ФГБОУ ВО НОВОСИБИРСКИЙ ГАУ

Теория вероятностей и математическая статистика

Методические указания по проведению практических занятий, самостоятельному изучению дисциплины и выполнению контрольной работы

38.03.01 *Экономика*
38.03.02 *Менеджмент*
38.03.03 *Управление персоналом*
38.03.04 *Государственное и муниципальное управление*
43.03.01 *Сервис*

Новосибирск 2022

Рецензент: доктор физ.-мат наук В.А.Чеверда
Теория вероятностей и математическая статистика: методические указания по проведению практических занятий, самостоятельному изучению дисциплины и выполнению контрольной работы / Новосиб. гос. аграр. ун-т; Сост. Л.А. Назарова, Л.А. Назаров, М.В. Грунина. – Новосибирск, 2022. – 49 с.

Методические указания предназначены для студентов вечерней и заочной формы обучения по направлениям подготовки: 38.03.01 Экономика; 38.03.02 Менеджмент; 38.03.03 Управление персоналом; 38.03.04 Государственное и муниципальное управление; 43.03.01 Сервис.

Утверждены и рекомендованы к изданию учебно-методическим советом факультета Экономики и управления (протокол №5 от 24 января 2023).

Введение

Цели и задачи дисциплины

Цель преподавания теории вероятностей и математической статистики в вузе для студентов экономических и организационно-управленческих специальностей – добиться усвоения студентами основ теории вероятностей, необходимого для решения теоретических и практических экономических и организационно-управленческих задач; привить студентам умение самостоятельно изучать учебную литературу по математике и ее приложениям, подготовить к чтению современной научной литературы и обеспечить запросы других разделов математики и дисциплин; развить умение логически мыслить, оперировать с абстрактными объектами и быть корректным в употреблении математических понятий и символов для выражения количественных и качественных отношений; повысить общий уровень математической культуры; выработать навыки решения типовых задач, способствующих усвоению основных понятий, а также начальные навыки прикладных исследований.

Задачи дисциплины:

– познакомить студентов с идеями и методами теории вероятностей и математической статистики,

– привить студентам опыт работы с математической и связанной с математикой научной и учебной литературой,

– привить студентам опыт решения задач с использованием инструментариев теории вероятностей и математической статистики.

Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине

В результате изучения дисциплины студент должен:

знать:

- инструментальные средства для обработки экономических данных в соответствии с поставленной задачей, виды финансовой, бухгалтерской информации, содержащейся в отчетности предприятий различных форм собственности;

- последовательность принятия управленческих решений в сфере финансовой деятельности предприятия;

уметь:

- применять соответствующие инструментальные средства для обработки экономических данных, использовать результаты анализа этой информации для обоснования выводов по комплексной оценке, финансового состояния хозяйствующего субъекта;

- выявлять проблемы экономического характера при анализе конкретных ситуаций, предлагать способы их решения с учетом критериев социально-экономической эффективности, оценки рисков и возможных социально-экономических последствий;

- обосновывать выбор того или иного варианта управленческого финансового решения на основе всесторонней критической оценки;

владеть:

- методологией экономического исследования; навыками применения современного математического инструментария для решения задач, связанных с расчетом параметров, необходимых для принятия решений в области оценки финансового состояния организации, кредитоспособности заемщиков, страхования рисков, инвестиционной привлекательности активов

- навыками формулировки и обоснования предложений по совершенствованию управленческих решений в сфере финансовой деятельности предприятий

Комбинаторика

Задача 01

Найти вероятность извлечь из колоды в 36 карт два туза

Решение.

Введем случайное событие

A={извлекли две карты из колоды в 36 карт, оказались 2 туза }

По классическому определению вероятности

$$P(A) = \frac{m}{n}, \tag{1.1}$$

где n-общее число элементарных исходов, которые могут наступить при проведении "опыта" (извлечение двух карт из колоды), а m- число благоприятных элементарных исходов, при которых наступает событие A.

Извлечь 2 карты из колоды можно C_{36}^2 способами (это n). Благоприятный исход состоит в том, что обе карты – тузы. В колоде 4 туза, поэтому выбрать 2 из них можно C_4^2 способами (это m). По формуле (1.1)

$$P(A) = \frac{C_4^2}{C_{36}^2}$$

Формула для подсчета $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

$$C_{36}^2 = \frac{36!}{2!(36-2)!} = \frac{36!}{2!34!} = \frac{1\times 2\times 3\times ...\times 34\times 35\times 36}{(1\times 2)\times(1\times 2\times 3\times ...\times 34)} = \frac{35\times 36}{1\times 2} = 630$$

$$C_4^2 = \frac{4!}{2!\,(4-2)!} = \frac{4!}{2!\,2!} = \frac{1\times 2\times 3\times 4}{(1\times 2)\times(1\times 2)} = 6$$

Ответ: $P(A) = \dfrac{6}{630} = \dfrac{1}{105}$

БЛОК 01. Задачи для самостоятельного решения.

01.1	Найти вероятность извлечь 3 карты пиковой масти из колоды в 36 карт.
01.2	В списке вопросов к экзамену по математике 40 вопросов. Студент подготовил только половину. В билете содержится 2 вопроса. Какова вероятность, что студент получит «отлично»?
01.3	В урне лежат 10 белых и 5 черных шаров. Какова вероятность, что все четыре извлеченные шара окажутся белыми?

Задача 02

В урне лежат 8 белых и 6 черных шаров. Наудачу извлекаем 5 шаров. Какова вероятность, что среди них окажутся 3 черных шара?

Решение.

Введем случайное событие

A={из урны с 8 белыми и 6 черными шарами извлекли 5 шаров, среди них оказались 3 черных}

Всего шаров в урне $8+6=14$. «Опыт» заключается в извлечении 5 произвольных шаров. Это можно сделать C_{14}^5 способами. Благоприятный исход состоит в том, что среди извлеченных 5 шаров окажутся:

- три черных шара (это можно сделать C_6^3 способами);
- два белых шара (это можно сделать C_8^2 способами).

Таким образом, число благоприятных исходов равно $C_6^3 \times C_8^2$ (правило умножения в комбинаторике).

По формуле (1.1)

$$P(A)=\frac{C_6^3 \times C_8^2}{C_{12}^5}$$

Найдем значения входящих в это выражение C_n^k.

$$C_{14}^5=\frac{14!}{5!(14-5)!}=\frac{14!}{5!\,9!}=\frac{1\times2\times3\times4\times5\times6\times7\times8\times9\times10\times11\times12\times13\times14}{(1\times2\times3\times4\times5)\times(1\times2\times3\times4\times5\times6\times7\times8\times9)}=\frac{10\times11\times12\times13\times14}{1\times2\times3\times4\times5}=11\times13\times14$$

$$C_8^2=\frac{8!}{2!(8-2)!}=\frac{8!}{2!\,6!}=\frac{1\times2\times3\times4\times5\times6\times7\times8}{(1\times2)\times(1\times2\times3\times4\times5\times6)}=\frac{7\times8}{1\times2}=28$$

$$C_6^3=\frac{6!}{3!(6-3)!}=\frac{6!}{3!\,3!}=\frac{1\times2\times3\times4\times5\times6}{(1\times2\times3)\times(1\times2\times3)}=20$$

Ответ: $P(A)=\frac{20\times28}{11\times13\times14}=\frac{40}{132}$

БЛОК 02. Задачи для самостоятельного решения.

02.1	Найти вероятность, что среди 4 карт, вытащенных из колоды 36 карт, окажутся две пиковой масти.
02.2	В цехе работают 10 мужчин и 8 женщин. Наудачу отобрали 7 сотрудников. Какова вероятность, что среди них окажутся 4 мужчин.
02.3	В списке вопросов к экзамену по математике 40 вопросов. Студент подготовил 30 из них. В билете содержится 3 вопроса. Какова вероятность, что студент ответит на 2 из них?

Алгебра событий

Задача 03

Два стрелка, вероятности попадания в цель которых равны $p_1=0.8$ и $p_2=0.9$, производят залп по мишени. Какова вероятность, что в мишени окажутся:

1) две пули;

2) ни одной пули;

3) одна пуля;

4) хотя бы одна пуля.

Решение.

Введем два случайных события:

$$A_1=\{\text{первый стрелок попал}\};$$

$$A_2=\{\text{второй стрелок попал}\}.$$

Противоположные события

$$\overline{A}_1=\{\text{первый стрелок не попал}\};$$

$$\overline{A}_2=\{\text{второй стрелок не попал}\}.$$

По условию задачи вероятности $P(A_1)=p_1$ (тогда обозначим $P(\overline{A}_1)=1-p_1=q_1$) и $P(A_2)=p_2$ ($P(\overline{A}_2)=1-p_2=q_2$) известны.

1. Рассмотрим событие $C_2=\{$в мишени две пули$\}$. Это значит, что оба стрелка попали, т.е. одновременно наступили два независимых события A_1 и A_2, поэтому $C_2=A_1\cdot A_1$,

$$P(C_2)=P(A_1\cdot A_2)=(\textit{в силу независимости событий})=P(A_1)P(A_2)=p_1p_2\,.$$

2. Рассмотрим событие $C_0=\{$в мишени ни одной пули$\}$. Это значит, что оба стрелка не попали, т.е. одновременно наступили независимые события $\overline{A}_1$ и $\overline{A}_2$, поэтому $C_0=\overline{A}_1\cdot\overline{A}_2$ и

$$P(C_0)=P(\overline{A}_1\cdot\overline{A}_2)=(\textit{в силу независимости событий }\overline{A}_1\textit{ и }\overline{A}_2)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)=q_1q_2$$

3. Рассмотрим событие $C_1=\{$в мишени ровно одна пуля$\}$. Это значит, либо первый стрелок попал, а второй не попал, либо первый стрелок не попал, а второй попал:

$$C_1=A_1\cdot\overline{A}_2+\overline{A}_1\cdot A_2$$

$$P(C_1)=P(A_1\cdot\overline{A}_2+\overline{A}_1\cdot A_2)=(\textit{события }A_1\cdot\overline{A}_2\textit{ и }\overline{A}_1\cdot A_2\textit{ несовместны})=P(A_1\cdot\overline{A}_2)+P(\overline{A}_1\cdot A_2)=$$

$$=(\textit{в силу независимости событий }A_1\textit{ и }A_2)=P(A_1)P(\overline{A}_2)+P(\overline{A}_1)P(A_2)=p_1q_2+q_1p_2$$

4. Рассмотрим событие $D=\{$хотя бы одна пуля в мишени$\}$. Сформулируем противоположное событие $\overline{D}=\{$ни одной пули в мишени$\}$. Очевидно, что $\overline{D}=C_0$. Тогда

$$P(D)=1-P(\overline{D})=1-P(C_0)=1-q_1q_2\,.$$

Упражнение. Вычислить вероятности событий, подставив в полученные формулы числовые значения p_1 и p_2.

