x = \operatorname{arctg} t \\ dx = \frac{dt}{1+t^2} \end{matrix} \right| = \int \frac{t^5 \cdot dt}{t^2+1} = \ | \text{ выделим целую часть } | =$$

$$= \int \left(t^3 - t + \frac{t}{t^2+1} \right) dt = \int t^3 dt - \int t dt + \int \frac{t dt}{t^2+1} = \frac{t^4}{4} - \frac{t^2}{2} -$$

$$-\frac{1}{2} \int \frac{d(t^2+1)}{t^2+1} = \frac{t^4}{4} - \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2} \ln(t^2+1) + C = \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} - \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} -$$

$$-\frac{1}{2} \ln(\operatorname{tg}^2 x + 1) + C.$$

4. Интегралы вида $\int \sin mx \cdot \cos nx dx$, $\int \sin mx \cdot \sin nx dx$ и $\int \cos mx \cdot \cos nx dx$.

При нахождении интегралов такого типа применяются формулы:

$$\sin mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2} [\sin(m+n)x + \sin(m-n)x]$$

$$\sin mx \cdot \sin nx = \frac{1}{2} [\cos(m-n)x - \cos(m+n)x]$$

$$\cos mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2} [\cos(m-n)x + \cos(m+n)x]$$

Пример 25. Найти интеграл $\int \sin 10x \cdot \cos 15x dx$.

$$\int \sin 10x \cdot \cos 15x dx = \frac{1}{2} \int [\sin 25x + \sin(-5x)] dx =$$

$$\frac{1}{50} \int \sin 25x d25x - \frac{1}{10} \int \sin 5x d5x = -\frac{1}{50} \cos 25x + \frac{1}{10} \cos 5x + C.$$

Интегрирование некоторых иррациональных функций

Иррациональные функции интегрируются в элементарных функциях только в некоторых определенных случаях. Мы рассмотрим два из них:

а) интеграл $\int R(x, x^{\alpha}, x^{\beta}...)dx$, где R – рациональная функция, $\alpha = \frac{m_1}{n_1}$, $\beta = \frac{m_2}{n_2}$,... – рациональные числа, сводится к интегралу от рациональной функции с помощью подстановки $x = t^k$, где k – общий знаменатель всех дробных показателей x;
б) интегралы $\int R[x, (ax+b)^{\alpha}, (ax+b)^{\beta}...]dx$ или
$\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\alpha}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\beta}, ...\right]dx$ приводятся к рациональному виду аналогично случаю а) с помощью подстановок $ax + b = t^k$ или $\frac{ax+b}{cx+d} = t^k$.

Пример 26. Найти интеграл $\int \frac{dx}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}}$.

В этом примере $x^{\frac{1}{3}}$ и $x^{\frac{1}{2}}$, общий знаменатель $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{2}$ равен 6, поэтому подстановка $x = t^6$.

$$\int \frac{dx}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}} = \left| \begin{matrix} x = t^6 \Rightarrow t = \sqrt[6]{x} \\ dx = 6t^5 dt \\ \sqrt{x} = \sqrt{t^6} = t^3 \quad \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{t^6} = t^2 \end{matrix} \right| = \int \frac{6t^5 dt}{(1+t^2)t^3} =$$

$$= 6\int \frac{t^2}{t^2+1} dt = |\text{ выделим целую часть }| = 6\int \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right) dt =$$

$$= 6\int dt - 6\int \frac{dt}{1+t^2} = 6t - 6\operatorname{arctg} t + C = 6 \cdot \sqrt[6]{x} - 6\operatorname{arctg} \sqrt[6]{x} + C.$$

Пример 27. Найти $\int \sqrt{\frac{x-2}{x}} \cdot \frac{dx}{x}$.

Сделаем подстановку
$\sqrt{\frac{x-2}{x}} = t \Rightarrow \frac{x-2}{x} = t^2 \Rightarrow (x-2) = xt^2$, отсюда выразим x: $x = \frac{2}{1-t^2}$, дальше найдем dx.

$$dx = \left(\frac{2}{1-t^2}\right)' dt \Rightarrow dx = 2(-(1-t^2)^{-2})(1-t^2)' dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dx = -\frac{2}{(1-t^2)^2} \cdot (-2t) dt \Rightarrow dx = \frac{4t dt}{(1-t^2)^2}.$$

Тогда

$$\int \sqrt{\frac{x-2}{x}} \cdot \frac{dx}{x} = \int \frac{t \cdot \frac{4t dt}{(1-t^2)^2}}{\frac{2}{1-t^2}} = \int \frac{2t^2 dt}{1-t^2} = -2\int \frac{t^2}{t^2-1} dt =$$

$$= |\text{ выделим целую часть }| = -2\int \left(1 + \frac{1}{t^2-1}\right) dt =$$

$$= -2\int dt - 2\int \frac{dt}{t^2-1} = -2t - \frac{2}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = -2\sqrt{\frac{x-2}{x}} -$$

$$-\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{x-2}{x}}-1}{\sqrt{\frac{x-2}{x}}+1}\right|+C=-2\sqrt{\frac{x-2}{x}}-\ln\left|\frac{\sqrt{x-2}-\sqrt{x}}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x}}\right|+C.$$

Найти интегралы:

1. $\int\left(x^2+2x+\frac{1}{x}\right)dx.$ **2.** $\int\frac{10x^8+3}{x^4}dx.$ **3.** $\int\frac{x-2}{x^3}dx.$

4. $\int\frac{(x^2+1)^2}{x^3}dx.$ **5.** $\int(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})dx.$ **6.** $\int\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}\right)dx.$

7. $\int e^x\left(1-\frac{e^{-x}}{x^2}\right)dx.$ **8.** $\int a^x\left(1+\frac{a^{-x}}{\sqrt{x^3}}\right)dx.$ **9.** $\int\frac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}dx.$

10. $\int\operatorname{ctg}^2 x\,dx.$ **11.** $\int\frac{dx}{\cos^2 x\sin^2 x}.$ **12.** $\int\frac{3-2\operatorname{ctg}^2 x}{\cos^2 x}dx.$

13. $\int\sin^2\frac{x}{2}dx.$ **14.** $\int\left(\frac{2}{1+x^2}-\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx.$ **15.** $\int\frac{dx}{x^2-25}.$

16. $\int\frac{dx}{x^2+9}.$ **17.** $\int\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}.$ **18.** $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+5}}.$

19. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}.$ **20.** $\int\frac{dx}{x^2+3}.$ **21.**

$\int\left(\frac{3}{x^2+3}+\frac{6}{x^2-3}\right)dx.$

22. $\int\left(\frac{1}{\sqrt{2-x^2}}+\frac{1}{\sqrt{2+x^2}}\right)dx.$ **23.** $\int\cos 3x\,dx.$ **24.** $\int\sin\frac{x}{2}dx.$

25. $\int e^{-3x}dx.$ **26.** $\int\frac{dx}{\cos^2 5x}.$ **27.**

$\int(e^{x/2}+e^{-x/2})dx.$

28. $\int\sqrt{4x-1}\,dx.$ **29.** $\int\frac{dx}{\sqrt{3-2x}}.$ **30.** $\int\frac{dx}{1-10x}.$

31. $\int\frac{e^{3x}}{1-3e^{3x}}dx.$ **32.** $\int\operatorname{ctg} x\,dx.$ **33.** $\int\operatorname{tg} x\,dx.$

34. $\int\frac{dx}{x(1+\ln x)}.$ **35.** $\int\sin^2 x\cos x\,dx.$ **36.** $\int e^{\cos x}\sin x\,dx.$

37. $\int e^{-x^2}x\,dx.$ **38.** $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx.$ **39.** $\int \frac{x^2dx}{\sqrt[3]{1+x^2}}.$

40. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}.$ **41.** $\int \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{1+2\cos x}}.$ **42.** $\int \frac{dx}{x^2+4x+5}.$

43. $\int \frac{dx}{x^2+6x+13}.$ **44.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}.$ **45.** $\int \frac{x^3}{x-2}dx.$

46. $\int \frac{x-4}{(x-2)(x-3)}dx.$ **47.** $\int \frac{2x+7}{x^2+x-2}dx.$ **48.**

$\int \frac{5x+2}{x^2+2x+10}dx.$

49. $\int \frac{(2x+1)\,dx}{(x^2+2x+5)^2}.$ **50.** $\int \ln x\,dx.$ **51.** $\int x\ln(x-1)dx.$

52. $\int xe^{2x}dx.$ **53.** $\int \frac{\ln x\,dx}{x^2}.$ **54.** $\int \sqrt{x}\ln x\,dx.$

55. $\int \ln(x^2+1)dx.$ **56.** $\int \operatorname{arctg} x\,dx.$ **57.** $\int \operatorname{arctg}\sqrt{2x-1}.$

58. $\int x^2\cos x\,dx.$ **59.** $\int e^x\sin x\,dx.$ **60.** $\int \sin^2 x\,dx.$

61. $\int (1+2\cos x)^2\,dx.$ **62.** $\int \cos^4 x\,dx.$ **63.** $\int \sin^2 x\cos^2 x\,dx.$

64. $\int \sin^5 x\,dx.$ **65.** $\int \sin^2 x\cos^3 x\,dx.$ **66.** $\int \frac{dx}{\sin x}.$

67. $\int \frac{dx}{\cos x}.$ **68.** $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}.$ **69.** $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{2x+1}+1}.$

70. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}.$

§ 11. Определенный интеграл

Определение, основные свойства и вычисление определенных интегралов

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$. Разделим отрезок $[a, b]$ на n произвольных частей точками
$a = x_0 < x_1 < x_2 < <...< x_{n-1} < x_n = b$, выберем на каждом отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ произвольную точку c_k, найдем значение функции в этих точках и длину каждого отрезка $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$.

Определение 1. Интегральной суммой для функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ называется сумма вида

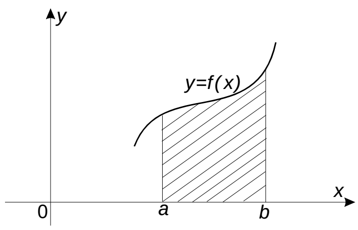
$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$$

Определение 2. Определенным интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ (или в пределах от a до b) называется предел интегральной суммы при условии, что длина наибольшего из отрезков ($\max \Delta x_k$) стремится к нулю:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sigma_n = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$$

Теорема (существования определенного интеграла).
Всякая непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция интегрируема на этом отрезке.

Если $f(x) > 0$ на $[a, b]$, то $\int_a^b f(x)dx$ представляет собой площадь криволинейной трапеции – фигуры, ограниченной линиями $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$ и $x = b$.



Основные свойства определенного интеграла

1. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$

2. $\int_a^a f(x)dx = 0.$

3. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$

4. $\int_a^b [f(x) \pm \varphi(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b \varphi(x)dx.$

5. $\int_a^b c \cdot f(x)dx = c \cdot \int_a^b f(x)dx$, c – постоянная.

6. Оценка определенного интеграла: если m, M – наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ на $[a,b]$, то

$$m(b-a) < \int_a^b f(x)dx < M(b-a)$$

7. Теорема о среднем значении. Если $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, то существует такая точка $c \in [a,b]$, что

$$\int_a^b f(x)dx = f(c) \cdot (b-a)$$

Правила вычисления определенных интегралов

1. Формула Ньютона-Лейбница:

$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$, где $F(x)$ – первообразная для $f(x)$.

2. Интегрирование по частям: $\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$

3. Замена переменной: $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt,$ где $x = \varphi(t)$ – функция, непрерывная вместе со своей производной $\varphi'(t)$ на отрезке $\alpha \le t \le \beta$, $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$, $f[\varphi(t)]$ – функция, непрерывная на $[\alpha, \beta]$.

4. Если $f(x)$ – нечетная функция, т.е. $f(-x) = -f(x)$, то $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

5. Если $f(x)$ – четная функция, т.е. $f(-x) = f(x)$, то $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 2\cdot\int\limits_0^a f(x)dx$

В примерах 1–5 вычислить определенные интегралы.

Пример 1. $\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2+2x+2}$.

$$\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2+2x+2} = \int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{(x^2+2x+1)+1} = \int\limits_{-1}^{0} \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+1} = \operatorname{arctg}(x+1)\Big|_{-1}^{0} = \operatorname{arctg}1 - \operatorname{arctg}0 = \frac{\pi}{4}.$$

Пример 2. $\int\limits_0^{\pi/2} \cos^3 x dx$.

$$\int\limits_0^{\pi/2} \cos^3 x dx = \int\limits_0^{\pi/2} \cos^2 x(\cos x dx) = \int\limits_0^{\pi/2} (1-\sin^2 x) d\sin x =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} d\sin x - \int\limits_0^{\pi/2} \sin^2 x d\sin x = \sin x\Big|_0^{\pi/2} - \frac{\sin^3 x}{3}\Bigg|_0^{\pi/2} =$$

$$= \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 - \frac{1}{3}\sin^3\frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}\sin^3 0 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Пример 3. $\int\limits_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

Переходим к новой переменной интегрирования, полагая $x = t^2$ ($t > 0$). При $x = 0$ $t =$ 0,
а при $x = 4$ $t = 2$.

Функция $x = t^2$ монотонна, непрерывна и имеет непрерывную производную $x' = 2t$ на отрезке [0; 2]. Поэтому, используя формулу замены переменной, имеем:

$$\int\limits_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \int\limits_0^2 \frac{2tdt}{1+t} = 2\int\limits_0^2 \frac{tdt}{1+t} = 2\int\limits_0^2 \frac{t+1-1}{t+1}dt = 2\int\limits_0^2 \left(1 - \frac{1}{1+t}\right)dt =$$

$$= 2(t - \ln|t+1|)\Big|_0^2 = 2(2 - \ln 3 + \ln 1) = 4 - 2\ln 3.$$

Пример 4. $\int\limits_0^3 x \operatorname{arctg} x dx$.

$$\int\limits_0^3 x\operatorname{arctg} x\, dx = \left| \begin{matrix} u = \operatorname{arctg} x; & du = \dfrac{dx}{1+x^2}; \\ dv = x\,dx; & v = \int x\,dx = \dfrac{x^2}{2}. \end{matrix} \right| = \left(\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x \Bigg|_0^3 - \right.$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^3\frac{x^2dx}{1+x^2}\Bigg)=\frac{9}{2}\operatorname{arctg}3-0-\frac{1}{2}\int_0^3\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx=\frac{9}{2}\operatorname{arctg}3-$$

$$-\frac{1}{2}(x-\operatorname{arctg}x)\Big|_0^3=\frac{9}{2}\operatorname{arctg}3-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}3=5\operatorname{arctg}3-\frac{3}{2}.$$

Пример 5. $\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4}\sin^5 x\,dx$.

$\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4}\sin^5 x\,dx = 0$, т.к. подынтегральная функция $\sin^5 x$ является функцией нечетной.

Несобственные интегралы

Понятие определенного интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ введено для случая, когда промежуток интегрирования $[a, b]$ конечен, а подынтегральная функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$. Данное понятие можно обобщить на случай, когда промежуток интегрирования бесконечен или подынтегральная функция терпит бесконечный разрыв на $[a, b]$.

Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования (интегралы I рода) определяются посредством предельного перехода:

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx;$$

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx=\lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)dx;$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx+\int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx=\lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^c f(x)dx+\lim_{b\to+\infty}\int\limits_c^b f(x)dx,$$

где c – любое действительное число.

Несобственные интегралы от функции с бесконечными разрывами на $[a, b]$ (интегралы II рода) вводятся также с помощью предельного перехода.

Если подынтегральная функция $f(x)$ имеет бесконечный разрыв в точке $x = a$ и непрерывна во всех других точках промежутка $(a, b]$, то $\int\limits_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$, $(\varepsilon > 0)$.

Если подынтегральная функция $f(x)$ имеет бесконечный разрыв в точке $x = b$ и непрерывна во всех других точках промежутка $[a, b)$, то $\int\limits_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx$, $(\varepsilon > 0)$.

Если подынтегральная функция $f(x)$ имеет бесконечный разрыв в точке $x = c$, $c \in [a, b]$, а в остальных точках отрезка $[a, b]$ непрерывна, то

$\int\limits_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{a}^{c-\varepsilon} f(x)dx+\lim\limits_{\delta\to 0}\int\limits_{c+\delta}^{b} f(x)dx$, где $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ и изменяются независимо друг от друга.

Если все указанные пределы существуют и конечны, то несобственные интегралы называются сходящимися, в противном случае – расходящимися.

В примерах 6–8 исследовать несобственные интегралы на сходимость и найти их значение в случае, если они сходятся.

Пример 6. $\int\limits_{e}^{\infty}\frac{dx}{x\ln x}$.

$$\int\limits_{e}^{\infty}\frac{dx}{x\ln x}=\lim_{b\to\infty}\int\limits_{e}^{b}\frac{dx}{x\ln x}=\lim_{b\to\infty}\int\limits_{e}^{b}\frac{d(\ln x)}{\ln x}=\lim_{b\to\infty}\ln\ln x\Big|_{e}^{b}=$$

$=\lim\limits_{b\to\infty}(\ln\ln b-\ln\ln e)=\infty$, т.к. $y=\ln x$ – функция возрастающая, и при $b\to\infty$ $\ln b\to\infty$ и $\ln\ln b\to\infty$.

Так как предел бесконечен, значит исходный интеграл расходится.

Пример 7. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+1}$.

По определению несобственного интеграла

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+1}=\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{dx}{x^2+1}+\int\limits_{0}^{\infty}\frac{dx}{x^2+1}=\lim_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{0}\frac{dx}{x^2+1}+\lim_{b\to+\infty}\int\limits_{0}^{b}\frac{dx}{x^2+1}=$$

$$=\lim_{a\to-\infty}\operatorname{arctg}x\Big|_{a}^{0}+\lim_{b\to+\infty}\operatorname{arctg}x\Big|_{0}^{b}=\lim_{a\to-\infty}(\operatorname{arctg}0-\operatorname{arctg}a)+$$

$$+\lim_{b\to\infty}(\operatorname{arctg}b-\operatorname{arctg}0)=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi,$$

т.к. при $x\to\infty$ $\operatorname{arctg}x\to\frac{\pi}{2}$ и при $x\to-\infty$ $\operatorname{arctg}x\to-\frac{\pi}{2}$. Значит интеграл сходится к числу π.

Пример 8. $\int\limits_{2}^{6}\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-4)^2}}$.