БЛОК 03. Задачи для самостоятельного решения.

03.1	Вероятности попадания в цель трех стрелков равны соответственно: 0.6, 0.7 и 0.8. Они одновременно выстрелили в мишень. Какова вероятность, что в мишени окажутся: 1) две пули; 2) три пули; 3) хотя бы одна пуля.

03.2	Бросили пять игральных костей. Найти вероятность, что выпадет хотя бы одна шестерка.
03.3	Сколько надо бросить монет, чтобы вероятность появления герба была больше 0.99?

Формула полной вероятности, формула Байеса.

Задача 04

Производительности труда трех рабочих относятся как 4:7:9. Вероятность изготовления бракованной детали каждым из них соответственно равна: 0.02, 0.04 и 0.06. Из всех изготовленных этими рабочими деталей выбрали одну. Найти вероятность, что:

а) деталь бракованная;

б) бракованная деталь изготовлена вторым рабочим.

Решение.

При выборе детали нам неизвестно, каким рабочим она изготовлена. Поэтому вводим три гипотезы:

H_1={деталь изготовлена 1ым рабочим}

H_2={деталь изготовлена 2ым рабочим}

H_3={деталь изготовлена 3^{им} рабочим}

Найдем вероятности этих гипотез. Среди всех деталей 4 части изготовил первый рабочий, 7 частей – второй и 9 частей – третий. Тогда вероятности гипотез равны:

$$P(H_1)=\frac{4}{4+7+9}=\frac{4}{20}=0.20$$

$$P(H_2)=\frac{7}{4+7+9}=\frac{7}{20}=0.35$$

$$P(H_3)=\frac{9}{4+7+9}=\frac{9}{20}=0.45$$

Пусть случайное событие A={выбранная деталь - бракованная}, тогда известны условные вероятности этого события:

$$P_{H_1}(A)=0.02\,,\ P_{H_2}(A)=0.04\,,\qquad P_{H_3}(A)=0.06\,.$$

Вероятность события A вычисляем по формуле полной вероятности

$$P(A)=P(H_1)P_{H_1}(A)+P(H_2)P_{H_2}(A)+P(H_3)P_{H_3}(A)=0.20\times 0.03+0.35\times 0.04+0.45\times 0.06=0.047$$

.Теперь переоценим вероятность гипотезы H_2, если оказалось, что деталь бракованная (формула Байеса)

$$P_A(H_2)=\frac{P(H_2)P_{H_2}(A)}{P(A)}=\frac{0.35\times 0.04}{0.047}\approx 0.298\,.$$

БЛОК 04. Задачи для самостоятельного решения.

04.1	Выработки за смену четырех сборщиков относятся как 19:14:17:10. Вероятность изготовления годного прибора 1го равна 0.9, 2го 0.85, 3го 0.8 и 4го 0.95. Найти вероятность, что наудачу взятый прибор: а) годный; б) этот прибор изготовлен третьим рабочим.
04.2	В поход взяли 12 банок тушенки и 8 банки сгущенки, которые невозможно отличить по внешнему виду. По дороге одна банка была утеряна. На привале выбрали банку. Какова вероятность, что это сгущенка? Банку вскрыли, оказалось, что это сгущенка. Какова вероятность, что потеряли банку тушенки?
04.3	В первой урне лежат 10 белых шаров (БШ) и 5 черных шаров (ЧШ), во второй 6 БШ и 14 ЧШ. Из первой урны наудачу извлекли шар и переложили во вторую урну, перемешали. Затем из нее извлекли шар. Какова вероятность, что он окажется белым?

Формула Бернулли

Напомню, что *Случайное Событие* (СС) – результат эксперимента с a priori неизвестным исходом в силу тех или иных причин. Эксперименты могут быть простые:

- бросаем монету (2 элементарных исхода - “выпал орел”, “выпала решка”);
- бросаем кубик (6 элементарных исходов - “выпало 1 очко”…“выпало 6 очков”).

А могут быть и не простые события: одновременно бросаем 4 кубика, 14 монет и вытаскиваем 10 карт из колоды. Назовем сложным случайным событием результат эксперимента, в котором участвуют однородные объекты (только монеты, только кубики…). Фактически мы проводим много «одинаковых» простых экспериментов, в котором вероятность наступления простого случайного события одна и та же. Поставим задачу: подсчитать вероятность, что в n испытаниях наступит k успехов ($0 \le k \le n$), если вероятность наступления успеха в одном испытании известна и равна p (тогда вероятность неудачи $q = 1 - p$). Решение этой задачи нашел швейцарский математик Я.Бернулли

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} .$$

Напомню, что $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$. Отметим свойство этих вероятностей:

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} = (\textit{формула бинома Ньютона}) = (p+q)^n = 1^n = 1 .$$

Задача 05

Бросили 5 монет. Найти вероятность, что выпадет: 1) 3 герба; 2) хотя бы один герб.

Решение.

Здесь $n = 5$, $p = 0.5$, $q = 1 - p = 0.5$.

1) $k = 3$, тогда

$$P_5(3) = C_5^3 0.5^3 0.5^{5-3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} 0.5^3 0.5^2 = \frac{5!}{3!2!} 0.5^5 = \frac{10}{32} = \frac{5}{16}$$

2) $k = 1,2,3,4,5$

$$P_5(1 \le k) = P_5(1) + P_5(2) + ... + P_5(5) = 1 - P_5(0) = 1 - C_5^0 0.5^0 0.5^5 = 1 - 0.5^5 = \frac{31}{32}$$

Задача 06

Сколько раз нужно бросить кубик, чтобы вероятность появления “шестерки” оказалась больше 0.9?

Решение.

Здесь $p=\frac{1}{6}$, $q=1-p=\frac{5}{6}$, неизвестно число бросков n, но известно, что вероятность события

$$A=\{\text{хотя бы одна “шестерка” при } n \text{ бросках}\}.$$

больше 0.9. Тогда

$$P(A)=P_n(1\le k)=P_n(1)+P_n(2)+...+P_n(n)=1-P_n(0)=1-C_5^0p^0q^n=1-q^n=1-\left(\frac{5}{6}\right)^n>0.9,$$

откуда

$$\left(\frac{5}{6}\right)^n<0.1\Rightarrow n>\frac{\ln 0.1}{\ln\frac{5}{6}}\approx 12.6.$$

Поэтому надо сделать не менее 13 бросков кости.

БЛОК 05. Задачи для самостоятельного решения.

05.1	Что вероятнее: получить 4 герба при бросании 8 монет или 5 гербов при бросании 10 монет,,.
05.2	Какова вероятность, что при бросании 6 кубиков выпадут три числа, кратных 3?
05.3	Сколько нужно бросить монет, чтобы герб появился с вероятностью, большей, чем 0.9999?

Формула Муавра-Лапласа

Продолжение раздела **Формула Бернулли**.

I. Пусть мы находимся в условиях “формула Бернулли” и хотим подсчитать вероятность, что при бросании 100 монет выпадет 52 герба. Формула Бернулли дает ответ

$$P_{100}(52)=C_{100}^{52}0.5^{52}0.5^{100-52},$$

однако, при попытке найти значение этого выражения на калькуляторе вас постигнет неудача! *Предлагаю убедиться в этом самостоятельно.*

В 1730 году Муавр и в 1812 году Лаплас вывели приближенную формулу

$$P_n(k)\approx\frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}, \tag{1}$$

где

$$\varphi(x)=\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \qquad x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}. \tag{2}$$

Функция φ имеет следующие свойства:

1) $\varphi(x)=\varphi(-x)$ (четная функция);

2) $\varphi(x)\approx 0$ при $|x|>4$.

В *Приложении* представлена **Таблица 1** значений функции φ.

Формулы (1) и (2) выражают суть ***локальной теоремы Муавра-Лапласа***, **которую рекомендуется использовать при** $n>100$, $k>20$ и $p>0.1$.

Но эти ограничения слишком жесткие! Предлагаю *самостоятельно* вычислить вероятность $P_n(k)$ при $n=10$, $k=5$ $p=q=0.5$ по точной формуле

$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}$$

и по приближенной формуле (1). Окажется, что разница составит чуть более 2%! Поэтому на практике достаточно выполнения условий

$$n>10, \qquad p>0.1. \tag{3}$$

II. Теперь найдем вероятность случайного события:

"в n испытаниях наступили от k_1 до k_2 успехов".

Ответ дает интегральная теорема Лапласа

$$P_n(k_1,k_2)\approx\Phi(x_2)-\Phi(x_1), \tag{4}$$

где $x_1=\dfrac{k_1-np}{\sqrt{npq}}$, $x_2=\dfrac{k_2-np}{\sqrt{npq}}$. Функция Φ - интегральная функция Лапласа - имеет следующие свойства:

1) $\Phi(x)=-\Phi(-x)$ (нечетная функция);
2) $\Phi(x)\approx 0.5$ при $x>5$;
3) $\Phi(x)\approx -0.5$ при $x<-5$.