Функция $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{(x-4)^2}}$ имеет бесконечный разрыв в точке $x=4$ (знаменатель дроби обращается в нуль), в остальных точках отрезка [2; 6] $f(x)$ непрерывна.

Воспользуемся определением несобственного интеграла.

$$\int\limits_{2}^{6}\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-4)^2}}=\int\limits_{2}^{4}\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-4)^2}}+\int\limits_{4}^{6}\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-4)^2}}=$$

$$=\lim_{\varepsilon_1\to0}\int\limits_{2}^{4-\varepsilon_1}\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-4)^2}}+\lim_{\varepsilon_2\to0}\int\limits_{4+\varepsilon_2}^{6}\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-4)^2}}=$$

$$=\lim_{\varepsilon_1\to0}\int\limits_{2}^{4-\varepsilon_1}(x-4)^{-\frac{2}{3}}dx+\lim_{\varepsilon_2\to0}\int\limits_{4+\varepsilon_2}^{6}(x-4)^{-\frac{2}{3}}dx=$$

$$=\lim_{\varepsilon_1\to0}(3\cdot\sqrt[3]{x-4})\Big|_{2}^{4-\varepsilon_1}+\lim_{\varepsilon_2\to0}(3\cdot\sqrt[3]{x-4})\Big|_{4+\varepsilon_2}^{6}=$$

$$=3\lim_{\varepsilon_1\to0}(\sqrt[3]{4-\varepsilon_1-4}-\sqrt[3]{2-4})+3\lim_{\varepsilon_2\to0}(\sqrt[3]{6-4}-\sqrt[3]{4+\varepsilon_2-4})=$$

$$=3\cdot\sqrt[3]{2}+3\cdot\sqrt[3]{2}=6\cdot\sqrt[3]{2}.$$

Данный несобственный интеграл сходится.

Геометрические приложения определенных интегралов

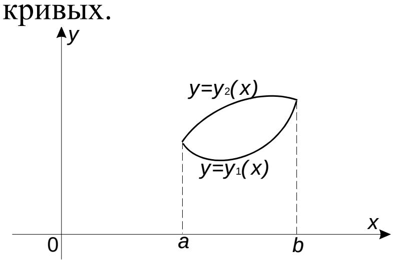
Вычисление площадей

1. Декартовы координаты.

Если плоская фигура ограничена прямыми $x = a$, $x = b$ ($a < b$) и кривыми $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$, причем $y_1(x) \le y_2(x)$ ($a \le x \le b$), то ее площадь вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b (y_2(x) - y_1(x))dx$$

В отдельных случаях левая граница $x = a$ (или правая граница $x = b$) может выродиться в точку пересечения кривых $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$. В этих случаях величины a и b отыскиваются как абсциссы точек пересечения указанных кривых.



2. Параметрическое задание кривых.

Если граница фигуры задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$$

то площадь фигуры вычисляется по одной из трех формул:

$$S = -\int_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt; \quad S = \int_\alpha^\beta x(t)y'(t)dt; \quad S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta (xy' - yx')dt,$$

где α и β – значения параметра t, соответствующие началу и концу обхода контура в положительном направлении (при котором фигура остается слева).

3. Полярные координаты.

Площадь сектора, ограниченного дугой $r = r(\varphi)$ и лучами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$, находим по формуле

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi$$

Вычисление длины кривой

1. Декартовы координаты.

Уравнение кривой $y = y(x)$ и $y'(x)$ – непрерывная функция, то $l = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}dx$ – длина участка кривой, соответствующая изменению x в промежутке $[a, b]$.

2. Параметрическое задание кривых.

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \ t_1 \le t \le t_2,$$

$x'(t)$, $y'(t)$ – непрерывные функции, то

$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}dt$ – длина участка кривой при $t \in [t_1, t_2]$.

3. Полярные координаты.

Пусть $r = r(\varphi)$, то

$$l = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\varphi,\ \varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$$

Вычисление объемов тел

1. Декартовы координаты.

Если известна площадь $S(x)$ любого сечения тела плоскостью, перпендикулярной оси Ox, и a и b – соответственно левая и правая границы изменения x, то объем тела выражается интегралом

$$V = \int\limits_a^b S(x)dx$$

Объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = f(x)$, $(f(x) \geq 0)$, $y = 0$; $x = a$, $x = b$ $(a < b)$, выражается интегралом

$$V = \pi\int\limits_a^b (f(x))^2 dx$$

Если же фигура, ограниченная линиями $y = y_1(x)$,
$y = y_2(x)$, $(0 \leq y_1(x) \leq y_2(x))$, $x = a$, $x = b$, вращается вокруг оси Ox, то объем тела вращения выражается интегралом

$$V = \pi\int\limits_a^b (y_2^2(x) - y_1^2(x))dx$$

Если вращение происходит вокруг оси Oy и $x = x_1(y)$ и $x = x_2(y)$, $0 \leq x_1(y) \leq x_2(y)$, $y = a$ и $y = b$, то

$$V = \pi\int\limits_a^b (x_2^2(y) - x_1^2(y))dy$$

2. Параметрическое задание функции.

Кривая $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ $t_1 \leq t \leq t_2$ вращается вокруг оси Ox, объем тела вращения вычисляется по формуле

$$V = \pi\int\limits_{t_1}^{t_2} y^2(t)\cdot x'(t)dt$$

3. Полярные координаты.

Объем тела, полученный при вращении сектора, ограниченного кривой $r = r(\varphi)$ и двумя полярными радиусами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$, вокруг полярной оси, вычисляется по формуле

$$V = \frac{2}{3}\pi\int\limits_\alpha^\beta r^3 \sin\varphi d\varphi$$

Поверхность тела вращения

1. Декартовы координаты.

Площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox дуги L кривой $y = y(x)$ $(a \leq x \leq b)$, выражается интегралом

$$S = 2\pi\int\limits_a^b y(x)\sqrt{1 + (y'(x))^2}dx$$

2. Параметрическое задание функции.

Если кривая задана параметрическими уравнениями:

$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $\alpha \le t \le \beta$, то $S = 2\pi \int\limits_{\alpha}^{\beta} \left(y(t) \left(\sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2} dt \right.\right.$.

3. Полярные координаты

Если кривая задана в полярных координатах $r = r(\varphi)$, $\varphi_1 < \varphi < \varphi_2$, то

$$S = 2\pi \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} r \sin\varphi \sqrt{r^2 + (r')^2} d\varphi$$

Пример 9. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 4–x^2$ и $y = x^2–2x$. Сделать чертеж.

Найдем точки пересечения данных парабол, для этого решим систему из их уравнений:

$$\begin{cases} 1) y = x^2 - 2x, \\ 2) y = 4 - x^2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 - 2x, \\ x^2 - 2x = 4 - x^2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 - 2x, \\ 2x^2 - 2x - 4 = 0. \end{cases}$$

Найдем корни уравнения $2x^2–2x–4 = 0$ или $x^2–x–2 = 0$.

$x_1 = 2$, $x_2 = –1$.

Тогда $y_1 = 2^2 – 2\cdot2 = 0$,

$y_2 = (–1)^2 – 2\cdot(–1) = 3$.

Получим две точки пересечения (2, 0) и (–1, 3).

Для построения схематического чертежа найдем вершины парабол:

1) $y = x^2 – 2x$ (ветви направлены вверх);

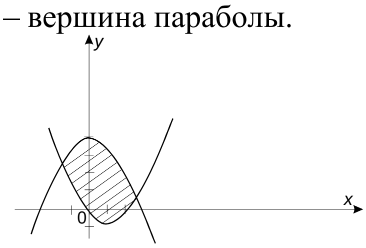
$y' = 2x – 2$, $2x – 2 = 0$, $x = 1$;

$y(1) = 1^2 – 2\cdot1 = –1 \Rightarrow$ точка (1, –1) – вершина параболы;

2) $y = 4 – x^2$ (ветви направлены вниз);

$y' = –2x$, $–2x = 0$, $x = 0$;

$y(0) = 4 – 0 = 4 \Rightarrow$ (0, 4) – вершина параболы.



Находим площадь по формуле $S = \int\limits_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx.$

$$S = \int\limits_{-1}^{2} [4 - x^2 - (x^2 - 2x)]dx = \int\limits_{-1}^{2} (4 + 2x - 2x^2)dx = 4x\Big|_{-1}^{2} +$$

$$+2 \cdot \frac{x^2}{2}\Bigg|_{-1}^{2} - 2 \cdot \frac{x^3}{3}\Bigg|_{-1}^{2} = 4 \cdot (2 - (-1)) + (4 - (-1)^2) - \frac{2}{3} \cdot (8 - (-1)^3) =$$

$$= 12 + 3 - 6 = 9 \quad eg^2.$$

Пример 10. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси *Ox* фигуры, ограниченной линиями $2y = x^2$, $2x + 2y – 3 = 0$.

Найдем точки пересечения параболы $y = \frac{x^2}{2}$ и прямой $y = \frac{3 - 2x}{2}$. Решаем систему из уравнений этих кривых:

$$\begin{cases} y=\dfrac{x^2}{2} \\ y=\dfrac{3}{2}-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{x^2}{2} \\ \dfrac{x^2}{2}=\dfrac{3}{2}-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{x^2}{2} \\ x^2+2x-3=0 \end{cases}$$

Найдем корни уравнения $x^2 + 2x - 3 = 0$.

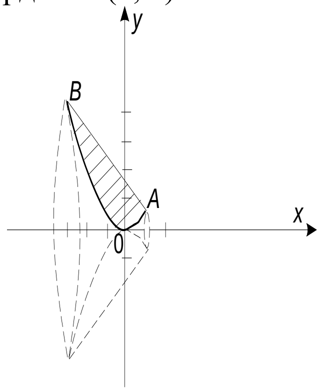
$x_1 = -3$, $x_2 = 1$ и значения функций в этих точках:

$y(-3) = \dfrac{(-3)^2}{2} = \dfrac{9}{2}$ и $y(1) = \dfrac{1}{2}$.

Получены точки пересечения

$A(1, \dfrac{1}{2})$ и $B(-3, \dfrac{9}{2})$.

Прямую проведем через точки A и B, для построения параболы учтем, что вершиной параболы является точка начала координат (0, 0).



Найдем объем тела, полученного вращением фигуры вокруг оси Ox по формуле

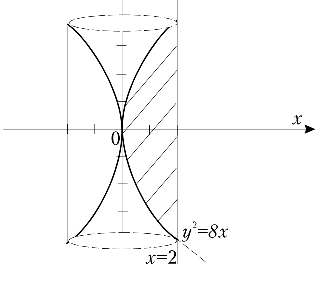
$$V = \pi\int_a^b (y_2^2 - y_1^2)dx.$$

$$V = \pi\int_{-3}^{1}\left[\left(\frac{3}{2}-x\right)^2 - \left(\frac{x^2}{2}\right)^2\right]dx = \pi\int_{-3}^{1}\left(\frac{9}{4}-3x+x^2-\frac{x^4}{4}\right)dx =$$

$$= \pi\left(\frac{9}{4}x-\frac{3x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{20}\right)\Bigg|_{-3}^{1} = = \pi\left[\frac{9}{4}(1+3)-\frac{3}{2}(1-9)+\frac{1}{3}(1+27)-\frac{1}{20}(1+243)\right] = 18\frac{2}{15}\pi \quad eg^3.$$

Пример 11. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, образованной линиями $y^2 = 8x$ и $x = 2$.

Парабола $y^2 = 8x$ и прямая $x = 2$ пересекаются в точках (2, 4) и (2, –4).



Найдем объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy, по формуле

$$V = \pi\int_a^b (x_2^2 - x_1^2)dy.$$

$x_1(y) = \dfrac{y^2}{8}$ и $x_2(y) = 2.$

Так как фигура вращения симметрична относительно оси Ox,

$$V = 2\pi\int_0^4\left[2^2 - \left(\frac{y^2}{8}\right)^2\right]dy = 2\pi\left(4y - \frac{y^5}{64\cdot 5}\right)\Bigg|_0^4 = \frac{128\pi}{5}eg^3.$$

Вычислить:

1. $\int_1^3 x^3 dx.$ **2.** $\int_1^2\left(x^2 + \frac{1}{x^4}\right)dx.$ **3.** $\int_1^4 \sqrt{x}dx.$

4. $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}}.$ **5.** $\int_a^{a\sqrt{3}} \frac{dx}{a^2 + x^2}.$ **6.** $\int_0^3 e^{x/3}dx.$

7. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}}.$ **8.** $\int_0^{\pi/4} \sin 4x\, dx.$ **9.** $\int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x} - 1}.$

10. $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{(1 + \operatorname{tg} x)^2}dx.$ **11.** $\int_0^4 \frac{dx}{1 + \sqrt{2x + 1}}.$ **12.** $\int_0^{\pi/2} \sin x \cos^2 x\, dx.$

13. $\int_0^{\pi/2} x \cos x\, dx.$

Определить среднее значение функции:

14. $y = \sin x$ на отрезке $[0;\ \pi].$

15. $y = \operatorname{tg} x$ на отрезке $\left[0;\ \frac{\pi}{3}\right].$

16. $y = \ln x$ на отрезке $[1;\ e].$

17. $y = x^2$ на отрезке $[a;\ b].$

18. $y = \frac{1}{1 + x^2}$ на отрезке $[-1;\ 1].$

Вычислить площадь, ограниченную линиями:

19. $xy = 4,\ x = 1,\ x = 4,\ y = 0.$ **20.** $y = \ln x,\ x = e,\ y = 0.$

21. $y = x^2,\ y = 2 - x^2.$ **22.** $y = x^2 + 4x,\ y = x + 4.$

23. Одной аркой циклоиды $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ и осью Ox.

24. Астроидой $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t. \end{cases}$ **25.** Кардиоидой $r = a(1 - \cos\varphi).$

26. $r = 3 + \sin 2\varphi$ между смежными наибольшим и наименьшим радиус-векторами.

Определить объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями:

27. $xy = 4,\ x = 1,\ x = 4,\ y = 0$ вокруг оси Ox.

28. $x^2 - y^2 = 4,\ y = \pm 2$ вокруг оси Oy.

29. $y = x^3,\ x = 0,\ y = 8$ вокруг оси Oy.

30. Одной арки циклоиды $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ вокруг оси Ox.

Определить длину дуги кривой:

31. Одной арки циклоиды $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$

32. $y = \ln x$ от $x = \dfrac{3}{4}$ до $x = \dfrac{12}{5}$.

33. $y = \ln(2\cos x)$ между смежными точками пересечения с осями Ox и Oy.

Вычислить интегралы:

34. $\int\limits_1^\infty \dfrac{dx}{x^2}$. **35.** $\int\limits_1^\infty \dfrac{dx}{x}$. **36.** $\int\limits_1^\infty \dfrac{dx}{\sqrt{x}}$.

37. $\int\limits_1^\infty \dfrac{dx}{x^n}$. **38.** $\int\limits_0^\infty e^{-x}dx$. **39.** $\int\limits_0^\infty xe^{-x^2}dx$.

40. $\int\limits_1^\infty \dfrac{dx}{1+x^2}$. **41.** $\int\limits_2^6 \dfrac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}$. **42.** $\int\limits_0^2 \dfrac{dx}{(x-1)^2}$.

43. $\int\limits_0^2 \dfrac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$.

§ 12. Функции нескольких переменных

Определение 1. Если каждой паре (x,y) значений двух независимых переменных величин x и y из некоторой области их изменения D соответствует определенное значение величины z, то говорят, что z есть функция двух переменных x и y, и обозначают $z = f(x, y)$.

Определение 2. Совокупность пар (x, y) значений x и y, при которых функция $z = f(x, y)$ принимает определенное действительное значение, называется областью существования этой функции.

Определение 3. Частной производной функции $z = f(x, y)$ по x называется предел отношения частного приращения Δz по x, $\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$ к приращению Δx при условии, что Δx стремится к нулю, т.е. $z'_x = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta_x z}{\Delta x}$.

Другие обозначения z'_x, f'_x, $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$.

Аналогично определяется частная производная по y:

$$z'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Наряду с определением 3 имеет место другое определение частных производных.

Определение 4. Частной производной функции $z = f(x, y)$ по x называется производная от z, взятая в предположении, что y – постоянная величина, аналогично, z'_y – это производная, посчитанная в предположении, что x – постоянна.

Пример 1. Найти частные производные от функции $z = x^2 y + e^{xy} + \sqrt{y}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y \cdot (x^2)' + e^{xy} \cdot (xy)'_x + 0 = 2xy + e^{xy} \cdot y,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 \cdot (y)' + e^{xy} \cdot (xy)'_y + (y^{\frac{1}{2}})' = x^2 + xe^{xy} + \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

Определение 5. Дифференциал первого порядка функции двух переменных находим по формуле

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

Пример 2. Найти dz для функции $z = \frac{x}{y}$.

Найдем частные производные:

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y} \cdot (x)' = \frac{1}{y},\ z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = x \cdot (y^{-1})' = -\frac{x}{y^2},\ \text{тогда}\ dz = \frac{1}{y} dx - \frac{x}{y^2} dy,\ \text{или}\ dz = \frac{ydx - xdy}{y^2}.$$

Приближенное вычисление с помощью дифференциала

Известно, что при малых приращениях аргументов x и y функция $z = f(x,y)$ получает полное приращение Δz, приближенно равное dz, т.е. $\Delta z \cong dz$.

Так как $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$,

$dz = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy$ и $dx = \Delta x$; $dy = \Delta y$, получим

$f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \cong f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y$ или

$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \cong f(x, y) + f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y$.

Введем обозначения $x_1 + \Delta x = x_2$, $y_1 + \Delta y = y_2$, получаем $f(x_2, y_2) \cong f(x_1, y_1) + f'_x(x_1, y_1)\Delta x + f'_y(x_1, y_1)\Delta y$,

где $\Delta x = x_2 - x_1$, $\Delta y = y_2 - y_1$.

Эта формула позволяет находить приближенное значение функции $z = f(x, y)$ в точке (x_2, y_2), если известно ее точное значение в точке (x_1, y_1).

Пример 3. Дана функция $z = \ln(\sqrt{x} + y)$ и точки $P_1(1; 0)$; $P_2(0{,}96; 0{,}05)$. Найти приближенное значение функции в точке P_2, исходя из ее точного значения в точке P_1.