В *Приложении* представлена **Таблица 2** значений функции Φ.

Из (3) следует формула

$$P(|w-p|<\varepsilon)\approx\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}\right), \tag{5}$$

по которой находится вероятность, что *относительная частота наступления события* (ОЧПС) $w=\dfrac{k}{n}$ отклонится от постоянной вероятности p на заданную величину ε.

Формулы (4) и (5) применимы также при выполнении условий (3).

Задача 06

Бросили 400 монет. Найти вероятности следующих случайных событий:

1) выпадет ровно 210 гербов;

2) выпадет от 195 до 215 гербов;

3) ОЧПС отклонится от вероятности выпадения герба менее, чем на 0.02.

Решение.

В этой задаче $n=400$, $p=0.5$: условия (3) выполнены.

1). Используем формулы (1)-(2), в которых

$k=210$, $np=400\times0.5=200$, $\sqrt{np(1-p)}=\sqrt{400\times0.5\times(1-0.5)}=10$, тогда

$$x=\frac{210-200}{10}=1, \qquad P_{400}(210)\approx\frac{\varphi(1)}{10}=(\textit{Таблица}\,1)=\frac{0.2420}{10}=0.0242.$$

2). Используем формулу (3), в которой

$k_1=195$, $k_2=215$, $np=400\times0.5=200$, $\sqrt{np(1-p)}=\sqrt{400\times0.5\times(1-0.5)}=10$, тогда

$$x_1=\frac{195-200}{10}=-0.5,\ x_1=\frac{215-200}{10}=1.5,$$

$$P_{400}(195{,}215) \approx \Phi(1.5) - \Phi(-0.5) = \Phi(1.5) + \Phi(0.5) = (\textit{Таблица } 2) = 0.4332 + 0.1915 = 0.6247$$

3). Используем формулу (4), в которой $\varepsilon = 0.02$, тогда

$$P\left(\left|\frac{k}{400} - 0.5\right| < 0.02\right) \approx \Phi\left(0.02\sqrt{\frac{400}{0.5(1-0.5)}}\right) = \Phi(0.8) = (\textit{Таблица } 2) = 0.2881.$$

БЛОК 06. Задачи для самостоятельного решения.

06.1	Бросили 180 игральных кубиков. Какова вероятность, что выпадет: 1) ровно 26 “шестерок”; 2) от 85 до 100 четных чисел; 3) больше 55 чисел, кратных трем; 4) ОЧПС “появление двойки” отклонится от постоянной вероятности менее, чем на 0.05.
06.2	Вероятность успеха в одном испытании равна 0.6. Провели 600 таких испытаний. Какова вероятность, что наступит: 1) ровно 354 успеха; 2) ровно 270 успехов; 3) от 345 до 384 успехов; 4) больше 420 успехов; 5) меньше 300 успехов.

Задача 07

Вероятность *p* наступления события в одном испытании равна 0.7. Сколько нужно провести таких испытаний, чтобы с вероятностью γ=0.88 относительная частота появления события *w* отклонилась от *p* не более, чем на ε=0.01?

Решение.

Вероятность отклонения *w* от *p*

$$P(|w-p| < \varepsilon) = 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}\right)$$

равна γ, поэтому

$$2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}\right) = \gamma, \text{ тогда } \Phi(t_\gamma) = \frac{\gamma}{2},$$

где введено обозначение

$$t_\gamma = \varepsilon\sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}.$$

По условию задачи γ=0.88, тогда в таблице значений интегральной функции Лапласа (**Таблица 2**) ищем значение t_γ, при котором $\Phi(t_\gamma) = \frac{\gamma}{2} = \frac{0.88}{2} = 0.44$, $t_\gamma = 1.56$.

Из соотношения (2) находим n

$$n = \frac{t_\gamma^2 p(1-p)}{\varepsilon^2} = \frac{1.56^2 \times 0.3 \times (1-0.3)}{0.01^2} = 5111.$$

БЛОК 07. Задачи для самостоятельного решения.

07.1	Случайное событие наступает с вероятностью p = 0.9 в одном испытании. Сколько нужно провести таких испытаний, чтобы с вероятностью 0.92 относительная частота появления события отклонилась от p меньше чем на 0.02?
07.2	Сколько нужно бросить монет, чтобы ОЧПС “появление герба” отклонилась от постоянной вероятности менее, чем на 0.025 с вероятностью 0.99?
07.3	Сколько нужно бросить игральных кубиков, чтобы ОЧПС “появление числа, кратного 3” отклонилась от постоянной вероятности менее, чем на 0.02 с вероятностью 0.98?

Задача 08

В результате одного испытания событие появляется с вероятность p=2/3. Найти диапазон, в котором с вероятностью γ=0.8282 лежит число появившихся событий в n=7200 испытаниях.

Решение.

По определению ОЧПС

$$w = \frac{k}{n},$$

где k -число появившихся событий в n испытаниях, тогда по формуле (5)

$$P\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}\right) = \gamma,$$

откуда

$$\Phi(t_\gamma) = \frac{\gamma}{2},$$

где обозначено $t_\gamma = \varepsilon\sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}$. Зная t_γ можно найти величину ε

$$\varepsilon = \varepsilon_\gamma = t_\gamma\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}.$$

Теперь определим диапазон, в котором лежит число появившихся событий:

$$\left|\frac{k}{n} - p\right| < \varepsilon_\gamma, \quad -\varepsilon_\gamma < \frac{k}{n} - p < \varepsilon_\gamma, \quad p - \varepsilon_\gamma < \frac{k}{n} < p + \varepsilon_\gamma,$$

$$k_1 < k < k_2,$$

где $k_1 = n(p - \varepsilon_\gamma)$, $k_2 = n(p + \varepsilon_\gamma)$.

В нашей задаче

$$\Phi(t_\gamma) = \frac{0.9282}{2} = 0.4641,$$

по **Таблице 2** (значения функции Φ) находим $t_\gamma = 1.8$. Вычисляем

$$\varepsilon_\gamma = t_\gamma\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 1.8\sqrt{\frac{\frac{2}{3}\left(1-\frac{2}{3}\right)}{7200}} = \frac{1.8}{180} = 0.01,$$

тогда

$$k_1 = n(p - \varepsilon_\gamma) = 7200 \times \left(\frac{2}{3} - 0.01\right) = 4730,$$

$$k_1 = n(p + \varepsilon_\gamma) = 7200 \times \left(\frac{2}{3} - 0.01\right) = 4874.$$

БЛОК 08. Задачи для самостоятельного решения.

08.1	Вероятность попадания при каждом из 19200 выстрелов равна 0.75. Найти диапазон, в котором с вероятностью 0.7286 лежит число попаданий.
08.2	В результате одного испытания событие появляется с вероятность 1/3. Найти диапазон, в котором с вероятностью 0.8904 лежит число появившихся событий при 1800 испытаниях.
08.3	Вероятность попадания при каждом из 4800 выстрелов равна 0.25. Найти диапазон, в котором с вероятностью 0.9108 лежит число попаданий.
08.4	Бросили 8000 монет. Найти диапазон, в котором с вероятностью 0.99 лежит число выпавших гербов.

Дискретные случайные величины

Случайное событие – результат эксперимента с a priori неизвестным исходом в силу тех или иных причин. Рассмотрим более сложный “объект” – случайную величину, которая также является результатом “случайного эксперимента”. В качестве такового выберем “бросание игрального кубика”, при этом на верхней грани могут выпасть цифры 1,2,…,6 с равными вероятностями 1/6. Представим результат такого эксперимента в виде таблицы

Таблица 1.

X	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Это ряд распределения ***дискретной случайной величины X*** “число очков на верхней грани при бросании игрального кубика”. “Дискретной” потому, что принимает изолированные (не обязательно натуральные или целые!) числовые значения. Таким образом:

$$P(X=i)=\frac{1}{6}.$$

Следует обратить внимание, что совокупность случайных событий

$$\{X=1\}\,\{X=2\}\ldots\{X=6\}$$

образуют полную группу (т.е. в результате эксперимента одно из них обязательно наступит; если наступает одно, то другое наступить не может!), поэтому

$$P(X=1)+P(X=2)+\ldots+P(X=6)=1$$

(сумма вероятностей во второй строке Таблицы 1 равна единице).

В общем случае ряд распределения дискретной случайной величины (ДСВ) имеет вид

Таблица 2. Общий вид распределения ДСВ ***X***

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

$$p_1 + p_2 + ... + p_n = 1, \qquad 0 \le p_i \le 1$$

Заметим, что любую константу *C* можно рассматривать как случайную величину, имеющую ряд распределения

Таблица 3. Распределение ДСВ “константа *C*”

X	*C*
P	1

Операции с дискретными случайными величинами

Пусть заданы две ДСВ ***X*** и ***Y*** своими рядами распределения

X	x_1	x_2
P	p_1	p_2

Y	y_1	y_2
P	q_1	q_2

тогда распределение суммы ***X+Y*** имеет вид

Таблица 4. Распределение ДСВ ***X+Y*** (сумма ***X*** и ***Y***)

X+Y	$x_1 + y_1$	$x_1 + y_2$	$x_2 + y_1$	$x_2 + y_2$
P	s_{11}	s_{12}	s_{21}	s_{22}

где $s_{mn} = P(X = x_m\ Y = y_n)$, если ДСВ ***X*** и ***Y*** независимы, то $s_{mn} = p_m q_n$ $(m,n = 1,2)$.

Таким же образом можно построить ряд распределения для произведения дискретных случайных величин ***X*** и ***Y*** , достаточно в первой строке Табл. 4 заменить знак “+” на “×”.

Если случайные величины ***X*** и ***Y*** принимают не два, а большее число значений, то определение операций “сложение ” и “ умножение” ДСВ аналогично, необходимо лишь сложить или умножить каждое значение ***X*** с каждым значением ***Y*** и во второй строке Табл. 4 записать соответствующие вероятности.

Распределение $\boldsymbol{X^2}$ имеет вид

Таблица 5. Общий вид распределения $\boldsymbol{X^2}$

X^2	x_1^2	x_2^2	$\cdots$	x_n^2
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

следует обратить внимание, что возводятся в квадрат только *значения* ДСВ!

Случайную величину можно ***X*** умножать на константу, соответствующая ДСВ будет иметь следующий ряд распределения

Таблица 6. Общий вид распределения ДСВ ***CX***

CX	Cx_1	Cx_2	$\cdots$	Cx_n
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

Числовые характеристики дискретных случайных величин

Вводится ***математическое ожидание*** ДСВ – сумма произведений значений ДСВ на соответствующие вероятности

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n, \tag{1}$$

которое характеризует “среднее” значение ***X***. Для удобства иногда будем обозначать $M(X)=m_x$

Математическое ожидание обладает следующими свойствами.

1. $M(CX)=CM(X)$
2. $M(X+Y)=M(X)+M(Y)$
3. $M(XY)=M(X)M(Y)$ (если ***X*** и ***Y*** независимые случайные величины)

Эти формулы приводятся без доказательства.

Вторая числовая характеристика ДСВ – ***дисперсия***, которая дает оценку среднего отклонения случайной величины от своего математического ожидания и вычисляется по формуле

$$D(X)=M\left(\hat{X}^2\right),$$

где $\hat{X}=X-M(X)$ – отклонение. Напишем формулу для дисперсии в развернутом виде

$$D(X)=M([X-m_x]^2)=(x_1-m_x)^2p_1+(x_2-m_x)^2p_2+\ldots+(x_n-m_x)^2p_2\,, \tag{2}$$

которая после несложных преобразований сводится к

$$D(X)=x_1^2p_1+x_2^2p_2+\ldots+x_n^2p_n-m_x^2 \tag{3}$$

или в краткой записи $D(X)=M(X^2)-(M(X))^2$.

Из формулы (2) следует, что дисперсия всегда неотрицательна.

Третья числовая характеристика ДСВ – ***среднее квадратичное отклонение***

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}\,. \tag{4}$$

Свойства ***дисперсии***.

1. $D(C)=0$
2. $D(CX)=C^2D(X)$
3. $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$ (если ***X*** и ***Y*** – независимые ДСВ)
4. $D(X-Y)=D(X)+D(Y)$ (если ***X*** и ***Y*** – независимые ДСВ)

Давайте докажем несколько неожиданное (на первый взгляд) свойство 4.

$$D(X-Y)=D(X+(-1)Y)=(\textit{по свойству } 3)=D(X)+D((-1)Y)=$$
$$(\textit{по свойству } 2)=D(X)+(-1)^2D(Y)=D(X)+D(Y)$$

Математическое ожидание и дисперсия суммы нескольких одинаково распределенных ДСВ

Рассмотрим систему одинаково распределенных ДСВ $\{X_i\}_{i=1,\ldots,n}$. Очевидно, что их математические ожидания и дисперсии одинаковы: $M(X_i)=a$, $D(X_i)=\sigma^2$. Введем новую ДСВ – среднее арифметическое

$$\overline{X}=\frac{1}{n}(X_1+X_2+\ldots+X_n)$$

и найдем $M(\overline{X})$, $D(\overline{X})$ и $\sigma(\overline{X})$, воспользовавшись свойствами математического ожидания и дисперсии.

$$M(\overline{X})=M\left(\frac{1}{n}(X_1+X_2+\ldots+X_n)\right)=\frac{1}{n}M(X_1+X_2+\ldots+X_n)=\frac{1}{n}(M(X_1)+M(X_2)+\ldots+M(X_n))=$$
$$=\frac{1}{n}(a+a+\ldots+a)=\frac{1}{n}(na)=a \tag{5}$$

$$D(\overline{X})=D\left(\frac{1}{n}(X_1+X_2+\ldots+X_n)\right)=\left(\frac{1}{n}\right)^2D(X_1+X_2+\ldots+X_n)=\frac{1}{n^2}(D(X_1)+D(X_2)+\ldots+D(X_n))=$$
$$=\frac{1}{n^2}(\sigma^2+\sigma^2+\ldots+\sigma^2)=\frac{1}{n^2}(n\sigma^2)=\frac{\sigma^2}{n} \tag{6}$$

$$\sigma(\overline{X})=\sqrt{D(\overline{X})}=\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \tag{7}$$

Таким образом, математическое ожидание средней ДСВ $\overline{X}$ рассматриваемой системы случайных величин не изменилась, а дисперсия уменьшилась в n раз. Этим свойством дисперсии пользуются при обработке данных серии обследования “одинаковых” объектов, например, при определении размера детали, изготавливаемого автоматом, в качестве этого размера выбирают среднее арифметическое результатов измерений нескольких деталей (следует провести не менее 30 измерений), при этом ошибка (характеризуется средним квадратичным отклонением) измерений уменьшается в $\sqrt{n}$ раз.

Примеры дискретных случайных величин

Индикатор случайного события. Пусть известна вероятность p некоторого случайного события A: $P(A) = p$. Введем *индикатор* события A - дискретную случайную величину I_A, которая принимает два значения 0 и 1, ее ряд распределения

Таблица 7. Распределение индикатора случайного события

I_A	**0**	**1**
P	$1-p$	p

Вычислим

$$M(I_A) = 0 \times (1-p) + 1 \times p = p \quad (8)$$

$$D(I_A) = 0^2 \times (1-p) + 1^2 \times p - p^2 = p(1-p) \quad (9)$$

Геометрическое распределение. Рассмотрим “бесконечный” эксперимент. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна p. Стрелок проводит стрельбу по правилу “*попал – получил следующий патрон*”. Теоретически, если стрелок не будет промахиваться, то этот “эксперимент” может продолжаться вечно. Построим ряд распределения ДСВ X “число полученных стрелком патронов”.

Введем случайное событие A={попадание при одном выстреле}. По условию $P(A) = p$, обозначим $q = 1 - p = P(\overline{A})$. Случайная величина X может принимать любые значения от 1 до ∞. Вычислим последовательно вероятности следующих событий $\{X = 1\}$, $\{X = 2\}, \ldots, \{X = k\} \ldots$

$$P(X = 1) = P(\overline{A}) = q$$

(чтобы “эксперимент” прервался на первом выстреле, стрелок должен сразу промахнуться)

$$P(X = 2) = P(A\overline{A}) = P(A)P(\overline{A}) = pq$$

(чтобы “эксперимент” прервался на втором выстреле, стрелок должен сначала попасть, потом промахнуться), и так далее:

$$P(X = k) = P(\underbrace{AA..A}_{k-1}\overline{A}) = \underbrace{P(A)P(A)..P(A)}_{k-1}P(\overline{A}) = \underbrace{pp..p}_{k-1}q = p^{k-1}q$$

Теперь можно построить ряд распределения

Таблица 8. Геометрическое распределение.

X	1	2	…	k	…
P	q	pq	…	$p^{k-1}q$	…

Проверим, действительно ли сумма чисел, стоящих во второй строке Табл. 8, равна 1.

$$q + pq + \ldots + p^{k-1}q + \ldots = q(1 + p + \ldots + p^{k-1} + \ldots) = (\text{\textit{сумма геометрической прогресии}}) = q\frac{1}{1-p} = q\frac{1}{q} = 1.$$

Приведем без доказательства два факта:

$$M(X) = \frac{1}{1-p}, \; D(X) = \frac{p}{(1-p)^2}.$$

Первый факт интуитивно ясен. Математическое ожидание – среднее значение случайной величины. Пусть вероятность попадания стрелка при одном выстреле равно 0.9. Сколько раз в среднем он должен попасть в мишень при 10 выстрелах? Очевидно, что 9 раз. Иными словами, стрелок истратит 10 патронов, чтобы промахнуться 1 раз (закончить “эксперимент”). Что дает формула для математического ожидания?

$$M(X)=\frac{1}{1-0.9}=10\,.$$

Распределение Бернулли (второе название - ***биномиальное распределение***). Пусть в одном испытании успех наступает с вероятностью p, тогда успеха не будет с вероятностью $q=1-p$. Провели n таких испытаний. Построим ряд распределения ДСВ X “число успехов в n испытаниях”. Нам известна формула Бернулли

$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}$ (вероятность того, что в n испытаниях наступит k успехов),

тогда $P(X=k)=P_n(k)$, поэтому можно сразу построить ряд распределения Бернулли X

Таблица 9. Распределение Бернулли.

X	0	1	$\dots$	k	$\dots$	$n-1$	n
P	q^n	npq^{n-1}	$\dots$	$C_n^k p^k q^{n-k}$	$\dots$	$np^{n-1}q$	p^n

Проверим, действительно ли сумма чисел, стоящих во второй строке Табл. 9, равна 1.

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k}=(\textit{формула бинома Ньютона})=(p+q)^n=1^n=1\,.$$

Найдем математическое ожидание и дисперсию распределения Бернулли. Для этого введем n индикаторов I_m событий $A_m=${в испытании с номером m наступил успех}, $m=1,\dots,n$. Из формул (8) и (9) следует, что

$$M(I_m)=p\,,\qquad D(I_m)=pq\,.$$

Очевидно, что

$$X=I_1+I_2+\dots+I_n$$

тогда

$$M(X)=M\big(I_1+I_2+\dots+I_n\big)=M(I_1)+M(I_2)+\dots+M(I_n)=p+p+\dots+p=np, \tag{10}$$
$$D(X)=D\big(I_1+I_2+\dots+I_n\big)=D(I_1)+D(I_2)+\dots+D(I_n)=pq+pq+\dots+pq=npq, \tag{11}$$
$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{npq}\,. \tag{12}$$

Гипергеометрическое распределение. В ящике лежат N деталей, из них n окрашенных, наудачу извлекаем m деталей. Построить ряд распределение ДСВ X “число окрашенных деталей k среди извлеченных”. Вспомним формулу “CC деленное на C”, которая дает ответ на вопрос “какова вероятность, что среди извлеченных k деталей окрашено”

$$P(X=k)=\frac{C_n^k C_{N-n}^{m-k}}{C_N^m},$$

тогда искомый ряд распределения имеет вид

Таблица 10. Гипергеометрическое распределение.