1. Для отыскания приближенного значения функции $z = \ln(\sqrt{x} + y)$ в точке $P_2(0{,}96; 0{,}05)$ воспользуемся формулой

$$f(x_2, y_2) \cong f(x_1, y_1) + f'_x(x_1, y_1)\Delta x + f'_y(x_1, y_1)\Delta y,$$

где $\Delta x = 0{,}96 - 1 = -0{,}04$; $\Delta y = 0{,}05 - 0{,}00 = 0{,}05$;

$f(x_1, y_1) = \ln(\sqrt{1} + 0) = \ln 1 = 0$; $f(x_2, y_2) = \ln(\sqrt{0{,}96} + 0{,}05)$.

2. Находим частные производные f'_x и f'_y в точке $P_1(1; 0)$.

$$f'_x = [\ln(\sqrt{x} + y)]'_x = \frac{1}{\sqrt{x} + y} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}};\quad f'_x(1, 0) = \frac{1}{2};$$

$$f'_y = [\ln(\sqrt{x} + y)]'_y = \frac{1}{\sqrt{x + y}} \cdot 1;\ f'_y(1, 0) = 1.$$

3. Найденные значения $f'_x(1{,}0)$, $f'_y(1, 0)$, $\Delta x = -0{,}04$,
$\Delta y = 0{,}05$ подставим в формулу

$f(0{,}96; 0{,}05) = \ln(\sqrt{0{,}96} + 0{,}05) \cong 0{,}5\cdot(-0{,}04) + 1\cdot 0{,}05 = 0{,}03$, так как $f(1; 0) = 0$.

Ответ: $\ln(\sqrt{0{,}96} + 0{,}05) \cong 0{,}03$.

Определение 6. Частные производные от частных производных первого порядка называются частными производными второго порядка для функции $z = f(x,y)$ и обозначаются

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''_{xx};\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z''_{yy};$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = z''_{yx};\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z''_{xy}.$$

Доказано, что $z''_{xy} = z''_{yx}$; z''_{xy} и z''_{yx} называются смешанными частными производными второго порядка для функции
$z = f(x, y)$.

Пример 4. Доказать, что $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{1}{x^2}$, если
$z = \ln(y - x) - \ln x - \ln y$.

Найдем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y - x}(y - x)'_x - \frac{1}{x} - 0 = -\frac{1}{y - x} - \frac{1}{x},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)'_x = \frac{1}{(y - x)^2}(y - x)'_x + \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{(y - x)^2} + \frac{1}{x^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)'_y = \frac{1}{(y - x)^2}(y - x)'_y + 0 = \frac{1}{(y - x)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{(y - x)^2} + \left(-\frac{1}{(y - x)^2} + \frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x^2}.$$

$\dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{x^2}$, что и требовалось доказать.

Экстремумы функции двух переменных

Наибольшее и наименьшее значение функции $z = f(x,y)$ в замкнутой области

Определение 1. Функция $z = f(x, y)$ имеет максимум в точке $M_0(x_0, y_0)$, если $f(x_0, y_0) > f(x, y)$ для всех точек (x, y), достаточно близких к точке (x_0, y_0) и отличных от нее.

Определение 2. Функция $z = f(x, y)$ имеет минимум в точке $M_0(x_0, y_0)$, если $f(x_0, y_0) < f(x, y)$ для всех точек (x, y), достаточно близких к точке (x_0, y_0) и отличных от нее.

Максимум и минимум функции называются экстремумами функции $z = f(x, y)$.

Теорема 1 (необходимые условия экстремума).

Если функция $z = f(x, y)$ достигает экстремума в точке $M_0(x_0, y_0)$, то частные производные от функции $z = f(x, y)$, z'_x и z'_y обращаются в нуль или не существуют в точке M_0.

Точки, в которых частные производные обращаются в нуль или не существуют, называются критическими.

Теорема 2 (достаточный признак экстремума).

Пусть в некоторой области, содержащей критическую точку $M_0(x_0, y_0)$, функция $f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные до третьего порядка включительно, и пусть
$$A=\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2},\ B=\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x\partial y}\ \text{и}\ C=\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}.$$
Тогда:

1) $f(x, y)$ имеет максимум в точке M_0, если $A\cdot C - B^2 > 0$ и $A < 0$;

2) $f(x, y)$ имеет минимум в точке M_0, если $A\cdot C - B^2 > 0$ и $A > 0$;

3) $f(x, y)$ не имеет экстремума, если $A\cdot C - B^2 < 0$;

4) если $A \cdot C - B^2 = 0$, то экстремум может быть, может не быть.

Пример 5. Найти экстремумы функции $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$

1. Находим z'_x, z'_y и критические точки, т.е. такие точки, в которых z'_x и z'_y равны нулю.

$z'_x = 3x^2 - 6y$, $z'_y = 24y^2 - 6x$. Составим систему уравнений:
$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 6y = 0 \\ 24y^2 - 6x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0, y_1 = 0 \\ x_2 = 1, y_2 = 0,5 \end{cases}$$
$M_1(0, 0)$ и $M_2(1; 0,5)$ – критические точки.

2. Находим частные производные z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy} и их значения в критических точках:
$$z''_{xx} = 6x;\ z''_{xy} = -6;\ z''_{yy} = 48y;$$
$$A_1 = z''_{xx}(0,0) = 0;\ B_1 = z''_{xy}(0,0) = -6;$$
$$C_1 = z''_{yy}(0,0) = 0$$
В точке $M_1(0,0)$: $A_1\cdot C_1 - B_1^2 = 0 - 36 = -36 < 0$; значит, в точке M_1 экстремума нет.
$$A_2 = z''_{xx}(1;\ 0,5) = 6;\ B_2 = z''_{xy}(1;\ 0,5) = -6;$$
$$C_2 = z''_{yy}(1;\ 0,5) = 24$$
В точке $M_2(1; 0,5)$ $A_2\cdot C_2 - B_2^2 = 6\cdot 24 - 36 = 108 > 0$ и $A_2>0$, значит точка M_2 – точка минимума.

$z_{min}(1; 0,5) = 1^3 + 8\cdot(0,5)^3 - 6\cdot 1\cdot 0,5 + 1 = 0$.

Ответ: $z_{min}(1; 0,5) = 0$.

Чтобы найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = f(x, y)$ в замкнутой области, нужно:

а) найти критические точки, лежащие внутри области, вычислить значение функции в этих точках;

б) исследовать функцию на границе области; если граница состоит из нескольких различных линий, то исследование проводится для каждого участка в отдельности;

в) сравнить полученные значения функции и установить наибольшее и наименьшее значение функции.

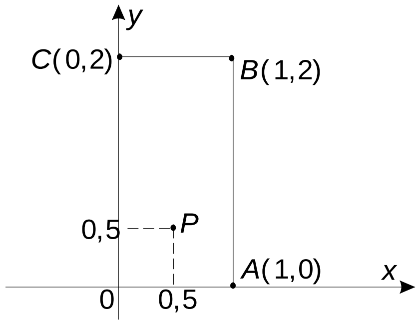
Пример 6. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = 2x^2 + y^2 - 2x - y$ в прямоугольнике

$0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 2$.

Решение.1. Находим $z'_x = 4x - 2$, $z'_y = 2y - 1$, для отыскания критических точек составим систему
$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 2 = 0 \\ 2y - 1 = 0 \end{cases} \text{ отсюда } x = 0,5;\ y = 0,5.$$
$P(0,5; 0,5)$ – критическая точка и принадлежит заданной области.

Находим значение в точке P:

$$z(0,5;0,5) = 2\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-2\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2} = -\frac{3}{4}$$



2. Граница области состоит из отрезков OA, AB, BC и CO. Определим наибольшее и наименьшее значение функции на каждом из этих участков. На отрезке OA: $y = 0$, а $0 \le x \le 1$. Если $y = 0$, то функция z на этом отрезке имеет вид $z = 2x^2 - 2x$, и задача сводится к отысканию наибольшего и наименьшего значения этой функции одного аргумента x на отрезке $[0; 1]$. $z'_x = 4x - 2$; $z'_x = 0$;
тогда $4x - 2 = 0$, отсюда $x = 0,5$. Находим значение z в точке $P_1(0,5; 0)$ и на концах отрезка, т.е. в точках $O(0, 0)$ и $A(1, 0)$.

$z_{\text{наим.}}(0,5; 0) = 2\cdot\frac{1}{4}-2\cdot\frac{1}{2} = -0,5$; $z(0; 0) = 0$; $z_{\text{наиб.}}(1; 0) = 0$.

Аналогично проводим решение на каждом из оставшихся участков. На отрезке AB: $x = 1$, тогда
$z = 2 + y^2 - 2 - y = y^2 - y$ функция аргумента y при $0 \le y \le 2$. $z'_y = 2y - 1$; $z'_y = 0$ при $y = 0,5$.
Находим значение z в точках $P_2(1; 0,5)$, $B(1; 2)$; $z_{\text{наим.}}(1; 0,5) = -\frac{1}{4}$; $z_{\text{наиб.}}(1; 2) = 2$, а $z_A = 0$ уже известно. На отрезке BC: $y = 2$, тогда $z = 2x^2 - 2x + 2$ при $0 \le x \le 1$. $z'_x = 4x - 2$; $z'_x = 0$ при $x = 0,5$. Находим значения z в $P_3(0,5; 2)$ и $C(0; 2)$ и $z_B = 2$ – известно.

$z_{\text{наим.}}(0,5; 2) = \frac{3}{2}$; $z_{\text{наиб.}}(0; 2) = 2$.

На отрезке CO: $x = 0$, тогда $z = y^2 - y$ при $0 \le y \le 2$.
$z'_y = 2y - 1$; $z'_y = 0$ при $y = 0,5$. Находим z в точках $P_4(0; 0,5)$ и $O(0; 0)$, в точке $C(0; 2)$ значение $z_{\text{наиб.}}(0; 2) = 2$ уже найдено.

$z_{\text{наим.}}(0; 0,5) = \frac{1}{4}-\frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$; $z(0; 0) = 0$.

Сравнивая полученные значения z в критической точке и наименьшие значения z на участках границы, заключаем, что $z_{\text{наим.}} = -\frac{3}{4}$ в точке $P(0,5; 0,5)$, а наибольшее значение $z_{\text{наиб.}} = 2$ в точках $B(1; 2)$ и $C(0; 2)$.

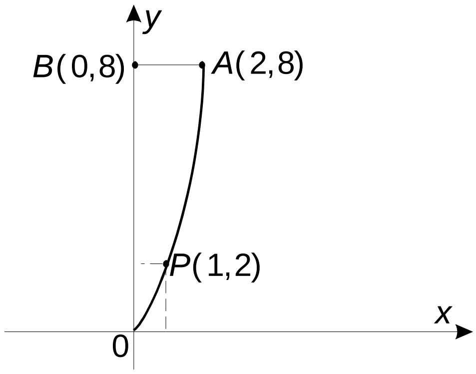
Пример 7. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = 3x^2 - 4xy + 4y + 2x + 6$ в области, ограниченной параболой $y = 2x^2$, прямой $y = 8$ и осью Oy ($x \ge 0$).

Решение. 1. Находим критические точки

$$\begin{cases} z'_x = 6x - 4y + 2 = 0 \\ z'_y = -4x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 1 \end{cases}$$

Получили критическую точку $P(1; 2)$, которая расположена на границе OA: $z(1; 2) = 3 - 8 + 8 + 2 + 6 = 11$.

2. Граница области состоит их трех участков: OA, AB, BO.



На участке OA: $y = 2x^2$, а $0 \le x \le 2$, функция имеет вид

$z = 11x^2 - 8x^3 + 2x + 6$. Находим $z'_x = 22x - 24x^2 + 2$, $z'_x = 0$, при $x = 1$ и $x = -\frac{1}{2}$, но $x = -\frac{1}{2}$ не входит в указанную область [0; 2]. Рассматриваем только $x = 1$, а $y = 2\cdot 1^2 = 2$, точка $P(1; 2)$ была уже отмечена. Находим $z(0; 0) = 6$, и значение z в точке $A(2; 8)$, т.е. $z(2; 8) = -10$: $z_{\text{наим.}} = -10$, $z_{\text{наиб.}}(1; 2) = 11$.

На участке AB: $y = 8$, $z = 3x^2 - 30x + 38$ при $0 \le x \le 2$.

$z'_x = 6x - 30$, $z'_x = 0$ при $x = 5$ – это значение не входит в область [0; 2].

Находим значение z в точке B, т.е. $z(0; 8) = 38$;

$z_{\text{наим.}}(2,8) = -10$; $z_{\text{наиб.}} = 38$ в точке B.

На участке BO: $x = 0$, $z = 4y + 6$ при $0 \le y \le 8$. По виду

$z = 4y + 6$ устанавливаем, что эта функция растет на [0; 8] и поэтому находим сразу значение z в точках B и O:

$z(0; 8) = 38$, $z(0; 0) = 6$.

3. Сравнивая найденные значения z, заключаем:

$z_{\text{наиб.}} = 38$ в точке $B(0; 8)$; $z_{\text{наим.}} = -10$ в точке $A(2; 8)$.

Указать области определения функций:

1. $z = x + y$. **2.** $z = \dfrac{4}{x+y}$. **3.** $\dfrac{z}{c} = \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}}$.

4. $\dfrac{z}{c} = 1 - \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}$. **5.** $z = x + \sqrt{x^2 - y^2}$. **6.** $\sqrt{z} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$.

7. Для функции $F(x, y) = \dfrac{x - 2y}{2x - y}$ вычислить $F(3,1)$, $F(1,3)$, $F(2,1)$, $F(1,2)$, $F(a,a)$, $F(a,-a)$.

8. Доказать, что если $F(x, y) = \dfrac{x}{x - y}$, то $F(a,b) + F(b,a) = 1$.

Найти частные производные функций:

9. $z = x^3 + 3x^2y - y^3$. **10.** $z = \ln(x^2 + y^2)$.

11. $z = \dfrac{y}{x}$. **12.** $z = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$.

13. $z = \dfrac{xy}{x - y}$. **14.** $u = xe^{-yx}$.

15. $u=\dfrac{2x-t}{x+2t}.$

16. Доказать, что если $z=\ln(\sqrt{x}+\sqrt{y})$, то $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{2}.$

17. Доказать, что если $z=\sqrt{x}\sin\dfrac{y}{x}$, то $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{z}{2}.$

Найти полные дифференциалы функций:

18. $z=x^2y.$ **19.** $z=\dfrac{xy}{x-y}.$ **20.** $z=e^{s/t}.$

21. $z=\sqrt{x^2+y^2}.$

22. Найти значение полного дифференциала функции:

1) $z=\dfrac{y}{x}$ при $x=2,\ y=1,\ dx=0{,}1,\ dy=0{,}2;$

2) $z=e^{xy}$ при $x=1,\ y=2,\ dx=-0{,}1,\ dy=0{,}1.$

23. Вычислить dz и Δz для функции $z=xy$ при $x=5,\ y=4,\ \Delta x=0{,}1,$ $\Delta y=-0{,}2.$

24. При деформации цилиндра его радиус R увеличился с 20 до 20,5 см, а высота H уменьшилась со 100 см до 98 см. Найти приближённое изменение объёма V по формуле $\Delta V\approx dV$.

25. Катеты прямоугольного треугольника, измеренные с точностью до 0,1см, оказались равными 7,5 см и 18 см. Определить абсолютную погрешность при вычислении гипотенузы.

26. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial v}$, если $z=\dfrac{x^2}{y}$, где $x=u-2v,\ y=v+2u.$

27. Пусть $z=F(x,y)$. Выразить $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ через $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial v}$, если:

1) $u=mx+ny,\ v=px+qy$; 2) $u=xy,\ v=\dfrac{y}{x}.$

28. Найти частные производные третьего порядка $z=x^3+x^2y+y^3.$

29. Проверить, что $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ для функций:

1) $z=\sin(ax-by)$; 2) $z=\dfrac{x^2}{y^2}$; 3) $z=\ln(x-2y).$

30. Найти частные производные четвёртого порядка $z=x^4+3x^2y^2-2y^4.$

31. Доказать, что если $u=\mathrm{arctg}(2x-t)$, то $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}=0.$

32. Показать, что функция $u = xe^{-y/x}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\right) = y\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

33. Найти $d^2 u$, если: 1) $u = \dfrac{y^2}{x^2}$; 2) $u = x \ln \dfrac{y}{x}$.

34. Доказать, что если $z = e^{x/y}$, то $y\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial z}{\partial y} - \dfrac{\partial z}{\partial x}$.

Написать уравнения касательной плоскости к поверхности:

35. $z = x^2 + 2y^2$ в точке $(1; 1; 3)$.

36. $xy = z^2$ в точке $(x_0; y_0; z_0)$.

37. $xyz = a^3$ в точке $(x_0; y_0; z_0)$.

38. Определить плоскость, касательную к поверхности $x^2 + 4y^2 + z^2 = 36$ и параллельную плоскости $x + y - z = 0$.

39. Написать уравнения нормали к поверхности $x^2 z + y^2 z = 4$ в точке $(-2; 0; 1)$. Построить нормаль и поверхность.

40. Найти экстремум функций:

1) $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$; 2) $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$.

41. Определить размеры прямоугольного открытого бассейна, имеющего наименьшую поверхность, при условии, что его объём равен V.

42. Определить размеры цилиндра наибольшего объёма при условии, что его полная поверхность равна $S = 6\pi$ м^2.

43. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 - y^2$ в круге $x^2 + y^2 \le 4$.

44. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$ в прямоугольнике, ограниченном прямыми $x = 0$, $y = 0$, $x = 1$, $y = 2$.

45. Найти наибольшее значение функции $z = x^2 y(4 - x - y)$ в треугольнике, ограниченном прямыми $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 6$.

§ 13. Дифференциальные уравнения

Дифференциальным уравнением называется уравнение, содержащее произвольные производные неизвестной функции (или нескольких неизвестных функций). Вместо производных могут входить дифференциалы.

Если неизвестные функции зависят от одного аргумента, то дифференциальное уравнение называется обыкновенным; если от нескольких, то уравнение называется дифференциальным уравнением с частными производными. Здесь рассматриваются только обыкновенные дифференциальные уравнения.