X	0	1	$\dots$	k	$\dots$	$s=\min(m,n)$
P	$\dfrac{C_{N-n}^{m}}{C_N^m}$	$\dfrac{nC_{N-n}^{m-1}}{C_N^m}$	$\dots$	$\dfrac{C_n^k C_{N-n}^{m-k}}{C_N^m}$	$\dots$	$\dfrac{C_n^s C_{N-n}^{m-s}}{C_N^m}$

Примеры решения задач по теме “Дискретные случайные величины ”

Задача 09

Два стрелка производят залп по мишени. Вероятности их попадания 0.7 и 0.8. Построить ряд распределения ДСВ ***X*** “число пуль, попавших в мишень”. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение.

Решение.

Введем два случайных события

$$A_1=\{\text{попал в мишень } 1^{\text{ый}} \text{ стрелок}\}$$

$$A_2=\{\text{попал в мишень } 2^{\text{ой}} \text{ стрелок}\}$$

по условию $P(A_1)=0.7$, $P(A_1)=0.8$.

Случайная величина ***X*** принимает три значения: **0** (оба стрелка промахнулись), **1** (один из стрелков попал) и **2** (оба стрелка попали). Чтобы построить ряд распределения необходимо вычислить вероятности трех случайных событий: $\{X=0\}$, $\{X=1\}$ и $\{X=2\}$.

$$P(X=0)=P(\overline{A}_1\overline{A}_2)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)=(1-0.7)\times(1-0.8)=0.06$$

$$P(X=1)=P(\overline{A}_1A_2+A_1\overline{A}_2)=P(\overline{A}_1)P(A_2)+P(A_1)P(\overline{A}_2)=0.3\times0.8+0.7\times0.2=0.38$$

$$P(X=2)=P(A_1A_2)=0.7\times0.8=0.56$$

Таким образом, искомый ряд распределения имеет вид

Таблица 11. Ряд распределения ДСВ ***X***

X	**0**	**1**	**2**
P	0.06	0.38	0.56

Теперь вычислим математическое ожидание по формуле (1)

$$M(X)=0\times0.06+1\times0.38+2\times0.56=1.5,$$

дисперсию по формуле (3)

$$D(X)=0^2\times0.06+1^2\times0.38+2^2\times0.56-1.5^2=0.37$$

и среднее квадратичное отклонение

$$\sigma(X)=\sqrt{0.37}\approx0.61.$$

Задача 10

Игра в “кости”: бросают два игральных кубика и считают сумму очков X, выпавших на верхних гранях. Построить ряд распределения X. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение.

Решение.

Случайная величина X принимает значения от **2** (выпало две “единицы”) до **12** (выпало две “шестерки”). Найдем вероятности случайных событий $\{X=k\}$, где k принимает значения 2,3,…,12. Для этого построим таблицу, в которой перечислены все возможные комбинации очков, появляющиеся при бросании двух костей. Всего таких комбинаций $M = 6 \times 6 = 36$.

k	очки на первой кости	очки на второй кости	число комбинаций $m(k)$
2	**1**	**1**	**1**
3	**1** **2**	**2** **1**	**2**
4	**1** **2** **3**	**3** **2** **1**	**3**
5	**1** **2** **3** **4**	**4** **3** **2** **1**	**4**
6	**1** **2** **3** **4** **5**	**5** **4** **3** **2** **1**	**5**
7	**1** **2** **3** **4** **5** **6**	**6** **5** **4** **3** **2** **1**	**6**
8	**2** **3** **4** **5** **6**	**6** **5** **4** **3** **2**	**5**
9	**3** **4** **5** **6**	**6** **5** **4** **3**	**4**
10	**4** **5** **6**	**6** **5** **4**	**3**
11	**5** **6**	**6** **5**	**2**
12	**6**	**6**	**1**

Тогда искомая вероятность события {выпало k очков} равна $P(X = k) = \dfrac{m(k)}{M}$

Теперь можно построить ряд распределения случайной величины X

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Числовые характеристики $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$ предлагаю подсчитать самостоятельно по формулам (1), (3) и (4).

БЛОК 09. Задачи для самостоятельного решения.

09.1	Три стрелка, вероятности попадания которых равны 0.7, 0.8 и 0.9, одновременно стреляют в мишень. Построить ряд распределения ДСВ X “число пуль, попавших в мишень”. Вычислить $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.
09.2	Из колоды в 36 карт вытащили одновременно три карты. Построить ряд распределения ДСВ X “количество карт пиковой масти среди трех вытащенных”. Вычислить $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.
09.3	Дискретная случайная величина X принимает три значения 1, 2 и 3. Вероятность, что X примет первое значение в три раза меньше, чем второе, а второе – в два раза меньше, чем третье. Известно, что $M(X)$=2.5 и $D(X)$ =0.45. Построить ряд распределения X.

БЛОК 10. Задачи для самостоятельного решения.

10.1	Три стрелка, вероятности попадания которых равны 0.7, 0.8 и 0.9, одновременно стреляют в мишень. Построить ряд распределения ДСВ X “число пуль, попавших в мишень”. Вычислить $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.
10.2	Из колоды в 36 карт вытащили одновременно три карты. Построить ряд распределения ДСВ X “количество карт пиковой масти среди трех вытащенных”. Вычислить $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.
10.3	Дискретная случайная величина X принимает три значения 1, 2 и 3. Вероятность, что X примет первое значение в три раза меньше, чем второе, а второе – в два раза меньше, чем третье. Известно, что $M(X)$=2.5 и $D(X)$ =0.45. Построить ряд распределения X.
10.1	Бросают две игральные кости. Построить ряд распределения ДСВ X “разность очков, выпавших на верхних гранях”. Вычислить $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.

10.2	Бросают две игральные кости. Построить ряд распределения ДСВ ***X*** “максимальное из чисел, выпавших на верхних гранях”. Вычислить $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.

Задача 11

Бросили 3 игральных кубика. Построить ряд распределения ДСВ ***X*** “число выпавших шестерок”. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение.

Решение.

Это распределение Бернулли, вероятность успеха (выпала шестерка) при бросании одного кубика равна $p=1/6$, поэтому $q=1-p=5/6$, число испытаний $n=3$. Наша случайная величина ***X*** может принимать любое значение от $k=0$ до $k=3$. Тогда по формуле Бернулли

$$P(X=0)=P_3(0)=C_3^0\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^{3-0}=\frac{125}{216}$$

$$P(X=1)=P_3(1)=C_3^1\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^{3-1}=\frac{75}{216}$$

$$P(X=2)=P_3(2)=C_3^2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^{3-2}=\frac{15}{216}$$

$$P(X=3)=P_3(0)=C_3^3\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^{3-3}=\frac{1}{216}$$

Таблица 4. Ряд распределения ДСВ ***X***

X	**0**	**1**	**2**	**3**
P	$\frac{125}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$

Математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение вычислим по формулам (6), (7), (8) при $n=3$ и $p=1/6$:

$$M(X)=np=3\times\frac{1}{6}=\frac{1}{2},$$

$$D(X)=npq=3\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{5}{12},$$

$$\sigma(X)=\sqrt{npq}=\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{15}}{6}.$$

Задача 12

В урне лежат три черных шара и четыре белых. Шары достают по одному, пока не появится белый шар. Построить ряд распределения ***X*** “число извлеченных шаров”. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение.

Решение.

Случайная величина ***X*** принимает значения от **1** (сразу извлекли белый шар) до **4** (три раза подряд извлекли черный шар, и только четвертый шар – белый. Найдем вероятности случайных событий {***X***=***k***}, где ***k*** принимает значения 1,2,3,4.

Введем случайные события $A_i = \{i\text{-ый извлеченный шар - белый}\}$, $i = 1,2,3,4$. События A_i -зависимые, поскольку после каждого извлеченного шара "обстановка" в урне меняется.

$$P(X=1) = P(A_1) = \frac{4}{4+3} = \frac{4}{7}$$

(всего в урне 7 шаров, из них четыре белых)

$$P(X=2) = P(\overline{A}_1 A_2) = P(\overline{A}_1) P_{\overline{A}_1}(A_2) = \frac{3}{7} \times \frac{4}{6} = \frac{2}{7}$$

(сначала извлекли черный шар, в урне осталось четыре белых и два черных шара, всего шесть)

$$P(X=3) = P(\overline{A}_1 \overline{A}_2 A_3) = P(\overline{A}_1) P_{\overline{A}_1}(\overline{A}_2) P_{\overline{A}_1 \overline{A}_2}(A_3) = \frac{3}{7} \times \frac{2}{6} \times \frac{4}{5} = \frac{4}{35}$$

$$P(X=4) = P(\overline{A}_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3) = P(\overline{A}_1) P_{\overline{A}_1}(\overline{A}_2) P_{\overline{A}_1 \overline{A}_2}(\overline{A}_3) = \frac{3}{7} \times \frac{2}{6} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{35}$$

Ряд распределения ДСВ ***X***

X	**1**	**2**	**3**	**4**
P	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{35}$	$\frac{1}{35}$

Предлагаю убедиться, что сумма чисел во второй строке равна 1, а также самостоятельно посчитать математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение по формулам (1), (3) и (4).

БЛОК 11. Задачи для самостоятельного решения.