Общий вид дифференциального уравнения с одной неизвестной функцией таков: $\Phi(x, y, y'$ $, y'', ..., y^{(k)}) = 0$.
Порядком дифференциального уравнения называется порядок наивысшей из производных, входящих в это уравнение. Например, уравнение $\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} = x^2$ – второго порядка, $y''' = \cos x$ – третьего порядка, $y' + xy = \frac{1}{\cos^2 x}$ – уравнение первого порядка.
Функция $y = \varphi(x)$ называется решением дифференциального уравнения, если последнее обращается в тождество после подстановки $y = \varphi(x)$.
Основной задачей теории дифференциальных уравнений является нахождение всех решений данного дифференциального уравнения. В простейших случаях эта задача сводится к вычислению интеграла.
Решением дифференциального уравнения называется функция $y = f(x)$, при подстановке которой исходное дифференциальное уравнение обращается в тождество. (Если такая функция задана неявно, то она называется интегралом дифференциального уравнения).
Функция $y = 3e^{-x^2}$ является решением дифференциального уравнения $y' + 2xy = 0$, т.к. уравнение обращается в тождество после подстановки $y = 3e^{-x^2}$. Вместе с тем уравнение $y = 3e^{-x^2}$ является интегралом данного уравнения. Уравнения $\ln y + x^2 = 3$, $\ln y + x^2 = 5$ и т.д. являются интегралами данного дифференциального уравнения, а функции $y = e^{3-x^2}$,
$y = e^{-x^2}$,
$y = 0$ и т.д. – его решениями.

13. 1. Уравнения первого порядка

Общий вид дифференциального уравнения первого порядка таков: $\Phi(x, y, y') = 0$.
Уравнение, разрешенное относительно y', имеет вид $y' = f(x, y)$.
При этом предполагается, что функция $f(x, y)$ однозначно определена и непрерывна в некоторой области.
Дифференциальное уравнение первого порядка $y' = f(x, y)$ имеет бесчисленное множество решений. Линия, изображающая какой-либо интеграл дифференциального уравнения, называется интегральной кривой. Как правило, через данную точку (x_0, y_0) рассматриваемой области проходит единственная интегральная кривая**.** Соответствующее ей решение дифференциального уравнения называется частным решением. Совокупность всех частных решений называется общим решением. Общее решение дифференциального уравнения обычно представляют в виде некоторой функции $y = \varphi(x, C)$, где C – постоянная (константа).
Из общего решения можно получить любое частное решение при соответствующе выбранном значении C. Числа x_0, y_0 называются начальными условиями.

Уравнения с разделяющимися переменными

Уравнения с разделяющимися переменными могут быть записаны в виде $y' = f(x)g(y)$ или $M(x)N(y)dx + P(x)Q(y)dy = 0$.
Чтобы решить такое уравнение, надо обе его части умножить или разделить на такое выражение, чтобы в одну часть уравнения входило только x, а в другую – только y. Затем проинтегрировать обе части.

При делении обеих частей уравнения на выражение, содержащее неизвестные x и y, могут быть потеряны решения, обращающие это выражение в нуль .

Однородные уравнения

Однородные уравнения могут быть представлены в виде $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ или $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$, где отношение $\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$ можно представить как функцию отношения $\frac{y}{x}$.
Любое однородное уравнение подстановкой $y = tx$ (откуда $dy = t\,dx + x\,dt$) приводится к уравнению с разделяющимися переменными (см. §3).

Дифференциальные уравнения, приводимые к однородным

Уравнения вида $y' = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$ при $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ приводятся к однородным подстановкой $x = u + m$, $y = v + n$, где (m, n) – точка пересечения прямых $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ и $a_2x + b_2y + c_2 = 0$. Если же $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, то подстановка $a_1x + b_1y = t$ позволяет разделить переменные.

Линейные уравнения первого порядка

Уравнение вида $y' + a(x)y = b(x)$ называется линейным**.** Существует несколько методов решения этого уравнения.
Метод вариации произвольной постоянной (метод Лагранжа). Рассмотрим однородное уравнение $y' + a(x)y = 0$. Оно решается путём разделения переменных (см. §3). Для того чтобы найти решения исходного уравнения, надо в общем решении заменить произвольную постоянную C на неизвестную функцию $C(x)$. Затем выражение, полученное для y, подставить в исходное линейное уравнение и найти функцию $C(x)$.
Метод Бернулли. Решение линейного уравнения ищем в виде $y = u(x)v(x)$. Тогда исходное уравнение примет вид $\frac{du}{dx}v + u\frac{dv}{dx} + a(x)uv = b(x)$. В качестве $v(x)$ выбираем одно из решений уравнения $\frac{dv}{dx} + a(x)v = 0$. Тогда $u(x)$ находим из уравнения $\frac{du}{dx}v = b(x)$. Перемножая $u(x)$ и $v(x)$, получим решение линейного уравнения.

Уравнение Бернулли

Уравнение вида $y' + a(x)y = b(x)y^n$, $(n \neq 1)$ называется уравнением Бернулли. Чтобы решить такое уравнение, надо обе его части разделить на y^n и сделать замену $z = \frac{1}{y^{n-1}}$. После замены получается линейное уравнение. Часто решение уравнения Бернулли удобней искать в виде $y = uv$, не приводя его к линейному уравнению.

Уравнения второго порядка

Общий вид дифференциального уравнения второго порядка таков: $\Phi(x, y, y', y'') = 0$.
Уравнение, разрешенное относительно y'', имеет вид $y'' = f(x,y,y')$.

Обычно задание начальных условий $x = x_0$, $y = y_0$,

$y' = y_0'$ (или $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$) определяет единственное решение уравнения.
Решение уравнения $y'' = f(x, y, y')$, соответствующее заданным начальным значениям, называется частным.
Совокупность всех частных решений называется общим решением. Общее решение стараются представить в виде некоторой функции $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ (C_1 и C_2 – константы), которая дала бы любое частное решение (при соответствующем выборе значений C_1 и C_2).

Уравнения, допускающие понижение порядка

Иногда дифференциальное уравнение второго или более высокого порядка допускает понижение порядка. Наиболее распространены два случая.
Случай 1. Уравнение не содержит y. Тогда порядок уравнения можно понизить, взяв за новую неизвестную функцию y', т.е. сделать замену $z = y'$. Уравнение примет вид $\Phi(x, z, z') = 0$.
Случай 2. Уравнение не содержит x. Порядок уравнения понижается с помощью подстановки $y' = P(y)$. В этом случае $y'' = P'(y)P(y)$. Уравнение примет вид $\Phi(y, p, p'p) = 0$.

Линейные однородные уравнения второго порядка

Линейным однородным уравнением второго порядка называется уравнение вида $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$, (1)
где функции $P(x)$ и $Q(x)$ не зависят от y.
Теорема 1. Если функция $\varphi(x)$ является решением уравнения (1), то функция $C\varphi(x)$ (C – постоянная) – также решение.
Теорема 2. Если функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ являются решениями уравнения (1), то функция $\varphi_1(x) + \varphi_2(x)$ – также решение.
Следствие. Если функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ являются решениями уравнения (1), то функция $C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x)$ (C_1 и C_2 – константы) – тоже решение.
Функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ линейно независимы, если соотношение $a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x) = 0$ возможно лишь тогда, когда обе постоянные a_1, a_2 равны нулю.
Если $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ линейно независимы и являются решениями уравнения (1), то функция $y = C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x)$ даёт общее решение.

Линейные однородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Уравнение вида $ay'' + by' + cy = 0$, где a, b, c – константы, называется линейным однородным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами.
Чтобы решить такое уравнение, надо составить характеристическое уравнение $ak^2 + bk + c = 0$ и найти его корни k_1 и k_2.
Возможны три случая.
Случай 1. Характеристическое уравнение имеет два действительных корня k_1 и k_2 (если дискриминант $D = b^2 - 4ac > 0$). Тогда общее решение имеет вид: $y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}$, где C_1 и C_2 – произвольные константы.
Случай 2. Характеристическое уравнение имеет два равных действительных корня $k = k_1 = k_2$ (если дискриминант $D = b^2 - 4ac = 0$). Тогда общее решение имеет вид:
$y = C_1e^{kx} + C_2xe^{kx}$, C_1 и C_2 – произвольные константы.
Случай 3. Характеристическое уравнение имеет комплексно-сопряжённые корней $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$, где $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица (если дискриминант $D = b^2 - 4ac < 0$). Общее решение в этом случае можно записать в виде:
$y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$, где C_1 и C_2 – произвольные константы.

Сведём все три случая в табл. 1.

Таблица 1

Корни характеристического уравнения	Вид общего решения
1. $k_1 \neq k_2$ действительные	$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$
2. $k_1 = k_2 = k$	$y = C_1 e^{kx} + x C_2 e^{kx}$
3. $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$	$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$

Линейные неоднородные уравнения второго порядка

Линейным неоднородным уравнением второго порядка называется уравнение вида

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x), \quad (1)$$

где функции $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ не зависят от y.

Теорема наложения. Если $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ являются решениями уравнения (1) для различных правых частей $R_1(x)$ и $R_2(x)$, то их сумма $y = \varphi_1(x) + \varphi_2(x)$ будет решением такого же уравнения с правой частью $R(x) = R_1(x) + R_2(x)$.

Следствие. Для получения общего решения неоднородного уравнения следует к какому-либо его частному решению y^* прибавить общее решение $\bar{y}$ соответствующего однородного уравнения, т.е. $y = y^* + \bar{y}$ – общее решение уравнения (1).

Метод вариации постоянных

Рассмотрим линейное уравнение второго порядка:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$$

Пусть $y = C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x)$ – общее решение соответствующего однородного уравнения. Ищем общее решение уравнения, считая C_1 и C_2 неизвестными функциями от x.

Вводим новое условие $C_1'\varphi_1(x) + C_2'\varphi_2(x) = 0$, получаем, подставляя y в исходное уравнение:

$C_1'\varphi_1'(x) + C_2'\varphi_2'(x) = R(x)$.

Решая систему линейных уравнений, найдем C_1' и C_2' и далее, интегрируя, C_1 и C_2. Метод вариации постоянных позволяет решать линейные уравнения любого порядка.

Правила нахождения частного решения неоднородного уравнения второй степени

Чтобы найти общее решение линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами

$ay'' + by' + cy = R(x)$, нужно к его частному решению y^* прибавить общее решение $\bar{y}$ однородного уравнения (см. табл. 1 §14).

Для правых частей $R(x)$, имеющих вид $P_n(x)e^{\alpha x}$, где $P_n(x)$ –многочлен степени n, или $e^{\alpha x}(M\cos\beta x + N\sin\beta x)$ для нахождения y^* нужно помнить следующие правила.

Правило 1. y^* «похожа» на правую часть $R(x)$.

Правило 2. y^* ищем в общем виде.

Правило 3. Не забыть о связи с корнями характеристического уравнения.

Подробно это описано в табл. 2.

Таблица 2

Связь с корнями характеристического уравнения	Вид $R(x)$	Вид y^*
а) $k_1 \neq \alpha$; $k_2 \neq \alpha$ б) $k_1 = \alpha$; $k_2 \neq \alpha$ в) $k_1 = k_2 = \alpha$	$P_n(x)e^{\alpha x}$	$y^* = Q_n(x)\, e^{\alpha x}$ $y^* = xQ_n(x)\, e^{\alpha x}$ $y^* = x^2Q_n(x)\, e^{\alpha x}$
а) $k_{1,2} \neq \alpha \pm i\beta$ б) $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$	$e^{\alpha x}(M\cos\beta x + N\sin\beta x)$	$y^* = e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$ $y^* = xe^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$

Замечания: 1) $Q_n(x)$ многочлен степени n в общем виде, например, $Q_0(x) = A$, $Q_1(x) = Ax + B$, $Q_2(x) = Ax^2 + Bx + C$ и т.д.;

2) α может быть равно нулю;

3) если M или N равно нулю, y^* сохраняет свой вид.

Пример 1. Найти решение уравнения $xy' + \ln x = 1$, удовлетворяющее начальным условиям $y(e) = \frac{1}{2}$.

Решение. Выразим из уравнения y':

$$xy' = 1 - \ln x; \; y' = \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}$$

Получим уравнение с разделяющимися переменными (см. §3).

Учитывая то, что $y' = \frac{dy}{dx}$, получаем следующее уравнение:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}, \quad dy = \left(\frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}\right)dx.$$

Переменные разделены. Интегрируем обе части уравнения: $\int dy = \int\left(\frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}\right)dx$;

$$y = \ln x - \frac{1}{2}\ln^2 x + C.$$

Чтобы найти решение уравнения, удовлетворяющее начальным условиям, подставим $x_0 = e$ и $y_0 = \frac{1}{2}$ в решение и найдем значение константы C:

$\frac{1}{2} = \ln e - \frac{1}{2}\ln^2 e + C$; $\frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} = C.$ Отсюда $C = 0$.

Следовательно, $y = \ln x - \frac{1}{2}\ln^2 x$ – требуемое частное решение.

Пример 2. Решить уравнение $\frac{y}{x^2}dy - (1-y)dx = 0$.

Решение. Данное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными (см. §3). Умножим обе части уравнения на выражение $\frac{x^2}{1-y}$:

$$\frac{x^2}{1-y}\cdot\frac{y}{x^2}dy - \frac{x^2}{1-y}\cdot(1-y)dx = 0; \quad \frac{y}{1-y}dy = x^2dx.$$

Переменные разделены. Интегрируем обе части:

$\int \frac{y}{1-y}dy = \int x^2 dx;\ -y - \ln|1-y| = \frac{x^3}{3} + C$ – общий интеграл.

При умножении на $\frac{1}{1-y}$ могло быть потеряно решение

$1 - y = 0$, т.е. $y = 1$.

Подставляя $y = 1$ и $dy = 0$ в исходное уравнение, получаем тождество. Следовательно, $y = 1$ – решение уравнения.

Ответ: $-y - \ln|1-y| = \frac{x^3}{3} + C$, $y = 1$.

Пример 3. Решить уравнение $x^2 y' = y(x+y)$.

Решение. Выразим из уравнения y': $y' = \frac{y}{x^2}(x+y)$, $y' = \frac{y}{x}\left(\frac{x+y}{x}\right)$, $y' = \frac{y}{x}(1+\frac{y}{x})$. Получим однородное уравнение (см. §4). Делаем замену $t = \frac{y}{x}$, $y = tx$, $y' = t'x + t$:

$t'x + t = t(1+t)$, $t'x = t^2$, $x\,dt = t^2 dx$ – уравнение с разделяющимися переменными. Решаем его: $\frac{dt}{t^2} = \frac{dx}{x}$, $\int \frac{dt}{t^2} = \int \frac{dx}{x}$, $-\frac{1}{t} = \ln|x| + C$. Возвращаясь к старой переменной y, получаем:

$-\frac{x}{y} = \ln|x| + C$.

Пример 4. Решить уравнение $(x^2 - 2xy)\,dy + y^2 dx = 0$.

Решение. Рассмотрим отношение

$\frac{y^2}{x^2 - 2xy} = \frac{y^2}{x^2\left(1 - \frac{2xy}{x^2}\right)} = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2}{1 - 2\left(\frac{y}{x}\right)}$. Так как оно представимо в виде функции аргумента $\frac{y}{x}$, то данное уравнение является однородным (см. §4). Вводим новую переменную $t = \frac{y}{x}$,

$y = tx$, $dy = tdx + xdt$: $\frac{dy}{dx} = -\frac{y^2}{x^2 - 2xy}$, $\frac{dy}{dx} = -\frac{y^2}{x^2 - 2xy}$, $\frac{tdx + xdt}{dx} = -\frac{t^2}{1-2t}$,

$x\,dt = \left(-\frac{t^2}{1-2t} - t\right)dx$ – уравнение с разделяющимися переменными. $\int \frac{1-2t}{t(t-1)}dt = \int \frac{dx}{x}$,

$-\ln|t| - \ln|t-1| = \ln|x| + C$. Пользуясь свойствами логарифма, это выражение можно преобразовать: $\ln|t(t-1)| = -\ln C_1 |x|$. (Мы ввели новую константу C_1, связанную со старой следующим образом: $C = \ln C_1$). Потенцируя обе части полученного выражения (потенцирование – действие, обратное логарифмированию), получаем интеграл уравнения

$t(t-1) = \frac{1}{C_1 x}$. Возвращаемся к переменной y: $\frac{y}{x}(\frac{y}{x} - 1) = \frac{1}{C_1 x}$, $y(y-x) = C_2 x$, где $C_2 = \frac{1}{C_1}$.

Ответ: $y(y-x) = C_2 x$.

Пример 5. Решить уравнение $y' = 2\left(\frac{y+1}{x+y-2}\right)^2$.

Решение. Находим точку пересечения прямых $\begin{cases} y+1=0, \\ x+y-2=0. \end{cases}$ Получаем точку (3, –1). Введём замену $x-3=t$, $y+1=z$, получим однородное уравнение $\dfrac{dz}{dt}=2\dfrac{z^2}{(t+z)^2}$. Пусть

$zz=tu$, $dz=tdu+udt$, тогда $\dfrac{tdu+udt}{dt}=2\dfrac{t^2u^2}{(t+tu)^2}$, $tdu=\left(2\dfrac{u^2}{(1+u)^2}-u\right)dt$,

$tdu=-\dfrac{u(1+u^2)}{(1+u)^2}dt$, $\dfrac{(1+u)^2}{u(1+u^2)}du=-\dfrac{dt}{t}$. Интегрируем:

$\int\dfrac{(1+u)^2}{u(1+u^2)}du=\int\dfrac{du}{u}+\int\dfrac{2du}{1+u^2}=\ln|u|+2\operatorname{arctg}u+C$. $-\int\dfrac{dt}{t}=-\ln|t|+C$. Итак,

$\ln|u|+2\operatorname{arctg}u=-\ln|t|+C$, $ut=C_1e^{-2\operatorname{arctg}u}$, где $C=\ln C_1$. Возвращаясь к старым переменным, получаем решение исходного уравнения: $y+1=C_1e^{-2\operatorname{arctg}\frac{y+1}{x-3}}$.

Пример 6. Решить уравнение $(x+y+2)dx+(2x+2y-1)dy=0$.

Решение. Поскольку прямые $x+y+2=0$ и $2x+2y-1=0$ параллельны, то подстановкой $t=x+y$, $dy=dt-dx$ переменные разделяются:

$(t+2)dx+(2t-1)(dt-dx)=0$, $(3-t)dx+(2t-1)dt=0$. Разделяем переменные: $dx=\dfrac{1-2t}{3-t}dt$.