11.01	В ящике находятся 4 бракованные детали и 10 годных. Детали извлекают по одной, пока не появится годная деталь. Построить ряд распределения ***X*** "число оставшихся в ящике деталей". Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение.
11.02	Случайная величина ***X*** принимает два значения, причем первое с вероятностью вдвое большей, чем второе. Известно, что $M(X)=5$ и $\sigma(X)=2\sqrt{2}$. Построить ряд распределения ***X***
11.03	Бросили пять монет. Построить ряд распределения ***X*** "число выпавших гербов". Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение.
11.04	Провели 625 одинаковых испытаний. Оказалось, что среднее квадратичное отклонение равно 10. Какова вероятность наступления события в одном испытании?
11.05	Провели 200 одинаковых испытаний. При какой вероятности наступления события в одном испытании математическое ожидание окажется в 10 раз больше среднего квадратичного отклонения?

БЛОК 12. Одна задача для самостоятельного решения.

Независимые случайные величины ***X*** и ***Y*** заданы своими рядами распределения.

X	**1**	**2**	**3**
P	0.4	0.1	0.5

Y	**–2**	**–1**
P	0.6	0.4

1. Построить ряд распределения ДСВ ***Z*=*X*–*Y***

2. Вычислить *M*(***Z***), *D*(***Z***).

3. Убедиться, что

$M(Z)=M(X)-M(Y)$

$D(Z)=D(X)+D(Y)$

Непрерывные случайные величины

ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Выполним виртуальный эксперимент: бросаем точку *C* в квадрат [0,1]×[0,1]. Рассмотрим случайное событие *A*={*C* попала в центр квадрата}. Какова вероятность события *A*? Следуя классическому определению вероятности, мы должны найти натуральное число *n* точек в квадрате, тогда

$$P(A)=\frac{1}{n}. \tag{1}$$

Увы, найти *n* нельзя, поскольку множество натуральных чисел *N* невозможно однозначно отобразить на ни множество точек любого отрезка (последнее – так называемое “несчетное множество”), ни, тем более, на множество точек квадрата. Даже если формально мы в равенстве (1) перейдем к пределу при $n\to\infty$, то получим противоречие:

$$P(A)\to 0.$$

Иными словами, попасть в центр квадрата невозможно! Хотя каждый понимает, что это заключение неверно.

Казалось бы, что “выход” из такой ситуации мы нашли, когда изучали тему “*Геометрическая вероятность*”: вероятность определялась отношением двух площадей (меньшей к большей), тогда

$$P(A)=\frac{\text{площадь точки}}{\text{площадь квадрата}}.$$

Знаменатель этой дроби равен 1, а чему равна “площадь точки”? Нулю или не нулю?

Опять тупик? Ни классическое определение вероятности, ни геометрический подход нам не позволяют разрешить найденное “противоречие”. Но решение есть, следует аксиоматически ввести понятие “вероятность” для случайных величин, которые могут принимать любое значение на некотором интервале (в том числе и бесконечном), в области на плоскости и т.д.

ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

I. Рассмотрим непрерывную случайную величину (НСВ) X, которая принимает значения, лежащие в заданном интервале на вещественной прямой. Ее распределение на этом интервале опишем с помощью ***непрерывной кусочно-дифференцируемой*** функции

$$F(x)=P(X<x). \tag{2}$$

Из определения (2) следует ряд свойств, которыми обладает ***функция распределения*** F (приводятся без доказательства):

- F - неубывающая (3)

- $0 \le F(x) \le 1$ (4)
- $P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$ (5)
- если $X \in [a,b]$, то $F(x) = 0$ при $x \le a$ и $F(x) = 1$ при $x \ge b$ (6)
- если $X \in (-\infty, \infty)$, то $F(x) = 0$ при $x \to -\infty$ и $F(x) = 1$ при $x \to \infty$ (7)

Задача 13

Задана функция распределения непрерывной случайной величины $X \in (-\infty, \infty)$

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan x .$$

Убедиться, что выполнены условия (3) и (7). Найти вероятность, что в результате испытания X попадет в интервал $[1, \sqrt{3}]$.

Решение.

*Найдем производную

$$F'(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2} .$$

Очевидно, что $F'(x) > 0$, поэтому F - возрастающая функция.

* Найдем $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan x\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\lim\limits_{x\to\infty}(\arctan x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\times\frac{\pi}{2} = 1$

Первое условие (7) предлагаю поверить самим.

* По формуле (5)

$$P(1 < X < \sqrt{3}) = F(\sqrt{3}) - F(1) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan\sqrt{3}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan 1\right) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\times\frac{\pi}{3}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\times\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{12} .$$

Задача 14.

Функция распределения НСВ $X \in [1,4]$ задана в виде $F(x) = Ax + B$. Найти значения A и B. Найти вероятность, что в результате испытания X окажется в интервале $[-7,3]$.

Решение.

* Из свойства (6) следует, что

$$F(1) = 0,\ F(4) = 1,$$

тогда

$$\begin{cases} A\times 1 + B = 0 \\ A\times 4 + B = 1 \end{cases}.$$

Решив эту систему уравнений, найдем: $A = \frac{1}{3}$, $B = -\frac{1}{3}$. Таким образом, функция распределения имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \frac{1}{3}x - \frac{1}{3} & 1 \le x \le 4 \\ 1 & x > 4 \end{cases}.$$

* Теперь

$$P(-7 < X < 3) = F(3) - F(-7) = \left(\frac{1}{3}\times 3 - \frac{1}{3}\right) - 0 = \frac{2}{3} .$$

II. Распределение непрерывной случайной величины можно задать другой функцией, которая называется “***плотность распределения***” и выражается формулой

$$f(x) = F'(x), \tag{8}$$

поэтому f еще называют ***дифференциальной функций распределения***, а F ***- интегральной функций распределения*** НСВ.

Из свойств (3)-(7) функции F можно вывести и свойства f (приводятся также без доказательства):

- $f \geq 0$ (9)
- $P(x_1 < X < x_2) = \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)dx$ (10)
- если $X \in [a,b]$, то $\int\limits_a^b f(x)dx = 1$ (11)
- если $X \in (-\infty, \infty)$, то $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ (12)

Вероятностный смысл плотности распределения НСВ. Если “размерность” интегральной функции F прозрачна – это вероятность, какова “размерность” плотности распределения? Иными словами, что такое “производная от вероятности”?

Из (8) и определения производной следует

$$f(x) = F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} \approx (\textit{выберем малое значение } \Delta x) \approx \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x},$$

тогда, учитывая свойство (5),

$$F(x+\Delta x) - F(x) = P(x < X < x+\Delta x) \approx f(x)\Delta x.$$

Это означает, что вероятность попадания НСВ в маленький интервал можно найти, умножив значение плотности НСВ на длину этого интервала.

Определение интегральной функции распределения НСВ по дифференциальной функции распределения. Пусть для НСВ, заданной на интервале $[a,b]$, известна плотность распределения f, нужно найти интегральную функцию распределения. Проинтегрируем равенство (8) в пределах от a до текущей переменной x, тогда

$$\int\limits_a^x f(t)dt = \int\limits_a^x F'(t)dt = F(x) - F(a) = (\textit{но } F(a) = 0 \textit{ по свойству } (6)) = F(x). \tag{13}$$

Значит, интегральная функция распределения имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \int\limits_a^x f(t)dt & a \leq x \leq b \\ 1 & x > b \end{cases} \tag{14}$$

Задача 15.

Пусть на отрезке $[2,4]$ задана дифференциальная функция распределения НСВ X $f(x) = Cx^3$. Найти значение C, интегральную функцию распределения и вероятность попадания X в интервал $[3,3.2]$.

Решение.

* По условию (11)

$$1 = \int\limits_2^4 f(x)dx = \int\limits_2^4 Cx^3 dx = C\left.\frac{x^4}{4}\right|_2^4 = C\left(\frac{4^4}{4} - \frac{2^4}{4}\right) = C\left(\frac{256}{4} - \frac{16}{4}\right) = 60C, \text{ откуда } C = \frac{1}{60} \text{ и } f(x) = \frac{x^3}{60}.$$

* По формуле (13)

$$F(x) = \int\limits_2^x f(t)dt = \frac{1}{60}\int\limits_2^x t^3 dt = \frac{1}{60}\left.\frac{t^4}{4}\right|_2^x = \frac{1}{60}\left(\frac{x^4}{4} - \frac{2^4}{4}\right) = \frac{x^4 - 16}{240},$$

тогда по (14) интегральная функция распределения имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 2 \\ \dfrac{x^4 - 16}{240} & 2 \leq x \leq 4 \\ 1 & x > 4 \end{cases} \tag{15}$$

* По формуле (5) с учетом (15)

$$P(3<X<3.2)=F(3.2)-F(3)=\frac{3.2^4-16}{240}-\frac{3^4-16}{240}\approx 0.0994.$$

БЛОК 13. Задачи для самостоятельного решения.

13.01	Интегральная функция распределения НСВ $X\in[2,5]$ задана в виде $F(x)=Ax^2+B$. Найти: значения A и B; вероятность, что в результате испытания X окажется в интервале $[3,4]$.
13.02	НСВ X определена на интервале $[0,3]$. Интегральная функция распределения имеет вид $F(x)=Ax^2+Bx+C$. Известно, что $F(1)=1/6$. Найти: значения A, B и C; вероятность, что в результате испытания X окажется в интервале $[1.5,2.5]$.
13.03	НСВ X определена на отрезке $[1,4]$ дифференциальной функцией распределения $f(x)=C\sqrt{x}$. Найти: значение C; интегральную функцию распределения; $P(1.44<X<3.24)$.

ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕПРЕРЫВНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Так же, как и для дискретной случайной величины, можно рассматривать числовые характеристики непрерывной случайной величины X, заданной на некотором интервале $[a,b]$ (конечном или бесконечном), а именно: математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратичное отклонение $\sigma(X)$, которые вычисляются по формулам:

$$M(X)=\int_a^b xf(x)dx; \tag{16}$$

$$D(X)=\int_a^b [x-M(X)]^2 f(x)dx; \tag{17}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}, \tag{18}$$

где f - дифференциальная функция распределения X.