Интегрируем: $\int dx=\int\dfrac{1-2t}{3-t}dt$, $x=2t+5\ln|3-t|+C$. Возвращаемся к старым переменным ($t=x+y$), получаем окончательный ответ: $x+2y+5\ln|3-x-y|+C=0$.

Пример 7. Решить уравнение $xy'+y=\cos x$.

Решение. Разделим обе части уравнения на x:

$y'+\dfrac{y}{x}=\dfrac{\cos x}{x}$. Получим линейное уравнение.

Решаем уравнение: $y'+\dfrac{y}{x}=0$.

Разделяем переменные: $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{y}{x}$; $\dfrac{dy}{y}=-\dfrac{dx}{x}$.

Интегрируем обе части: $\int\dfrac{dy}{y}=-\int\dfrac{dx}{x}$; $\ln|y|=-\ln|x|+C$.

Пользуясь свойствами логарифма, получаем $y=\dfrac{C_1}{x}$. (Мы ввели новую константу C_1, связанную со старой следующим образом: $C=\ln C_1$). Считая C_1 функцией от x, подставляем в полученное линейное уравнение $y=\dfrac{C_1}{x}$ и $y'=\dfrac{C_1'x-C_1}{x^2}$:

$\dfrac{C_1'x-C_1}{x^2}+\dfrac{C_1}{x}\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{\cos x}{x}$, $\quad\dfrac{C_1'}{x}-\dfrac{C_1}{x^2}+\dfrac{C_1}{x^2}=\dfrac{\cos x}{x}$.

Отсюда находим $C'_1=\cos x$, $C_1=\sin x+B$, где B – константа.

Ответ: $y=\dfrac{\sin x+B}{x}$ – решение уравнения.

Пример 8. Решить уравнение $y'+2xy=2x^3y^3$.

Решение. Данное уравнение является уравнением Бернулли. Разделим обе части уравнения на y^3:

$$\frac{y'}{y^3}+\frac{2xy}{y^3}=\frac{2x^3y^3}{y^3},$$

$$\frac{y'}{y^3}+\frac{2x}{y^2}=2x^3. \qquad (1)$$

Делаем замену $z=\frac{1}{y^2}$, $z'=-\frac{2}{y^3}y'$.

Отсюда находим $y'=-\frac{1}{2}z'y^3$.

Подставляем в уравнение (1): $-\frac{1}{2}\frac{z'y^3}{y^3}+2xz=2x^3$,

$$-\frac{1}{2}z'+2xz=2x^3 \qquad (2)$$

линейное уравнение.

Решаем уравнение $-\frac{1}{2}z'+2xz=0$.

Разделяем переменные $-\frac{1}{2}\frac{dz}{dx}=-2xz$; $\frac{dz}{z}=4xdx$.

Интегрируем обе части уравнения: $\int\frac{dz}{z}=\int 4xdx$; $\ln|z|=2x^2+C$.

Потенцируем обе части полученного выражения: $z=C_1e^{2x^2}$, где $C_1=e^C$.

Считая C_1 функцией от x, подставляем в линейное уравнение (2)

$z=C_1e^{2x^2}$ и $z'=C_1'e^{2x^2}+4xC_1e^{2x^2}$:

$$-\frac{1}{2}C_1'e^{2x^2}-2xC_1e^{2x^2}+2xC_1e^{2x^2}=2x^3.$$

Выражаем C'_1: $C_1'=-4x^3e^{-2x^2}$.

Интегрируя, находим $C_1=x^2e^{-2x^2}+\frac{1}{2}e^{-2x^2}+A$, где A – константа.

Решение уравнения (2):

$$z=(x^2e^{-2x^2}+\frac{1}{2}e^{-2x^2}+A)e^{2x^2}, \quad z=x^2+\frac{1}{2}+Ae^{2x^2}.$$

Возвращаемся к переменной y:

$\frac{1}{y^2}=x^2+\frac{1}{2}+Ae^{2x^2}$ – общий интеграл уравнения.

Пример 9. Решить уравнение $x\frac{dy}{dx}+y=y^2\ln x$.

Решение. Это уравнение Бернулли. Его можно решать с помощью замены $z=\frac{1}{y}$, которая приведёт исходное уравнение к линейному. Но в данном случае уравнение проще решить методом Бернулли. Будем искать решения уравнения в виде произведения двух функций:

$y = uv$, $y' = u'v + uv'$. Тогда $xu'v + xuv' + uv = u^2v^2 \ln x$, $xu'v + u(xv' + v) = u^2v^2 \ln x$. Функцию *v(x)* найдём как частное решение уравнения $xv' + v = 0$, $\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}$, $v = \frac{1}{x}$.

Тогда $xu'\frac{1}{x} = u^2 \frac{1}{x^2} \ln x$, $u' = \frac{u^2}{x^2} \ln x$, разделяем переменные: $\frac{du}{u^2} = \frac{\ln x}{x^2} dx$.

Интегрируем: $\int \frac{du}{u^2} = \int \frac{\ln x}{x^2} dx$, $-\frac{1}{u} = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} - C$, $u = \frac{x}{\ln x + Cx + 1}$. Таким образом,

$y = uv = \frac{x}{\ln x + Cx + 1} \cdot \frac{1}{x}$.

Ответ: $y = \frac{1}{\ln x + Cx + 1}$.

Пример 10. Решить задачу Коши $y'' + 2y' = e^x (y')^2$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 1$.

Решение. Уравнение не содержит искомой функции, поэтому с помощью подстановки $y' = p(x)$, $y'' = p'(x)$ можно понизить порядок уравнения (см. §12): $p' + 2p = e^x p^2$ – уравнение Бернулли, его решения будем искать в виде $p = uv$: $u'v + uv' + 2uv = e^x u^2 v^2$.

Решаем два уравнения:

I. $v' + 2v = 0$, $\frac{dv}{v} = -2dx$, $\ln v = -2x$, $v = e^{-2x}$;

II. $u'e^{-2x} = e^x u^2 e^{-4x}$, $u' = u^2 e^{-x}$, $\frac{du}{u^2} = e^{-x} dx$, $-\frac{1}{u} = -e^{-x} - C$, $u = \frac{1}{C + e^{-x}}$.

Итак, $p = uv = \frac{1}{C + e^{-x}} e^{-2x} = \frac{1}{Ce^{2x} + e^x}$.

Используя начальные условия, найдём константу *C*. Поскольку $p = y'$, то $p(0) = y'(0) = 1$.

Подставим в полученное решение: $1 = \frac{1}{Ce^{2\cdot 0} + e^0} = \frac{1}{C+1}$. Следовательно, $C = 0$. Итак,

$y' = p = \frac{1}{e^x} = e^{-x}$. Решаем полученное уравнение: $dy = e^{-x} dx$, $y = -e^{-x} + A$. Подставляем начальные условия: $-1 = -e^{-0} + A$, -1 = -1 + *A*. Следовательно, *A* = 0. Итак, частное решение исходного уравнения $y = -e^{-x}$.

Пример 11.Решить задачу Коши $yy'' - (y')^2 = y^2 \ln y$, $y(0) = y'(0) = 1$.

Решение. Уравнение не содержит в явном виде независимую переменную *x* (см. §12). С помощью подстановки $y' = p(y)$, $y'' = p'p$ понизим порядок уравнения:

$yp'p - p^2 = y^2 \ln y$, $yp' - p = \frac{1}{p} y^2 \ln y$ – уравнение Бернулли. Ищем решение этого уравнения в виде *p* = *uv*: $yu'v + yuv' - uv = \frac{y^2 \ln y}{uv}$, $yu'v + u(yv' - v) = \frac{y^2 \ln y}{uv}$.

Решаем два уравнения:

I. $yv' - v = 0$, $\frac{dv}{v} = \frac{dy}{y}$, $\ln|v| = \ln|y|$, $v = y$;

II. $yu'y = \frac{y^2 \ln y}{uy}$, $y^2 u' = \frac{y \ln y}{u}$, $udu = \frac{\ln y}{y} dy$, $\frac{u^2}{2} = \frac{\ln^2 y}{2} + \frac{C}{2}$, $u = \sqrt{\ln^2 y + C}$.

Итак, $p = uv = y\sqrt{\ln^2 y + C}$.

Найдём константу *C,* подставляя начальные условия: $p(1)=y'(0)=1$, $y(0)=1$:

$1=1\sqrt{\ln^2 1+C}$, $C = 1$.

Итак, $y'=y\sqrt{\ln^2 y+1}$, $\dfrac{dy}{y\sqrt{\ln^2 y+1}}=dx$,

$$x+\ln A=\int\frac{dy}{y\sqrt{\ln^2 y+1}}=\int\frac{d\ln y}{\sqrt{\ln^2 y+1}}=\ln|\ln y+\sqrt{\ln^2 y+1}|,\ \ln y+\sqrt{\ln^2 y+1}=Ae^x.$$

Подставляем начальные условия $y(0) = 1$, находим константу A: $\ln 1+\sqrt{\ln^2 1+1}=Ae^0$, A = 1.

Итак, $\ln y+\sqrt{\ln^2 y+1}=e^x$, или $1+\ln^2 y=e^{2x}-2e^x\ln y+\ln^2 y$, или $2e^x\ln y=e^{2x}-1$, или

$$\ln y=\frac{e^{2x}-1}{2e^x},\ y=e^{\frac{e^{2x}-1}{2e^x}}.$$

Ответ: $y=e^{\frac{e^{2x}-1}{2e^x}}$.

Пример 12. Найти общее решение уравнения

$y''-2y'+y=0$.

Решение. Данное уравнение является линейным однородным уравнением второго порядка (см. §13).

Составляем характеристическое уравнение:

$k^2-2k+1=0$. Решаем его: $D = 4 - 4 = 0$, $k = 2/2 = 1$, так как $D = 0$, то общее решение имеет вид: $\overline{y}=C_1e^x+C_2xe^x$ (см. табл. 1, случай 2).

Пример 13. Найти общее решение уравнения $y''-y'-2y=0$.

Решение. Составляем характеристическое уравнение:

$k^2-k-2=0$. Решаем его: $D=1-4\cdot1\cdot(-2)=9$,

$k_1=\dfrac{1+3}{2}=2$, $k_2=\dfrac{1-3}{2}=-1$. Так как $D > 0$, то общее решение имеет вид: $\overline{y}=C_1e^{2x}+C_2e^{-x}$ (см. табл. 1, случай 1).

Пример 14. Найти общее решение уравнения $5y''-6y'+5y=0$.

Решение. Характеристическое уравнение

$5k^2-6k+5=0$.

Решаем его: $D = 36 - 100 = -64$. Так как $D < 0$, то решением будет пара комплексно-сопряжённых корней (см.§14, случай 3):

$k_1=\dfrac{6+\sqrt{-64}}{10}$, $k_2=\dfrac{6-\sqrt{-64}}{10}$, $(\sqrt{-64}=\sqrt{64\cdot(-1)}=8\sqrt{-1}=8i)$, т.е. корни характеристического уравнения $k_{1,2}=\dfrac{3}{5}\pm\dfrac{4}{5}i$. В нашем случае $\alpha=\dfrac{3}{5}$, $\beta=\dfrac{4}{5}$.

Тогда общее решение однородного уравнения

$\overline{y}=e^{\frac{3}{5}x}(C_1\cos\frac{4}{5}x+C_2\sin\frac{4}{5}x)$ (см. табл. 1, случай 3).

Пример 15. Найти частное решение уравнения

$y''-y'=2(1-x)$, удовлетворяющее начальным условиям:

$y(0)=1$, $y'(0)=1$.

Решение. Найдём общее решение данного неоднородного уравнения $y=y^*+\overline{y}$.

Сначала найдем общее решение однородного уравнения $\overline{y}$. Составляем и решаем характеристическое уравнение:

$k^2 - k = 0$, $k_1 = 0$, $k_2 = 1$. Из табл. 1

$\overline{y} = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_1x} = C_1 + C_2e^x$ (т.к. $e^{0x} = e^0 = 1$).

Подберем частное решение неоднородного уравнения y^*. Правую часть уравнения можно записать в виде

$R(x) = e^{0x}2(1 - x) = e^{\alpha x}P(x)$ (см. §17). В нашем случае $\alpha = 0$ и

$P(x) = 2 - 2x$ – многочлен первой степени.

Так как $\alpha = 0$ является корнем характеристического уравнения, то из табл. 2, случай 1б:

$y^* = x(Ax + B)e^{0x} = Ax^2 + Bx$

Найдём $(y^*)'$, $(y^*)''$ и подставим в исходное уравнение

$(y^*)' = 2Ax + B$

$(y^*)'' = 2A$

$2A - 2Ax - B = 2 - 2x$

Получаем систему уравнений:

$$\begin{array}{l} x^0: \\ x\ : \end{array}\begin{cases} 2A - B = 2, \\ -2A = -2. \end{cases}$$

Отсюда $A = 1$, $B = 0$. Следовательно, $y^* = x^2$ и

$y = C_1 + C_2e^x + x^2$. Используя начальные условия, находим C_1 и C_2: $y(0) = C_1 + C_2e^0 + 0^2 = C_1 + C_2 = 1$,

$y'(0) = C_2e^0 + 2\cdot 0 = C_2 = 1$.

Отсюда $C_2 = 1$ и $C_1 = 0$.

Ответ: $y = e^x + x^2$ – искомое частное решение.

Пример 16. Найти частное решение уравнения $y'' + y' - 2y = \cos x - 3\sin x$ при начальных условиях $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

Решение. Характеристическое уравнение $k^2 + k - 2 = 0$ имеет корни $k_1 = 1$, $k_2 = -2$, поэтому общее решение однородного уравнения $\overline{y} = C_1e^x + C_2e^{-2x}$. Правую часть уравнения можно записать в виде $R(x) = e^{0x}(\cos x - 3\sin x)$. Отсюда $\alpha = 0$, $\beta = 1$, частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде $y^* = A\cos x + B\sin x$ (см. табл.2, случай 2а).

Итак

$$\left.\begin{array}{l|l} y^* = A\cos x + B\sin x & \times(-2) \\ (y^*)' = -A\sin x + B\cos x & \times 1 \\ (y^*)'' = -A\cos x - B\sin x & \times 1 \end{array}\right| +$$

Получаем систему

$$\begin{array}{l} \cos x: \\ \sin x: \end{array}\begin{cases} -2A + B - A = 1 \\ -2B - A - B = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 1 \end{cases}$$

Следовательно, частное решение неоднородного уравнения $y^* = \sin x$ и общее решение данного уравнения $y = \overline{y} + y^* = C_1e^x + C_2e^{-2x} + \sin x$, $y' = C_1e^x - 2C_2e^{-2x} + \cos x$. Найдём C_1 и C_2, используя начальные условия: $\begin{cases} 1 = C_1e^0 + C_2e^{-2\cdot 0} + \sin 0 \\ 2 = C_1e^0 - 2C_2e^{-2\cdot 0} + \cos 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = C_1 + C_2 \\ 2 = C_1 - 2C_2 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} C_2 = 0 \\ C_1 = 1 \end{cases}$$

Итак, $y = e^x + \sin x$ – частное решение исходного уравнения.

Пример 17. Найти общее решение дифференциального уравнения методом вариации произвольных постоянных $y'' + 4y = \dfrac{1}{\cos 2x}$.

Решение. Характеристическое уравнение $k^2 + 4 = 0$ имеет корни $k_{1,2} = \pm 2i$, поэтому общее решение однородного уравнения $\overline{y} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$. Частное решение исходного уравнения методом неопределённых коэффициентов искать нельзя (функция $f(x)$ имеет другой вид), поэтому используем метод вариации произвольных постоянных (см. §16). Будем искать решение уравнения в виде $y = C_1(x)\cos 2x + C_2(x)\sin 2x$, где функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ нужно найти из системы уравнений

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos 2x + C_2'(x)\sin 2x = 0 \\ C_1'(x)(\cos 2x)' + C_2'(x)(\sin 2x)' = \dfrac{1}{\cos 2x} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C_1'(x)\cos 2x + C_2'(x)\sin 2x = 0 \\ -2C_1'(x)\sin 2x + 2C_2'(x)\cos 2x = \dfrac{1}{\cos 2x} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C_1' = -\dfrac{\sin 2x}{2\cos 2x} \\ C_2'(x) = 1/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1(x) = -\dfrac{1}{2}\int \operatorname{tg} 2x dx = \dfrac{1}{4}\ln|\cos 2x| + A \\ C_2(x) = x/2 + B \end{cases}$$

Таким образом, общее решение исходного уравнения

$$y = \frac{1}{4}\cos 2x \ln|\cos 2x| + A\cos 2x + \frac{1}{2}x\sin 2x + B\sin 2x$$

Уравнения с разделяющимися переменными

1. $(xy^2 + x)dx + (y - x^2 y)dy = 0.$

2. $xyy' = 1 - x^2.$

3. $yy' = \dfrac{1-2x}{y}.$

4. $y' = \dfrac{1+y^2}{1+x^2};\ \ y(0) = 1.$

Однородные уравнения

5. $y' = \dfrac{y^2}{x^2} - 2.$

6. $y' = \dfrac{x-y}{x+y}.$

7. $y' = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}.$

8. $y' = e^{\frac{y}{x}} + \dfrac{y}{x}.$

Линейные уравнения и уравнения Бернулли

9. $y' + 2y = 4x.$

10. $y' + \dfrac{1-2x}{x^2}y = 1.$

11. $y' = \dfrac{1}{2x - y^2}.$

12. $y' - y\operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\cos x};\quad y(0) = 0.$

13. $y' + 2xy = 2x^3y^3.$

14. $y' - y\operatorname{tg} x + y^2\cos x = 0.$

Разные задачи

15. $y' = \dfrac{x^2 + xy + y^2}{x^2}$. **16.** $x(x^2+1)y' + y = x(1+x^2)^2$.

17. $y' = \dfrac{y+1}{x}$.

18. $(8y+10x)dx + (5y+7x)dy = 0$.

19. $y' = \dfrac{2y - x - 5}{2x - y + 4}$. **20.** $y' = \dfrac{2x - y + 1}{x - 2y + 1}$.

21. $y' + \dfrac{y}{x+1} + y^2 = 0$.

13.2. Уравнения высших порядков

22. $y'' = x + \sin x$. **23.** $y'' = \ln x$.

24. $y''' = \dfrac{1}{x}$. **25.** $y''' = \cos 2x$.

Уравнения, допускающие понижение порядка

26. $xy'' = y'$. **27.** $y'' = y' + x$.

28. $(y'')^2 = y'$.

29. $y^4 - y^3 y'' = 1;\ y(0) = \sqrt{2};\ y'(0) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

30. $y'' = e^{2y};\ y(0) = 0;\ y'(0) = 1$.

Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

31. $y'' + y' - 2y = 0$. **32.** $y'' - 9y = 0$.

33. $y'' - 4y' = 0$. **34.** $y'' + y = 0$.

35. $y'' + 6y' + 13y = 0$. **36.** $y'' - 7y' + 6y = \sin x$.

37. $y'' - 6y' + 9y = 2x^2 - x + 3$. **38.** $y'' - 4y' + 4y = \operatorname{sh} 2x$.

39. $y'' - 2y' + 10y = 10x^2 + 18x + 6;\ y(0) = 1;\ y'(0) = 3{,}2$.

40. $y'' + 4y = \dfrac{1}{\sin^2 x}$. **41.** $y'' + y = -\operatorname{ctg}^2 x$.

§ 14. Кратные интегралы

Свойство 1. Двойной интеграл от суммы двух функций по области D равен сумме двойных интегралов по области D от каждой из функций в отдельности:

$$\iint_D [f(x,y) + \varphi(x,y)]\,ds = \iint_D f(x,y)\,ds + \iint_D \varphi(x,y)\,ds$$

Свойство 2. Постоянный множитель A можно вынести за знак двойного интеграла

$$\iint\limits_D Af(x,y)ds = A\iint\limits_D f(x,y)ds$$

Свойство 3. Если область интегрирования D разбить на две области D_1 и D_2 без общих внутренних точек, то

$$\iint\limits_D f(x,y)ds = \iint\limits_{D_1} f(x,y)ds + \iint\limits_{D_2} f(x,y)ds$$

Свойство 4. Если m есть наименьшее значение и M – наибольшее значение функции $f(x,y)$ в области D, то $m \cdot S \le \iint\limits_D f(x,y)ds \le M \cdot S$, где S – площадь области D .

Свойство 5 (теорема о среднем). Двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)ds$ равен произведению площади S области D на значение подынтегральной функции в некоторой точке области интегрирования

$$\iint\limits_D f(x,y)ds = f(x_{\text{ср}}, y_{\text{ср}}) \cdot S$$

(*)

Значение $f(x_{\text{ср}},y_{\text{ср}})$, определяемое равенством (*), называется средним значением функции $f(x, y)$ в области D.

В прямоугольной системе координат элемент площади ds можно записать в виде произведения $dx \cdot dy$. Тогда $\iint\limits_D f(x,y)ds = \iint\limits_D f(x,y)dxdy$.

В полярной системе координат элемент площади $ds = rdrd\varphi$ и

$\iint\limits_D f(x,y)ds = \iint\limits_D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdrd\varphi$ или $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdrd\varphi$

Как известно, объём V тела, ограниченного сверху поверхностью $z = f(x, y)$, снизу плоскостью $z = 0$ и цилиндрической поверхностью, направляющей для которой служит граница области D, а образующие параллельны оси Oz, равен двойному интегралу от функции $f(x, y)$ по области D, т.е. $V = \iint\limits_D f(x,y)dxdy$.

Пусть дана материальная пластинка, которая расположена в плоскости xOy и занимает площадь области D. Если на этой пластинке масса распределена с поверхностной плотностью $\delta = f(x, y)$, то масса этой пластинки вычисляется по формуле $M = \iint\limits_D f(x,y)dxdy$.

Пример 1. Вычислить интеграл $\int\limits_3^5 dx \int\limits_1^e \frac{2x-1}{y} dy$.

Решение. При вычислении внутреннего интеграла x считается постоянной, поэтому множитель $(2x – 1)$ можно вынести за знак внутреннего интеграла.

Имеем $\int\limits_3^5 dx \int\limits_1^e \frac{2x-1}{y} dy = \int\limits_3^5 (2x-1)dx \int\limits_1^e \frac{dy}{y} =$

$$= \int\limits_3^5 (2x-1)dx\left[\ln y\right]_1^e = \int\limits_3^5 (2x-1)dx[\ln e - \ln 1] = \int\limits_3^5 (2x-1)dx = \; = \left[x^2 - x\right]_3^5 = 25 - 5 - 9 + 3 = 14 .$$

Пример 2. Переходя к полярным координатам, вычислить двойной интеграл $I = \iint\limits_D \sqrt{1 - x^2 - y^2}\, dxdy$, где область D есть круг с центром в начале координат и с радиусом, равным единице.

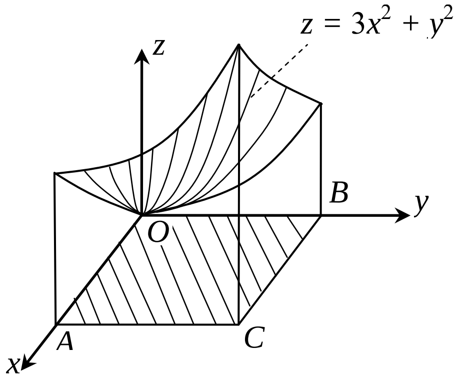
Решение. Так как $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $dxdy = rdrd\varphi$, то
$I = \iint\limits_D \sqrt{1 - r^2\cos^2\varphi - r^2\sin^2\varphi}\,rdrd\varphi = \iint\limits_D \sqrt{1-r^2}\,rdrd\varphi$. Для заданной области D угол φ меняется от 0 до 2π, а полярный радиус r при любом φ изменяется от 0 до 1. Следовательно,

$$\iint\limits_D \sqrt{1-r^2}\,rdrd\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \sqrt{1-r^2}\,rdr =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \int\limits_0^1 \left(1-r^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(-2rdr\right) = -\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \cdot \left[\frac{2}{3}\left(1-r^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{3}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi = \frac{2}{3}\pi .$$

Пример 3. Вычислить объём тела, ограниченного параболоидом $z = 3x^2 + y^2$, плоскостями $x = 1$ и $y = 2$ и координатными плоскостями.
Решение. Объём V вычисляется с помощью двойного интеграла по формуле
$V = \iint\limits_D f(x, y)dxdy$.



В данном случае область D – основание тела – есть прямоугольник $OACB$. По условию область D задана неравенствами $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 2$.
Следовательно,

$$V = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^2 \left(3x^2 + y^2\right)dy = \int\limits_0^1 dx \left[3x^2y + \frac{y^3}{3}\right]_0^2 = \; = \int\limits_0^1 \left(6x^2 + \frac{8}{3}\right)dx = \left[2x^3 + \frac{8}{3}x\right]_0^1 = \frac{14}{3} \text{ куб.ед.}$$

Пример 4. Определить массу круглой пластинки радиуса R, если поверхностная плотность $\delta = f(x, y)$ в каждой точке $P(x,y)$ обратно пропорциональна расстоянию от этой точки до центра круга.

Решение. По условию имеем $f(x, y) = \dfrac{k}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, где k – коэффициент пропорциональности. Тогда
$M = \iint\limits_D \dfrac{k}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$. Переходя к полярным координатам, получим
$M = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R \frac{k}{r} rdr = k\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \left[r\right]_0^R = kR\left[\varphi\right]_0^{2\pi} = 2k\pi R$.

Вычислить интегралы:

1. $\int\limits_0^a dx \int\limits_0^{\sqrt{x}} dy.$ **2.** $\int\limits_2^4 dx \int\limits_x^{2x} \frac{y}{x} dy.$ **3.** $\int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{\ln y} e^x dx.$

4. $\iint\limits_D xydxdy \ \ (0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2).$

5. $\iint\limits_D \frac{x^2}{1+y^2} dxdy \ \ (0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1).$

6. $\iint\limits_D \frac{ydxdy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}} \ \ (0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1).$

В задачах **7–11** найти пределы двукратного интеграла $\iint\limits_D f(x, y)dxdy$ при данных (конечных) областях интегрирования D.

7. Параллелограмм со сторонами $x = 3,\ x = 5,\ 3x - 2y + 4 = 0,\ 3x - 2y + 1 = 0.$

8. Треугольник со сторонами $x = 0,\ y = 0,\ x + y = 2.$

9. $x^2 + y^2 \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0.$ **10.** $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \le 1.$

11. $y^2 \le 8x,\ y \le 2x,\ y + 4x - 24 \le 0.$

В задачах **12–18** заменить порядок интегрирования.

12. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_y^{\sqrt{y}} f(x, y)dx.$ **13.** $\int\limits_0^r dx \int\limits_x^{\sqrt{2rx-x^2}} f(x, y)dy.$

14. $\int\limits_1^2 dx \int\limits_x^{2x} f(x, y)dy.$ **15.** $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{2x}^{6-x} f(x, y)dy.$

16. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x f(x, y)dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{2-x} f(x, y)dy.$

17. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} f(x, y)dy + \int\limits_1^3 dx \int\limits_0^{(3-x)/2} f(x, y)dy.$

18. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^{2/3}} f(x, y)dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{1-\sqrt{4x-x^2-3}} f(x, y)dy.$

Вычислить

19. $\iint\limits_D (x^2 + y)\, dxdy$, где D – область, ограниченная параболами $y = x^2$ и $x = y^2$.

20. $\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}dxdy,$ где D – область, ограниченная прямыми $x=2,$ $y=x$ и гиперболой $xy=1.$

Преобразовать двойной интеграл к полярным координатам.

21. $\int\limits_0^R dx \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x,y)dy.$ **22.** $\int\limits_{R/2}^{2R} dy \int\limits_0^{\sqrt{2Ry-y^2}} f(x,y)dx.$

23. $\int\limits_0^R dx \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x^2+y^2)dy.$

24. $\int\limits_0^{R/\sqrt{1+R^2}} dx \int\limits_0^{Rx} f\left(\frac{x}{y}\right)dy + \int\limits_{R/\sqrt{1+R^2}}^{R} dx \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f\left(\frac{x}{y}\right)dy.$

25. Вычислить в полярных координатах $\iint\limits_D \operatorname{arctg}\frac{x}{y}dxdy,$ где D – часть кольца $x^2+y^2\ge 1,$ $x^2+y^2\le 9,$ $y\ge\frac{x}{\sqrt{3}},$ $y\le x\sqrt{3}.$

Вычислить.

26. $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^2 dy\int\limits_0^3 dz.$ **27.** $\int\limits_0^a dx\int\limits_0^x dy\int\limits_0^y xyz\,dz.$

28. $\iiint\limits_\Omega \frac{dxdydz}{(x+y+z+1)^3},$ где Ω – область, ограниченная плоскостями $x=0,$ $y=0,$ $z=0,$ $x+y+z+1=0.$

29. Перейти в тройном интеграле $\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)dxdydz$ к цилиндрическим координатам $\rho,$ $\varphi,$ z $(x=\rho\cos\varphi,$ $y=\rho\sin\varphi,$ $z=z),$ где Ω – область, находящаяся в первом октанте и ограниченная цилиндром $x^2+y^2=R^2$ и плоскостями $z=0,$ $z=1,$ $y=x$ и $y=x\sqrt{3}.$

Найти объёмы тел, ограниченных данными поверхностями.

30. Плоскостями координат, плоскостями $x=4,$ $y=4$ и параболоидом вращения $z=x^2+y^2+1.$

31. Параболоидом $z=x^2+y^2,$ цилиндром $y=x^2$ и плоскостями $y=1,$ $z=0.$

32. Найти массу квадратной пластинки со стороной $2a$, если плотность материала пластинки пропорциональна квадрату расстояния от точки пересечения диагоналей и на углах квадрата равна единице.

§ 15. Криволинейные и поверхностные интегралы

Основные свойства криволинейного интаграла по длине дуги (I рода)

1. $\int\limits_{AB} f(x,y)dl = \int\limits_{BA} f(x,y)dl,$ т.е. криволинейный интеграл I рода не зависит от направления пути интегрирования.

2. $\int\limits_{L} c\cdot f(x,y)dl = c\cdot\int\limits_{L} f(x,y)dl,\ \ c=\text{const}.$

3. $\int\limits_{L}\left(f_1(x,y)\pm f_2(x,y)\right)dl = \int\limits_{L} f_1(x,y)dl \pm \int\limits_{L} f_2(x,y)dl.$

4. $\int\limits_{L} f(x,y)dl = \int\limits_{L_1} f(x,y)dl + \int\limits_{L} f(x,y)dl,$ если путь интегрирования L разбит на две части L_1 и L_2 такие, что $L = L_1\cup L_2$ и L_1 и L_2 имеют единственную общую точку.

Вычисление криволинейного интеграла I рода

Если кривая AB задана параметрическими уравнениями $x=x(t),\ \ y=y(t),\ \ t\in[\alpha;\beta],$ где $x(t)$ и $y(t)$ – непрерывно дифференцируемые функции параметра t, причём точке A соответствует $t=\alpha,$ точке B – значение $t=\beta,$

то $\int\limits_{AB} f(x,y)dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(t),y(t))\cdot\sqrt{\left(x_t'\right)^2+\left(y_t'\right)^2}\,dt.$

Если кривая AB задана уравнением $y=\varphi(x),\ \ x\in[a;b],$ где $\varphi(x)$ – непрерывно дифференцируемая функция, то $\int\limits_{AB} f(x,y)dl = \int\limits_{a}^{b} f(x,\varphi(x))\cdot\sqrt{1+\left(y_x'\right)^2}\,dx.$

Если плоская кривая L задана уравнением $r=r(\varphi),\ \ \alpha\le\varphi\le\beta$ в полярных координатах, то $dl=\sqrt{r^2+\left(r_\varphi'\right)^2}\,d\varphi$ и $\int\limits_{L} f(x,y)dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cdot\sqrt{r^2+\left(r_\varphi'\right)^2}\,d\varphi.$

Пример 1. Вычислить $\int\limits_{AB} xy^2dl,$ где L – отрезок прямой между точками $A(0;0)$ и $B(4;3).$

Решение. Уравнение прямой AB есть $y=\dfrac{3}{4}x,\ \ 0\le x\le 4.$ Имеем

$$\int\limits_{L} xy^2dl = \int\limits_{0}^{4} x\cdot\left(\frac{3}{4}x\right)^2\cdot\sqrt{1+\left(\frac{3}{4}\right)^2}\,dx = \frac{45}{64}\int\limits_{0}^{4} x^3dx = \frac{45}{64}\cdot\frac{x^4}{4}\Bigg|_0^4 = 45.$$

Некоторые свойства криволинейного инетграла по координатам (II рода)

1. При изменении направления пути интегрирования криволинейный интеграл II рода изменяет свой знак на противоположный, т.е. $\int\limits_{AB} = -\int\limits_{BA}.$

2. Если кривая AB точкой C разбита на две части AC и CB, то интеграл по всей кривой равен сумме интегралов по её частям, т.е. $\int\limits_{AB} = \int\limits_{AC} + \int\limits_{CB}.$

3. Криволинейный интеграл от замкнутой кривой (обозначается $\oint$) не зависит от выбора начальной точки (зависит только от направления обхода кривой).

Вычисление криволинейного интеграла II рода

Если кривая AB задана параметрическими уравнениями $x = x(t),\ \ y = y(t),$ где $x(t)$ и $y(t)$ – непрерывны вместе со своими производными $x'(t)$ и $y'(t)$ на отрезке $[\alpha;\beta],$ причём начальной точке A кривой соответствует значение параметра $t=\alpha,$ а конечной точке B – значение $t=\beta,$ а функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывны на кривой AB, тогда:

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta}\left[P(x(t),y(t))\cdot x'(t) + Q(x(t),y(t))\cdot y'(t)\right]dt$$

Если кривая AB задана уравнением $y=\varphi(x),\ \ x\in[a;b],$ где функция $\varphi(x)$ и её производная $\varphi'(x)$ непрерывны на отрезке $[a;b]$, то

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta}\left[P(x,\varphi(x)) + Q(x,\varphi(x))\cdot\varphi'(x)\right]dx$$

Формула Грина

Если функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывны вместе со своими частными производными $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ в области D, то имеет место формула $\iint\limits_D \left(\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \oint\limits_L Pdx + Qdy,$ где L – граница области D и интегрирование вдоль кривой L производится в положительном направлении.

Пример 2. Вычислить $I = \int\limits_L (x-y)^2dx + (x+y)^2dy,$ L – ломаная OAB, где $O(0;0),$ $A(2;0),$ $B(4;2).$

Решение. Так как $L = OAB = OA + AB,$ то $I = \int\limits_L = \int\limits_{OA} + \int\limits_{AB}.$

Уравнение отрезка OA есть $y=0,\ \ 0\le x\le 2;$ уравнение отрезка AB: $y = x-2,\ \ 2\le x\le 4.$ Имеем

$$I = \int\limits_0^2\left[(x-0)^2+0\right]dx + \int\limits_2^4\left[2^2+(2x-2)^2\cdot 1\right]dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^2 + \left.\left(4x + \frac{1}{2}\cdot\frac{(2x-2)^3}{3}\right)\right|_2^4 = \frac{136}{3}.$$

Пример. Применяя формулу Грина, вычислить $\oint\limits_C -x^2ydx + xy^2dy,$ где C – окружность $x^2+y^2=R^2$, пробегаемая против хода часовой стрелки.

Решение. Здесь $P(x,y) = -x^2y,\ \ Q(x,y) = xy^2.$ Тогда $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = x^2+y^2.$ Следовательно, $I = \oint\limits_C -x^2ydx + xy^2dy = \iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy.$ Введём полярные координаты: $x=\rho\cos\varphi,$ $y = \rho\sin\varphi,\ \ 0\le\varphi\le 2\pi;$ значит $I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^R \rho^3 d\varphi d\rho = \dfrac{1}{4}R^4\cdot\int\limits_0^{2\pi} d\varphi = \dfrac{\pi R^4}{2}.$

Вычисление поверхностных интегралов

Пусть $F(x,y,z)$ – непрерывная функция и $z = f(x,y)$ – гладкая поверхность *S*, где $f(x,y)$ задана в некоторой области *D* плоскости *xOy*. Если проекция *D* поверхности *S* на плоскость *xOy* однозначна, то соответствующий поверхностный интеграл первого рода вычисляется по формуле: $\iint\limits_S F(x,y,z)dS = \iint\limits_D F[x,y,f(x,y)]\cdot\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy.$

Если $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ – непрерывные функции и S^+ – сторона гладкой поверхности *S*, характеризуемая направлением нормали $\overline{n} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$, то соответствующий интеграл второго рода выражается так:

$$\iint\limits_{S^+} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint\limits_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS$$

При переходе на другую сторону S^- поверхности этот интеграл меняет знак на противоположный.