Из (17) несложными преобразованиями можно получить “*вторую формулу для дисперсии*”

$$D(X)=\int_a^b x^2 f(x)dx-[M(X)]^2. \tag{19}$$

Равномерно распределенная случайная величина

Пусть U - НСВ, равномерно распределена на отрезке $[a,b]$, т.е. вероятность попадания U в любой интервал длины $l<b-a$ одинаков. Это значит, что плотность распределения U на $[a,b]$ постоянна: $f(x)=C$. Найдем C. По формуле (1)

$$1=\int_a^b f(x)dx=\int_a^b Cdx=Cx\Big|_a^b=C(b-a),\ \text{тогда}\ C=\frac{1}{b-a}\ \text{и}\ f(x)=\frac{1}{b-a}.$$

Интегральная функция распределения по (14)

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<a\\ \int\limits_a^x f(t)dt & a\le x\le b\\ 1 & x>b\end{cases} \qquad \text{или} \qquad F(x)=\begin{cases}0 & x<a\\ \dfrac{x-a}{b-a} & a\le x\le b\\ 1 & x>b\end{cases}.$$

Вычислим:

математическое ожидание по формуле (1)

$$M(X)=\int\limits_a^b xf(x)dx=\int\limits_a^b x\frac{1}{b-a}dx=\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b xdx=\frac{1}{b-a}\frac{x^2}{2}\bigg|_a^b=\frac{1}{b-a}\left(\frac{b^2}{2}-\frac{a^2}{2}\right)=\frac{b^2-a^2}{2(b-a)}=\frac{b+a}{2};$$

дисперсию по формуле (4)

$$D(X)=\int\limits_a^b x^2f(x)dx-[M(X)]^2=\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b x^2dx-\left[\frac{b+a}{2}\right]^2=\frac{1}{b-a}\frac{x^3}{3}\bigg|_a^b-\frac{(b+a)^2}{4}=$$

$$=\frac{1}{b-a}\left(\frac{b^3}{3}-\frac{a^3}{3}\right)-\frac{(b+a)^2}{4}=\frac{b^3-a^3}{3(b-a)}-\frac{b^2+2ba+a^2}{4}=\frac{b^2+ba+a^2}{3}-\frac{b^2+2ba+a^2}{4}=\frac{(b-a)^2}{12};$$

среднее квадратичное отклонение по (3)

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

Задача 16.

Непрерывная случайная величина X задана на интервале $[1,3]$ интегральной функцией распределения $F(x)=Ax^3+B$. Найти A, B, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $P(2<X<2.5)$.

Решение.

* По свойствам (6)

$$\begin{cases}A\times1^3+B=0\\ A\times3^3+B=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}B=-A\\ 27A+B=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}B=-A\\ 26A=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}B=-1/26\\ A=1/26\end{cases}.$$

* Учитывая свойства F (6), получим

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<1\\ \dfrac{x^3-1}{26} & 1\le x\le 3\\ 1 & x>3\end{cases} \quad\Rightarrow\quad f(x)=F'(x)=\begin{cases}0 & x<1\\ \dfrac{3x^2}{26} & 1\le x\le 3\\ 0 & x>3\end{cases}.$$

* По формуле (1) с учетом найденной плотности f

$$M(X)=\int\limits_1^3 x\times\frac{3x^2}{26}dx=\frac{3}{26}\int\limits_1^3 x^3dx=\frac{3}{26}\frac{x^4}{4}\bigg|_1^3=\frac{3}{26}\frac{3^4-1^4}{4}=\frac{3}{26}\times20=\frac{30}{13}.$$

* По формуле (4) с учетом найденных плотности f и математического ожидания

$$D(X)=\int\limits_1^3 x^2f(x)dx-[M(X)]^2=\int\limits_1^3 x^2\times\frac{3x^2}{26}dx-\left(\frac{30}{13}\right)^2=\frac{3}{26}\int\limits_1^3 x^4dx-\frac{900}{169}=$$

$$=\frac{3}{26}\frac{x^5}{5}\bigg|_1^3-\frac{900}{169}=\frac{3}{26}\frac{3^5-1^5}{5}-\frac{900}{169}=\frac{363}{65}-\frac{900}{169}=\frac{219}{845}.$$

* По формуле (3)

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\frac{\sqrt{219}}{13\sqrt{5}}.$$

* По формуле (5)

$$P(2<X<2.5)=F(2.5)-F(2)=\frac{2.5^3-1}{26}-\frac{2^3-1}{26}\approx 0.293.$$

Задача 17.

Непрерывная случайная величина X задана на интервале $[0,8]$ дифференциальной функцией распределения $f(x)=C\sqrt[3]{x}$. Найти C, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $P(1<X<1.331)$.

Решение.

* По свойству (11)

$$1=\int_0^8 f(x)dx=\int_0^8 Cx^{\frac{1}{3}}dx=C\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\Big|_0^8=C\frac{3}{4}\left(8^{\frac{4}{3}}-0^{\frac{4}{3}}\right)=C\frac{3}{4}\times 16=12C,\ \text{откуда}\ C=\frac{1}{12}\ \text{и}\ f(x)=\frac{\sqrt[3]{x}}{12}.$$

* По формуле (13)

$$F(x)=\int_0^x f(t)dt=\frac{1}{12}\int_2^x t^{\frac{1}{3}}dt=\frac{1}{12}\frac{3}{4}t^{\frac{4}{3}}\Big|_0^x=\frac{x^{\frac{4}{3}}}{16},$$

тогда интегральная F и дифференциальная f функции распределения имеют вид

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \dfrac{x\sqrt[3]{x}}{16} & 0\le x\le 8\\ 1 & x>8\end{cases}\quad\Rightarrow\quad f(x)=F'(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \dfrac{\sqrt[3]{x}}{12} & 0\le x\le 8.\\ 0 & x>8\end{cases}$$

* По формуле (1) с учетом найденной плотности f

$$M(X)=\int_0^8 x\times\frac{x^{\frac{1}{3}}}{12}dx=\frac{1}{12}\int_1^3 x^{\frac{4}{3}}dx=\frac{1}{12}\times\frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}}\Big|_0^8=\frac{1}{28}\left(8^{\frac{7}{3}}-0^{\frac{7}{3}}\right)=\frac{1}{28}\times 128=\frac{32}{7}.$$

* По формуле (4) с учетом найденных плотности f и математического ожидания

$$D(X)=\int_0^8 x^2 f(x)dx-[M(X)]^2=\int_0^8 x^2\times\frac{x^{\frac{1}{3}}}{12}dx-\left[\frac{32}{7}\right]^2=\frac{1}{12}\int_0^8 x^{\frac{7}{3}}dx-\frac{1024}{49}=$$

$$=\frac{1}{12}\times\frac{3}{10}x^{\frac{10}{3}}\Big|_0^8-\frac{1024}{49}=\frac{1}{40}\left(8^{\frac{10}{3}}-0^{\frac{10}{3}}\right)-\frac{1024}{49}=\frac{128}{5}-\frac{1024}{49}=\frac{1152}{245}.$$

* По формуле (3)

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{\frac{1152}{245}}=\frac{24\sqrt{10}}{35}.$$

* По формуле (5)

$$P(1< X <1.331) = F(1.331) - F(1) = \frac{1.331\sqrt[3]{1.331}}{16} - \frac{1\sqrt[3]{1}}{16} \approx 0.029.$$

БЛОК 14. Задачи для самостоятельного решения.

14.01	НСВ X определена на отрезке $[4,9]$ интегральной функцией распределения $F(x) = A\sqrt{x} + B$. Найти: значения A и B; дифференциальную функцию распределения; $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $P(6.25< X <8.41)$.
14.02	Интегральная функция распределения НСВ X, определенной на интервале $[0,5]$, имеет вид $F(x) = Ax$. Найти A и построить интегральную функцию распределения случайной величины $Y = 2X + 3$.
14.03	НСВ X определена на отрезке $[-8,-1]$ дифференциальной функцией распределения $f(x) = C\sqrt[3]{x}$. Найти: значение C; интегральную функцию распределения; $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $P(-3.375< X <-1.728)$.

Нормально распределенные случайные величины

Особое место среди непрерывных случайных величин занимают ***нормально распределенные случайные величины***. Их плотность задается формулой

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \tag{1}$$

где x изменяется на всей числовой оси, a - математическое ожидание, σ^2 - дисперсия (σ-среднее квадратичное отклонение). Свойства функции f при $a = 0$ и $\sigma = 1$ рассмотрены в разделе курса, в котором изучалась формула Муавра-Лапласа (это функция φ из Таблицы 1). Часто распределение, заданное (1), называют *распределением Гаусса*.

Используя общие свойства функций распределения НСВ и (1), выведем формулу для вычисления вероятности попадания нормально распределенной случайные величины G, в заданный интервал (α, β). По формуле (10) (файл **М07_Непрерывные случайные величины**)

$$P(\alpha < G < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx,$$

где функция f определена (1). В этом интеграле сделаем замену переменной

$$t = \frac{x-a}{\sigma} \Rightarrow x = a + \sigma t \Rightarrow dx = \sigma dt,$$

тогда

$$P(\alpha<G<\beta)=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^{\frac{\beta-a}{\sigma}}e^{-\frac{t^2}{2}}\sigma dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^{\frac{\beta-a}{\sigma}}e^{-\frac{t^2}{2}}dx=$$

$$=(\textit{по свойству определенных интегралов})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{\frac{\beta-a}{\sigma}}e^{-\frac{t^2}{2}}dx-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{\frac{\alpha-a}{\sigma}}e^{-\frac{t^2}{2}}dx=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right), \quad (2)$$

где Φ функция уже известная нам интегральная функция Лапласа (ее значения - в Таблице 2).