Если поверхность *S* задана уравнением в неявном виде $G(x,y,z)=0,$ то направляющие косинусы нормали этой поверхности определяются по формулам:

$$\cos\alpha = \frac{\frac{\partial G}{\partial x}}{\pm\sqrt{\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial G}{\partial z}\right)^2}},\quad \cos\beta = \frac{\frac{\partial G}{\partial y}}{\pm\sqrt{\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial G}{\partial z}\right)^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{\frac{\partial G}{\partial z}}{\pm\sqrt{\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial G}{\partial z}\right)^2}},$$

где знак перед радикалом должен быть согласован со стороной поверхности.

Также для вычисления поверхностного интеграла II можно использовать формулу:

$$\iint\limits_{S^+} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \pm\iint\limits_{D_{yz}} (P(x(y,z),y,z)dydz \pm$$

$$\pm\iint\limits_{D_{yz}} (Q(x,y(x,z),z)dxdz \pm \iint\limits_{D_{xz}} (R(x,y,z(x,y)dxdy$$

Здесь D_{yz}, D_{xz}, D_{xy} – проекции поверхности *S* на координатные плоскости, а $x = x(y,z)$, $y = y(x,z)$ и $z = z(x,y)$ – уравнения, в разной форме задающие поверхность *S*.

Формулы Стокса и Остроградского-Гаусса

Если функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка на поверхности *S* и *C* – замкнутый контур, ограничивающий поверхность *S*, то справедлива **формула Стокса**

$$\oint\limits_C Pdx+Qdy+Rdz=\iint\limits_{S^+}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dxdz+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy,$$

где направление нормали определяется так, чтобы со стороны нормали обход контура C казался происходящим против хода часовой стрелки.

Если функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка в замкнутой области T пространства, ограниченной замкнутой гладкой поверхностью S, то справедлива **формула Остроградского-Гаусса**

$$\oiint\limits_{S^+} Pdydz+Qdxdz+Rdxdy=\iiint\limits_T\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz$$

Вычислить интегралы.

1. $\int\limits_L \frac{ds}{x-y}$, где L – отрезок прямой $y=\frac{x}{2}-2$, заключённый между точками $A(0,-2)$ и $B(4,0)$.

2. $\int\limits_L xy\,ds$, где L – контур прямоугольника с вершинами $A(0,0)$, $B(4,0)$, $C(4,2)$ и $D(0,2)$.

3. $\int\limits_L xy\,ds$, где L – четверть эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, лежащая в первом квадранте.

4. $\int\limits_L (2z-\sqrt{x^2+y^2})\,ds$, где L – первый виток конической винтовой линии $x=t\cos t$, $y=t\sin t$, $z=t$.

5. $\int\limits_L (x^2-y^2)\,dx$, где L – дуга параболы $y=x^2$ от точки $(0,0)$ до точки $B(2,4)$.

6. $\int\limits_{(0,0)}^{(1,1)} xy\,dx+(y-x)\,dy$ вдоль линии: 1) $y=x$, 2) $y=x^2$, 3) $y^2=x$, 4) $y=x^3$.

7. $\int\limits_L y\,dx+x\,dy$, где L – четверть окружности $x=R\cos t$, $y=R\sin t$ от $t_1=0$ до $t_2=\frac{\pi}{2}$.

8. $\int\limits_L x\,dx+y\,dy+(x+y-1)\,dz$, где L – отрезок прямой от точки $(1,1,1)$ до точки $(2,3,4)$.

9. $\int\limits_L (1-x^2)y\,dx+x(1+y^2)\,dy$, где L – окружность $x^2+y^2=R^2$ (воспользоваться формулой Грина).

10. $\iint\limits_S (z+2x+\frac{4}{3}y)dS$, где S – часть плоскости $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$, лежащая в первом октанте.

11. $\iint\limits_S x\,dydz+y\,dxdz+z\,dxdy$, где S – положительная сторона куба, составленного плоскостями $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x=1,\ y=1,\ z=1$.

12. $\iint\limits_S xz\,dxdy+xy\,dydz+yz\,dxdz$, где S – внешняя сторона пирамиды, составленной плоскостями $x=0,\ y=0,\ z=0$ и $x+y+z=1$.

13. $\int\limits_L x^2y^3dx+dy+z\,dz$, где контур L – окружность $x^2+y^2=R^2,\ z=0$. (Используйте формулу Стокса, взяв в качестве поверхности полусферу $z=+\sqrt{R^2-x^2-y^2}$. Интегрирование по окружности в плоскости xOy ведётся в положительном направлении.)

14. Поверхностный интеграл по замкнутой поверхности преобразовать с помощью формулы Остроградского: $\iint\limits_S x^2\,dydz+y^2\,dxdz+z^2\,dxdy$.

Ответы:

§ 1. Определители

1. 26. **2.** –38. **3.** $2a$. **4.** 1. **5.** –10. **6.** $4a$. **7.** $-4a^3$. **8.** 144. **9.** 1) $x_1 = 2,\ x_2 = 3$; 2) $x_1 = 0,\ x_2 = -2$.

§ 2. Системы линейных уравнений

1. 5; 6; 10. **2.** 2; –1; –3. **3.** Несовместна. **4.** Неопределенна: $x = \frac{2+5z}{3},\ y = \frac{5-7z}{3}$. **5.** –1; 0; 2; 1. **6.** Несовместна. **7.** 1; –2; 4; 0; –5. **8.** 1; 2; 0; 4; 0; 7.

§ 3. Векторная алгебра

3. $\left|\overline{OM}\right| = r = 5\sqrt{2}$; $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\beta = -\frac{3\sqrt{2}}{10}$, $\cos\gamma = \frac{2\sqrt{2}}{5}$. **4.** $\overline{u} = 2\overline{i} - 6\overline{j} + 3\overline{k}$, $|\overline{u}| = 7$. **5.** $\overline{OC} = \overline{i} - 2\overline{j} + \overline{k}$, $\left|\overline{OC}\right| = \sqrt{6}$; $\overline{AB} = -\overline{i} - 4\overline{j} + \overline{k}$, $\left|\overline{AB}\right| = 3\sqrt{2}$. **6.** $D(4; 0; 6)$. **7.** 135°.

8. $\angle B = \angle C = 45^\circ$. **9.** 90°. **10.** 2. **11.** 1) $2+\sqrt{3}$; 2) 40. **12.** $\sqrt{7}$, $\sqrt{13}$. **13.** $\cos(\overline{a} \hat{,} \overline{m}) = \frac{5}{2\sqrt{7}}$; $\cos(\overline{a} \hat{,} \overline{n}) = -\frac{2}{\sqrt{7}}$. **14.** 8 Дж, $\cos\theta = \frac{4\sqrt{2}}{15}$. **15.** $\overline{a}\times\overline{b}$ равно: 1) $-6\overline{j}$; 2) $-2\overline{k}$; 3) $6\overline{i} - 4\overline{j} + 6\overline{k}$. Площадь равна: 1) 6; 2) 2; 3) $2\sqrt{22}$. **16.** 24,5. **17.** $\sqrt{21}$, $h = \sqrt{4,2}$. **18.** 1) $2(\overline{k} - \overline{i})$; 2) $2\overline{a}\times\overline{c}$; 3) $\overline{a}\times\overline{c}$; 4) 3. **19.** $50\sqrt{2}$. **20.** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. **21.** $V = 51$, левая. **22.** $V = 14$, $S_{ABC} = 6\sqrt{3}$, $H = \frac{7\sqrt{3}}{3}$. **24.** $\overline{c} = 5\overline{a} + \overline{b}$.

§ 4. Кривые второго порядка

1. $a = 4,\ b = 2,\ c = 2\sqrt{3},\ \varepsilon = \frac{\sqrt{3}}{2}$. **2.** 1) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$; 2) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1$. **3.** $b = 1,4; 3; 4; 4,8; 5$; $\varepsilon = 0,96; 0,8; 0,6; 0,28; 0$. **4.** $a = 150$ млн.км, $\varepsilon = \frac{1}{60}$. **5.** $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$. **6.** $\varepsilon = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $53^\circ 08'$. **7.** 1) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$; 2) $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{4} = 1$. **8.** $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{48} = 1$. **9.** $y = 3 - \frac{x^2}{4}$. **10.** $y^2 = 8(x+2)$. **12.** 40 см.

§ 5. Аналитическая геометрия в пространстве

2. $x - 2y - 3z = 4$. **3.** $2x + 3y + 4z = 3$. **4.** $2x - 2y + z = 2$. **5.** $2x - y + z = 5$. **6.** $3y + 2z = 0$. **7.** $x - 2y - 3z + 14 = 0$. **8.** 3. **9.** $2\sqrt{2}$. **10.** $\begin{cases} x = -z + 3, \\ y = -z + 5; \end{cases}$ $\frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{1} = \frac{z}{-1}$. **11.** $\frac{x-4}{-1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{1}$.

12. $x = 2,\ z = 3$. **13.** 1) $\begin{cases} x = -2 + t, \\ y = 1 - 2t, \\ z = -1 + 3t; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 1 - t, \\ z = 2 + t. \end{cases}$ **14.** Направляющий вектор $\overline{p} = \overline{n}_1 \times \overline{n}_2 = \overline{i} + 3\overline{j} + 5\overline{k}$. Уравнения прямой: $\frac{x+4}{1} = \frac{y-3}{3} = \frac{z}{5}$. **15.** $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{6}}$. **16.** $x - 2y + z + 5 = 0$. **17.** $8x - 5y + z - 11 = 0$. **18.** $x + 2y - 2z = 1$. **19.** $(6; 4; 5)$.

§ 6. Пределы

1. 0. **2.** ∞. **3.** $-\frac{3}{2}$. **4.** $\frac{5}{2}$. **5.** 1. **6.** $\frac{3}{2}$. **7.** $\frac{1}{4}$. **8.** –1. **9.** $-\frac{1}{56}$. **12.** 4. **13.** $\frac{1}{3}$. **14.** 1. **15.** $\frac{1}{4}$. **16.** 2. **17.** $6\sqrt{2}$. **18.** $-\frac{1}{2}$. **19.** $\frac{1}{2}$. **20.** $\frac{1}{3}$. **21.** 8. **22.** $-\frac{1}{2}$. **23.** $\frac{3}{2}$. **24.** $\frac{1}{2}$. **25.** 1. **26.** $\frac{1}{2}$. **27.** –3. **28.** –2. **29.**

$-\frac{1}{4}$. **30.** $\frac{1}{2}$. **31.** $-\frac{1}{2}$. **32.** –1. **33.** $\frac{1}{20}$. **34.** $-\frac{1}{5}$. **35.** 3. **36.** $\frac{3}{2}$. **37.** $-\frac{1}{2}$. **38.** –2. **39.** $-\frac{1}{10}$. **40.** $-\frac{5}{2}$. **41.** $\frac{3}{2}$. **42.** e^4. **43.** e^2. **44.** 3. **45.** e^6. **46.** e^{-2}. **47.** –3. **48.** –2.

§ 7. Непрерывность функции

1. Разрывы при $x=\pm 2$. **2.** $y=\frac{x^2}{2}$ при $x>1$ и $y=-\frac{x^2}{2}$ при $x<1$; при $x=1$ – разрыв I рода, причём $\lim\limits_{x\to 1-0} y=-\frac{1}{2}$, а $\lim\limits_{x\to 1+0} y=\frac{1}{2}$. **4**. Точки разрыва: 1) $x=0$; 2) $x=2$; 3) $x=0$.

§ 8. Производная

1. $(x-2)^2$. **2.** $(x^2-1)^2$. **3.** $1+\frac{1}{\sqrt{x}}$. **4.** $-\frac{30}{x^4}$. **5.** $-\frac{x^2+2x+3}{x^4}$. **6.** $\left(1-\frac{1}{x^3}\right)^2$. **7.** $3\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$. **8.** $\frac{2}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$. **9.** $\frac{1-x}{x^2}$. **10.** $\frac{2}{x}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}-\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)$. **11.** $2\sin^2\frac{x}{2}$. **12.** $-\operatorname{tg}^2 x$. **13.** $x(2\cos x-x\sin x)$. **14.** $\frac{x(\sin 2x-x)}{\sin^2 x}$. **15.** $-\frac{x\sin x+2\cos x}{x^2}$. **16.** $\frac{2x}{(x^2+1)^2}$. **17.** $\frac{1}{(1-4x)^2}$. **18.** $\frac{4x-\sin 2x}{4x\sqrt{x}\cos^2 x}$. **19.** $\frac{1}{1-\sin x}$. **20.** $\frac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2}$. **21.** gt. **22.** $2a\sin^2\frac{t}{2}$. **23.** 1; 0; 4. **24.** 8,25. **25.** –1; $-\frac{1}{9}$; $-\frac{1}{25}$. **26.** $6\cos 6x$. **27.** $\frac{1}{2}\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)$. **28.** $\frac{2\sin^2 x}{\sqrt{2x-\sin 2x}}$. **29.** $\sin 2x$. **30.** $\frac{3}{\sqrt{2}}\sin 2x\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$. **31.** $3\operatorname{tg}^4 x$. **32.** $\frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$. **33.** $\frac{20\sin 4x}{(1+\cos 4x)^6}$. **34.** $\sin x\left(1+\frac{1}{\cos^2 x}\right)$. **35.** $\frac{2x^2-1}{\sqrt{x^2-1}}$. **36.** $\frac{1-x}{x^2\sqrt{2x-1}}$. **37.** $\frac{4\cos 2x}{(1-\sin 2x)^2}$. **38.** $\ln x+1$. **39.** $-\frac{\ln x}{x^2}$. **40.** $\frac{1}{x\ln 10}$. **41.** $\frac{(x+1)^2}{x^3}$. **42.** $\frac{2(x+1)}{x(x+2)}$. **43.** $-\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. **44.** $\operatorname{ctg} x\cos^2 x$. **45.** $2x+3^x\ln 3$. **46.** $(2x+x^2\ln 2)2^x$. **47.** $x(2+x)e^x$. **48.** $-\operatorname{tg} x\sin^2 x$. **49.** $\operatorname{ctg} 2x$. **50.** $\frac{2e^{2x}}{\sqrt{e^{4x}+1}}$. **51.** $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$. **52.** $\frac{x^2}{1+x^2}$. **53.** $-\frac{1}{\sqrt{x-4x^2}}$. **54.** $\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$. **55.** $2\sqrt{1-x^2}$. **56.** $\frac{3e^{3x}}{\sqrt{1-e^{6x}}}$. **57.** $\frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$. **58.** $\frac{1}{2x\sqrt{6x-1}}$. **59.** $\frac{2x}{|x|\sqrt{2-x^2}}$. **60.** $\frac{1}{x^2+x^4}$. **61.** $2e^x\sqrt{1-e^{2x}}$. **62.** $\arccos x$. **63.** $\sqrt{\frac{4}{t}-1}$. **64.** $\sqrt{\frac{2}{x}-4}$. **65.** $\operatorname{sh} 2x$. **66.** $\operatorname{th}^2 x$. **67.** $\sqrt{\operatorname{ch} x+1}$. **70.** $y=x+\frac{2}{3}$. **71.** $y=-\frac{x}{2}+2$. **72.** $\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$. **73.** $(-2;-4)$. **74.** $\left(\frac{1}{2};\frac{17}{4}\right)$. **75.** 1) $2\cos 2x$; 2) $\frac{2\sin x}{\cos^3 x}$; 3) $\frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}$. **76.** 1) $-4\sin 2x$; 2) $-\frac{24}{x^5}$; 3) $-x\cos x-3\sin x$; 4) $-\frac{1}{x^2}$; 5) $e^{-t}(3-t)$; 6) $\frac{2a(3x^2-a^2)}{(x^2+a^2)^3}$.

77. 1) $e^x(x^3+9x^2+18x+6)$; 2) $\frac{1}{a^3}\left(6a^2\cos\frac{x}{a}-6ax\sin\frac{x}{a}-x^2\cos\frac{x}{a}\right)$. **79.** $-\frac{x}{y}$. **80.** $\frac{p}{y}$. **81.** $\frac{b^2x}{a^2y}$. **82.** $\frac{e^x\sin y+e^{-y}\sin x}{e^x\cos y+e^{-y}\cos x}$. **83.** $\frac{1}{y^2}+1$. **84.** $\frac{2x-ye^{xy}}{xe^{xy}+3y^2}$. **85.** $x+y=\pm\frac{a}{\sqrt{2}}$. **86.** $2y=-x-3$ и

$2y = x+1$. **87.** $dy = 3(x-1)^2dx$. **88.** $dy = \dfrac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$. **89.** $ds = gtdt$. **90.** $\sin 2tdt$. **91.** $\sin udu$.

92. 1) 0,04; 2) 0,05. **93.** 1) $dV = 3x^2dx = 0,75$; или 0,06%; 2) $df = \dfrac{3bds}{8f}$. **94.** $-\dfrac{b}{a}\operatorname{ctg} t$. **95.** $-\operatorname{tg} t$. **96.** $\operatorname{cth} t$. **97.** $-2\cos^3 t\sin t$. **98.** $y = x+\dfrac{(4-\pi)a}{2}$. **99.** $-\dfrac{1}{a\sin^3 t}$. **100.** $\dfrac{t^2+1}{4t^3}$. **101.** $-\dfrac{1}{4a\sin^4\dfrac{t}{2}}$. **102.** $-\dfrac{1}{4\sin^3 t}$. **103.** $\dfrac{3t^2-1}{4t^3}$. **104.** $\dfrac{3}{4e^t}$.

§ 9. Приложения производной

1. $x = at-\dfrac{gt^2}{2}$; $\dfrac{dx}{dt} = a-gt$; $\dfrac{d^2x}{dt^2} = -g$; через $t = \dfrac{a}{g}$, $x = \dfrac{a^2}{2g}$ (высшая точка). **2.** $\dfrac{dx}{dt} = t^2-4t+3$; $t_1 = 1$, $t_2 = 3$. **4.** $x = 10+20t-\dfrac{gt^2}{2}$; $\dfrac{dx}{dt} = 20-gt$; $\dfrac{d^2x}{dt^2} = -g$. В наивысшей точке $\dfrac{dx}{dt} = 0$; $t = \dfrac{20}{g} \approx 2,04$ с. **5.** $\dfrac{dx}{dt} = k(A-x)$. **6.** 3. **7.** $\dfrac{1}{2}$. **8.** $\dfrac{1}{na^{n-1}}$. **9.** 1. **10.** $\dfrac{a^2}{b^2}$. **11.** ∞. **12.** 0. **13.** 2. **14.** 0. **15.** 0. **16.** 1. **17.** 1. **18.** e^3. **19.** $\dfrac{1}{6}$. **20.** При $x = 0$ $y_{\min} = 0$, при $x = -2$ $y_{\max} = \dfrac{4}{3}$.
21. При $x = -1$ $y_{\min} = -4$, при $x = -3$ $y_{\max} = 0$. **22.** При $x = 0$ $y_{\max} = 0$, при $x = 4$ $y_{\min} = 8$.
23. 30ì × 60ì . **24.** $\dfrac{a}{6}$. **25.** 4ì × 4ì × 2ì . **26.** $v_{\max} = \dfrac{128\pi}{9}$ äì^3 при высоте $x = 2$ äì .

§ 10. Неопределенный интеграл

1. $\dfrac{x^3}{3}+x^2+\ln|x|+C$. **2.** $2x^5-\dfrac{1}{x^3}+C$. **3.** $\dfrac{1-x}{x^2}+C$. **4.** $\dfrac{x^2}{2}+2\ln|x|-\dfrac{1}{2x^2}+C$.

5. $x\left(\dfrac{2}{3}\sqrt{x}+\dfrac{3}{4}\sqrt[3]{x}\right)+C$. **6.** $2\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}+C$. **7.** $e^x+\dfrac{1}{x}+C$. **8.** $\dfrac{a^x}{\ln a}-\dfrac{2}{\sqrt{x}}+C$. **9.** $-\operatorname{ctg} x-\operatorname{tg} x+C$.

10. $-\operatorname{ctg} x-x+C$. **11.** $\operatorname{tg} x-\operatorname{ctg} x+C$. **12.** $3\operatorname{tg} x+2\operatorname{ctg} x+C$. **13.** $\dfrac{x}{2}-\dfrac{\sin x}{2}+C$. **14.** $2\operatorname{arctg} x-3\arcsin x+C$. **15.** $\dfrac{1}{10}\ln\left|\dfrac{x-5}{x+5}\right|+C$. **16.** $\dfrac{1}{3}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{3}+C$. **17.** $\arcsin\dfrac{x}{2}+\ +C$.

18. $\ln\left|x+\sqrt{x^2+5}\right|+C$. **19.** $\ln\left|x+\sqrt{x^2-4}\right|+C$. **20.** $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{3}}\ +C$.

21. $\sqrt{3}\left(\operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{3}}+\ln\left|\dfrac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right|\right)+C$. **22.** $\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{2}}+\ln\left|x+\sqrt{2+x^2}\right|+C$. **23.** $\dfrac{1}{3}\sin 3x+C$.

24. $-2\cos\dfrac{x}{2}+C$. **25.** $-\dfrac{1}{3}e^{-3x}+C$. **26.** $\dfrac{1}{5}\operatorname{tg} 5x+C$. **27.** $2(e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}})+C$. **28.** $\dfrac{1}{6}(4x-1)^{3/2}+C$.

29. $-\sqrt{3-2x}+C$. **30.** $-\dfrac{1}{10}\ln|1-10x|+C$. **31.** $\dfrac{1}{6}\ln\left|1-3e^{2x}\right|+C$. **32.** $\ln|\sin x|+C$.

33. $-\ln|\cos x|+C$. **34.** $\ln|1+\ln x|+C$. **35.** $\dfrac{\sin^3 x}{3}+C$. **36.** $-e^{\cos x}+C$. **37.** $-\dfrac{1}{2}e^{-x^2}+C$.

38. $2e^{\sqrt{x}}+C$. **39.** $\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{(1+x^3)^2}+C$. **40.** $-\sqrt{1-x^2}+C$. **41.** $-\sqrt{1+2\cos x}+C$. **42.** $\operatorname{arctg}(x+2)+C$.

43. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-3}{2}+C$. **44.** $\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+3}\right|+C$. **45.** $\frac{x^3}{3}+x^2+4x+8\ln|x-2|+C$.

46. $\ln\left|\frac{C(x-2)^2}{x-3}\right|$. **47.** $\ln\left|\frac{C(x-1)^3}{x+2}\right|$. **48.** $\frac{5}{2}\ln\left|x^2+2x-10\right|-\ -\operatorname{arctg}\frac{x+1}{3}+C$.

49. $-\frac{x+9}{8(x^2+2x+5)}-\frac{1}{16}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}+C$. **50.** $x\ln|x|-x+C$.

51. $\frac{x^2}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}+x+\ln|x-1|\right)+C$. **52.** $\frac{1}{2}e^{2x}\left(x-\frac{1}{2}\right)+C$. **53.** $-x\operatorname{ctg}x+\ln|\sin x|+C$.

54. $\frac{2}{5}\sqrt{x^3}\left(\ln|x|-\frac{2}{3}\right)+C$. **55.** $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$. **56.** $x\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$.

57. $x\operatorname{arctg}\sqrt{2x-1}-\frac{\sqrt{2x-1}}{2}+C$. **58.** $x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x+C$. **59.** $\frac{e^x}{2}(\sin x-\cos x)+C$.

61. $3x+4\sin x+\sin 2x+C$. **62.** $\frac{3x}{8}+\frac{\sin 2x}{4}+\frac{\sin 4x}{32}+C$. **63.** $\frac{x}{8}-\frac{\sin 4x}{32}+C$.

64. $-\cos x+\frac{2}{3}\cos^3 x-\frac{\cos^5 x}{5}+C$. **65.** $\frac{\sin^3 x}{3}-\frac{\sin^5 x}{5}+C$. **66.** $\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C$. **67.** $\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C$.

68. $\frac{x+2}{5}\sqrt[3]{(3x+1)^2}+C$. **69.** $\frac{2x+1}{12}(2\sqrt{2x+1}-3)+C$. **70.** $2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-\ln(1+\sqrt[6]{x})+C$.

§ 11. Определенный интеграл

1. 20. **2.** $\frac{21}{8}$. **3.** $\frac{14}{3}$. **4.** $\frac{\pi}{6}$. **5.** $\frac{\pi}{12a}$. **6.** $3(e-1)$. **7.** $\ln(1+\sqrt{2})$. **8.** $\frac{1}{2}$. **9.** $2(1+\ln 2)$. **10.** $\frac{2-\sqrt{3}}{2}$. **11.** $2-\ln 2$. **12.** $\frac{1}{3}$. **13.** $\frac{\pi}{2}-1$. **14.** $\frac{2}{\pi}$. **15.** $\frac{3\ln 2}{\pi}$. **16.** $\frac{1}{e-1}$. **17.** $\frac{a^2+ab+b^2}{3}$. **18.** $\frac{\pi}{4}$. **19.** $8\ln 2$. **20.** 1. **21.** $\frac{8}{3}$. **22.** $\frac{125}{6}$. **23.** $3\pi a^2$. **24.** $\frac{3\pi a^2}{8}$. **25.** $\frac{3\pi a^2}{2}$. **26.** Смежные экстремальные радиус-векторы при 45° и 135°. $S=\frac{19\pi}{8}$. **27.** 12π. **28.** $\frac{64\pi}{3}$. **29.** $19{,}2\pi$. **30.** $5\pi^2a^3$. **31.** $8a$. **32.** $1{,}35+\ln 2\approx 2{,}043$. **33.** Точки пересечения с осями при $x_1=0$ и $x_2=\frac{\pi}{3}$. $l=\ln(2+\sqrt{3})\approx 1{,}31$. **34.** 1. **35.** Расходится. **36.** Расходится. **37.** $\frac{1}{n-1}$ при $n>1$; расходится при $n\le 1$. **38.** 1. **39.** $\frac{1}{2}$. **40.** $\frac{\pi}{4}$. **41.** $6\sqrt[3]{2}$. **42.** Расходится. **43.** 6.

§ 12. Функции нескольких переменных

2. Вся плоскость, кроме прямой $y=-x$. **3.** Точки внутри эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ и на эллипсе. **4.** Вся плоскость. **5.** Точки внутри угла $|y|\le|x|$ и на его сторонах. **6.** Квадрант плоскости $x\ge 0$ и $y\ge 0$. **9.** $3x(x+2y)$, $3(x^2-y^2)$. **11.** $-\frac{y}{x^2}$, $\frac{1}{x}$. **12.** $\frac{-y}{x^2+y^2}$, $\frac{x}{x^2+y^2}$.

13. $\frac{-y^2}{(x-y)^2}$, $\frac{x^2}{(x-y)^2}$. **14.** $\frac{\partial u}{\partial x}=e^{-xy}(1-xy)$, $\frac{\partial u}{\partial x}=-x^2e^{-xy}$.

15. $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{5t}{(x+2t)^2}$, $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{-5x}{(x+2t)^2}$. **22.** 1) 0,075; 2) $-0{,}1e^2\approx-0{,}739$. **24.** $1{,}2\pi$ дм^2. **25.** 0,13 см. **26.** $\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{2x}{y}\left(1-\frac{x}{y}\right)$, $\frac{\partial z}{\partial v}=-\frac{x}{y}\left(4+\frac{x}{y}\right)$. **27.** 1) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=m\frac{\partial z}{\partial u}+p\frac{\partial z}{\partial v}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=n\frac{\partial z}{\partial u}+q\frac{\partial z}{\partial v}$; 2) $\frac{\partial z}{\partial x}=y\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{y}{x^2}\frac{\partial z}{\partial v}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=x\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial v}$. **28.** 6; 2; 0; 6. **33.** 1) $\frac{2}{x^4}(3y^2dx^2-4xy\,dx\,dy+x^2dy^2)$; 2) $-\frac{y(dx-x\,dy)^2}{xy^2}$.
35. $2x+4y-z=3$. **36.** $xy_0+yx_0=2zz_0$.
37. $xy_0z_0+yx_0z_0+zx_0y_0=3a^3$. **38.** $x+y-z=\pm9$. **40.** 1) $z_{\min}=-1$ при $x=-4$, $y=1$; 2) $z_{\min}=0$ при $x=1$, $y=-1/2$.
41. $x=y=\sqrt[3]{2V}$, $z=\frac{\sqrt[3]{2V}}{2}$. **42.** $R=1$, $H=2$. **43.** $z_{\text{наиб}}=4$ в точках $(2,0)$ и $(-2,0)$, $z_{\text{наим}}=-4$ в точках $(0,2)$ и $(0,-2)$.
44. $z_{\text{наиб}}=17$ в точке $(1,2)$, $z_{\text{наим}}=-3$ в точке $(1,0)$. **45.** $z_{\text{наиб}}=4$ в точке $(2,1)$, $z_{\text{наим}}=-64$ в точке $(4,2)$.

§ 13. Дифференциальные уравнения

1. $1+y^2=C(1-x^2)$. **2.** $x^2+y^2=\ln Cx^2$. **3.** $y=\sqrt[3]{C+3x-3x^2}$. **4.** $y=\frac{1+x}{1-x}$. **5.** $y-2x=Cx^3(y+x)$. **6.** $\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=\ln C\sqrt{x^2+y^2}$. **7.** $y=\pm x\sqrt{2\ln|Cx|}$. **8.** $\ln|Cx|=-e^{-\frac{y}{x}}$.
9. $y=Ce^{-2x}+2x-1$. **10.** $y=Cx^2e^{\frac{1}{x}}+x^2$. **11.** $x=Ce^{2y}+\frac{y^2}{2}+\frac{y}{2}+\frac{1}{4}$. **12.** $y=\frac{x}{\cos x}$.
13. $\frac{1}{y^2}=Ce^{x^2}+x^2+\frac{1}{2}$. **14.** $y(x+C)=\frac{1}{\cos x}$. **15.** $\ln Cx=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.
16. $y=\frac{C}{x}\sqrt{x^2+1}+\frac{(1+x^2)^2}{3x}$. **17.** $y=Cx-1$. **18.** $(x+y)^2(2x+y)^3=C$.
19. $(x+y-1)^3=C(x-y+3)$. **20.** $x^2-xy+y^2+x-y=C$. **21.** $y=\frac{1}{(1+x)(C+\ln|x+1|)}$.
22. $y=\frac{x^3}{6}-\sin x+C_1x+C_2$. **23.** $y=\frac{x^2}{2}\left(\ln x-\frac{3}{2}\right)+C_1x+C_2$.
24. $y=x^2\ln\sqrt{x}+C_1x^2+C_2x+C_3$. **25.** $y=-\frac{1}{8}\sin 2x+C_1x^2+C_2x+C_3$. **26.** $y=C_1x^2+C_2$.
27. $y=C_1e^x+C_2-x-\frac{x^2}{2}$. **28.** $y=\frac{1}{12}(x+C_1)^3+C_2$. **29.** $y=\sqrt{1+e^{2x}}$. **30.** $y=-\ln|1-x|$.
31. $y=C_1e^x+C_2e^{-2x}$. **32.** $y=C_1e^{3x}+C_2e^{-3x}$. **33.** $y=C_1e^{4x}+C_2$. **34.** $y=C_1\cos x+C_2\sin x$.
35. $y=e^{-3x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$. **36.** $y=C_1e^{6x}+C_2e^x+\frac{5\sin x+7\cos x}{74}$.

37. $y=(C_1+C_2x)e^{3x}+\frac{2}{9}x^2+\frac{5}{27}x+\frac{1}{27}$. **38.** $y=(C_1+C_2x)e^{2x}+\frac{1}{4}\left(x^2e^{2x}-\frac{1}{8}e^{-2x}\right)$.

39. $y=e^x(0{,}16\cos 3x+0{,}28\sin 3x)+x^2+2{,}2x+0{,}84$.

40. $y=(C_1-\ln|\sin x|)\cos 2x+(C_2-x-\frac{1}{2}\operatorname{ctg} x)\sin 2x$.

41. $y=2+C_1\cos x+C_2\sin x+\cos x\ln\left|tg\frac{x}{2}\right|$.

§ 14. Кратные интегралы

1. $\frac{2}{3}a^{3/2}$. **2.** 9. **3.** $\frac{1}{2}$. **4.** 1. **5.** $\frac{\pi}{12}$. **6.** $\ln\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}$. **7.** $\int\limits_3^5 dx\int\limits_{(3x+1)/2}^{(3x+4)/2} f(x,y)\,dy$. **8.** $\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^{2-x} f(x,y)\,dy$.

9. $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy$. **10.** $\int\limits_{-2}^2 dx\int\limits_{-3\sqrt{4-x^2}/2}^{3\sqrt{4-x^2}/2} f(x,y)\,dy$.

11. $\int\limits_0^2 dx\int\limits_{-2\sqrt{2x}}^{2x} f(x,y)\,dy+\int\limits_2^{9/2} dx\int\limits_{-2\sqrt{2x}}^{2\sqrt{2x}} f(x,y)\,dy+\int\limits_{9/2}^8 dx\int\limits_{-2\sqrt{2x}}^{24-4x} f(x,y)\,dy$. **12.** $\int\limits_0^1 dx\int\limits_{x^2}^{x} f(x,y)\,dy$. **13.** $\int\limits_0^r dy\int\limits_{r-\sqrt{r^2-y^2}}^{y} f(x,y)\,dx$. **14.** $\int\limits_1^2 dy\int\limits_1^y f(x,y)\,dx+\int\limits_2^4 dy\int\limits_{y/2}^2 f(x,y)\,dx$.

15. $\int\limits_0^4 dy\int\limits_0^{y/2} f(x,y)\,dx+\int\limits_4^6 dy\int\limits_0^{6-y} f(x,y)\,dx$. **16.** $\int\limits_0^1 dy\int\limits_y^{2-y} f(x,y)\,dx$. **17.** $\int\limits_0^1 dy\int\limits_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x,y)\,dx$. **18.** $\int\limits_0^1 dy\int\limits_{3/2}^{2-\sqrt{2y-y^2}} f(x,y)\,dx$. **19.** $\frac{33}{140}$. **20.** $\frac{9}{4}$. **21.** $\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi\int\limits_0^R f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho\,d\rho$.

22. $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} d\varphi\int\limits_{\frac{R}{2\sin\varphi}}^{2R\sin\varphi} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho\,d\rho$. **23.** $\frac{\pi}{2}\int\limits_0^{R^2} f(\rho^2)\,d\rho$. **24.** $\frac{R^2}{2}\int\limits_0^{\operatorname{arctg} R} f(\operatorname{tg}\varphi)\,d\varphi$. **25.** $\frac{\pi^2}{6}$.

26. 6. **27.** $\frac{a^6}{48}$. **28.** $\frac{1}{180}$. **29.** $\int\limits_0^1 dz\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} d\varphi\int\limits_0^R f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi,z)\rho\,d\rho$. **30.** $186\frac{2}{3}$. **31.** $\frac{88}{105}$. **32.** $\frac{4a^2}{3}$.

§ 15. Криволинейные и поверхностные интегралы

1. $\sqrt{5}\ln 2$. **2.** 24. **3.** $\frac{ab(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)}$. **4.** $\frac{2\sqrt{2}}{3}\left((1+2\pi^2)-1\right)$. **5.** $-\frac{56}{15}$. **6.** 1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{1}{12}$; 3) $\frac{17}{30}$; 4) $-\frac{1}{20}$. **7.** 0. **8.** 13. **9.** $\frac{\pi R^4}{2}$. **10.** $4\sqrt{61}$. **11.** 3. **12.** $\frac{1}{8}$. **13.** $-\frac{\pi R^6}{8}$. **14.** $2\iiint\limits_\Omega (x+y+z)\,dxdydz$.

Содержание

Авторы-составители
Бабин Владислав Николаевич
Бильданов Ринат Талгатович
Грунина Мария Викторовна

ПРАКТИКУМ ПО МАТЕМАТИКЕ

Редактор Н.К.Крупина

Подписано в печать 25 декабря 2017 г. Формат 60 × 84 $^1/_{16}$.
Объем 3,5 уч.-изд. л., 6,5 усл. печ. л. Тираж 100 экз.
Заказ № 1936.

Отпечатано в Издательском центре НГАУ «Золотой колос»
630039, г. Новосибирск, ул. Добролюбова, 160, офис 106
Тел. (383) 267–09–10. E-mail: 2134539@mail.ru