Теперь выведем формулу для вычисления случайного события “ нормально распределенная случайная величина G отклонилась от своего математического ожидания меньше, чем на заданную величину δ” $\{|G-a|<\delta\}$. Неравенство с модулем можно записать в виде двойного неравенства

$$a-\delta<G<a+\delta.$$

Теперь можно воспользоваться формулой (2), положив в ней $\alpha=a-\delta$, $\beta=a+\delta$

$$P(|G-a|<\delta)=\Phi\left(\frac{a+\delta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-\delta-a}{\sigma}\right)=\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)-\Phi\left(-\frac{\delta}{\sigma}\right)=(\Phi-\textit{нечетная функция})=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right). \quad (3)$$

В последней формуле положим $\delta=3\sigma$, тогда

$$P(|G-a|<3\sigma)=2\Phi\left(\frac{3\sigma}{\sigma}\right)=2\Phi(3)=2\times0.4987=0.9974,$$

т.е. нормально распределенная случайная величина попадает в интервал $(a-3\sigma, a+3\sigma)$ “почти наверняка” (до достоверного события “не хватает” 0.026). Полученный результат называется “***правило трех сигм***”.

Задача 18

Нормально распределенная случайная величина G имеет плотность $f(x)=\frac{1}{\sqrt{50\pi}}e^{-0.02x^2}$. Найти вероятность, что в результате испытания G: попадет в интервал $(-5,10)$; отклонится от своего математического ожидания менее, чем на 2.5.

Решение.

* Из сравнения формулы для плотности с (1) следует, что $a=0$, а

$$\frac{1}{2\sigma^2}=0.02, \text{ тогда } \sigma=5.$$

* По формуле (2)

$$P(-5<G<10)=\Phi\left(\frac{10-0}{5}\right)-\Phi\left(\frac{-5-0}{5}\right)=\Phi(2)-\Phi(-1)=\Phi(2)+\Phi(1)=0.4772+0.3413=0.8185$$

* По формуле (3)

$$P(|G-0|<2.5)=2\Phi\left(\frac{2.5}{5}\right)=2\Phi(0.5)=2\times0.1915=0.3830$$

Задача 19

Для нормально распределенной случайной величины G известно, что $M(G) = -8$, а $M(G^2) = 80$. Найти вероятность, что в результате испытания G: попадет в интервал $(-14,-10)$; отклонится от своего математического ожидания менее, чем на 1.

Решение.

* Найдем дисперсию по “второй формуле” $D(G) = M(G^2) - [M(G)]^2 = 80 - (-8)^2 = 16$, тогда

$$\sigma = \sqrt{D(G)} = \sqrt{16} = 4.$$

* По формуле (2)

$$P(-14 < G < -10) = \Phi\left(\frac{-10-(-8)}{4}\right) - \Phi\left(\frac{-14-(-8)}{4}\right) = \Phi(-0.5) - \Phi(-1.5) = \Phi(1.5) - \Phi(0.5) = 0.4332 + 0.1915 = 0.6247$$

* По формуле (3)

$$P(|G-(-8)| < 2) = 2\Phi\left(\frac{1}{4}\right) = 2\Phi(0.25) = 2\times 0.0987 = 0.1974$$

Задача 20

В результате испытания нормально распределенная случайная величина G, у которой $M(G) = 3$ попадает в интервал $(-1,7)$ с вероятностью 0.383. В какой вероятностью G: попадет в интервал $(-13,-5)$; отклонится от своего математического ожидания менее, чем на 12.

Решение.

* По условию задачи $P(-1 < G < 7) = 0.383$, тогда по формуле (2)

$$0.383 = P(-1 < G < 7) = \Phi\left(\frac{7-3}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-1-3}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{4}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{4}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{4}{\sigma}\right),$$

откуда

$$\Phi\left(\frac{4}{\sigma}\right) = 0.1915 \Rightarrow (\textit{по Таблице} 2) \Rightarrow \frac{4}{\sigma} = 0.5 \Rightarrow \sigma = 8$$

* Теперь среднее квадратичное отклонение σ известно и по формуле (2)

$$P(-13 < G < -5) = \Phi\left(\frac{-5-3}{4}\right) - \Phi\left(\frac{-13-3}{4}\right) = \Phi(-1) - \Phi(-2) = \Phi(2) - \Phi(1) = 0.4772 - 0.3413 = 0.1359$$

* По формуле (3)

$$P(|G-3| < 12) = 2\Phi\left(\frac{12}{4}\right) = 2\Phi(3) = 2\times 0.4987 = 0.9974.$$

БЛОК 15. Задачи для самостоятельного решения.

15.01	Для нормально распределенной случайной величины G известно, что $M(G) = 12$, а $M(G^2) = 169$. Найти вероятность, что в результате испытания G: попадет в интервал $(17,22)$; отклонится от своего математического ожидания менее, чем на 3.

15.03	Для нормально распределенной случайной величины G известно, что $M(G)=4$, а $M(G^2)=25$. Найти вероятность, что в результате испытания нормально распределенная случайная величина $X=2G+1$: попадет в интервал $(2,20)$; отклонится от своего математического ожидания менее, чем на 9.
15.03	В результате испытания нормально распределенная случайная величина G, у которой $M(G)=-5$, попадает в интервал $(-9,-1)$ с вероятностью 0.9544. В какой вероятностью G: попадет в интервал $(-7,1)$; отклонится от своего математического ожидания менее, чем на 3.

ПРОВЕРКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ

Одна из задач статистического исследования – проверка гипотез о законе распределения исследуемой генеральной совокупности (ГС), из которой извлечена выборочная совокупность (выборка), а также о значениях характеристик этой ГС (среднего генеральной совокупности $\bar{x}_Г$ и/или дисперсии $D_Г$).

Для этого будут рассмотрены соответствующие способы (их можно назвать “рецептами”), основанные на теоретическом анализе поведения различных функций F, аргументы которых – элементы выборки. Если выборка извлечена из ГС с известным статистическим распределением, то значения этой функции удовлетворяют (в вероятностном смысле) определенным соотношениям или закономерностям. Очевидно, что и исследуемых выборок (как и ГС), и используемых функций F может быть несколько.

В чем же состоит “рецепт”? Элементы какой-либо выборки $\{x_i\}_{i=1,...,n}$ (n-ее объем) подставляются в функцию F, вычисляется наблюдаемое значение $F_{набл}=F(x_1,...,x_n)$. Находится (обычно по таблице) критическое значение $F_{крит}$, заранее вычисленное по выборке (выборкам) известного объема, извлеченной из ГС с известным распределением. Сравнивается $F_{набл}$ с $F_{крит}$ и делается вывод о справедливости принятой гипотезы или предположения о значениях числовых характеристик ГС, из которой извлечена выборка $\{x_i\}$.

В задачи нашего курса не входит доказательство этих “рецептов” (необходимо только научиться их использовать на практике), поэтому мы просто будем последовательно рассматривать применение различных рецептов.

Напомним несколько формул для расчета числовых характеристик выборки $\{x_i\}_{i=1,...,n}$.

Среднее выборочное

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{1}$$

Выборочная дисперсия

$$D_x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \tag{2}$$

"Исправленная" выборочная дисперсия

$$D_x = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \tag{2′}$$

"Вторая формула" для ***выборочной дисперсии***

$$D_x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\bar{x})^2 \tag{3}$$

Выборочное среднее квадратичное отклонение - вычисляется по D_x, найденной по формуле (2) или (2′)

$$s_x = \sqrt{D_x} \tag{4}$$

Если есть вторая выборка $\{y_i\}_{i=1,\dots,n}$ того же объема, то ***выборочный корреляционный момент***

$$\mu_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \tag{5}$$

"Вторая формула" для ***выборочного корреляционного момента***

$$\mu_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{x}\,\bar{y}\,, \tag{6}$$

заметим, что $\mu_{xx} = D_x$.

Выборочный коэффициент корреляции

$$r_{xy} = \frac{\mu_{xy}}{s_x s_y} \tag{7}$$

Свойства r_{xy}: $|r_{xy}| \le 1$: $r_{xx} = 1$.

Т5. "Сравнение двух дисперсий нормально распределенных генеральных совокупностей".

Пусть из разных генеральных совокупностей X и Y, распределенных по нормальному закону, извлекли выборки $\{x_i\}$ (объем n_1) и $\{y_j\}$ (объем n_2), по которым нашли исправленные дисперсии D_x и D_y (пусть для определенности $D_y < D_x$). Необходимо сравнить дисперсии генеральных совокупностей D_X и D_Y на уровне значимости α.

РЕЦЕПТ

Проверим гипотезу H_0: $D_X = D_Y$.

Для этого:

1) вычислим отношение большей выборочной дисперсии к меньшей

$$F_{набл} = \frac{D_x}{D_y};$$

2) по Таблице критических точек Фишера-Снедекора (**Таблица 3**) при заданном уровне значимости и числе степеней свободы $k_1 = n_1 - 1$, $k_2 = n_2 - 1$ найдем критическое значение $F_{крит} = F(\alpha, k_1, k_2)$;

3) сравниваем $F_{набл}$ с $F_{крит}$, тогда

если $F_{набл} < F_{крит}$, то нет оснований отвергать гипотезу H_0,

если $F_{набл} > F_{крит}$, то гипотеза H_0 отвергается.

Пример реализации РЕЦЕПТА

Пусть по двум независимым выборкам $\{x_i\}$ (объем n_1=12) и $\{y_j\}$ (объем n_2=15), извлеченным из нормальных ГС, вычислили по формуле (2′) исправленные дисперсии D_x=1.86 и D_y=0.95. Проверить гипотезу H_0: $D_X = D_Y$ на уровне значимости α=0.05

Решение.

1) вычислим:

$$F_{набл} = \frac{D_x}{D_y} = \frac{1.86}{0.95} \approx 1.96$$

и число степеней свободы

$$k_1 = n_1 - 1 = 12 - 1 = 11,$$

$$k_2 = n_2 - 1 = 15 - 1 = 14;$$

2) по **Таблице 3** найдем

$$F_{крит} = F(\alpha, k_1, k_2) = F(0.05, 11, 14) = 2.56;$$

3) сравним

1.96 < 2.56 ($F_{набл} < F_{крит}$) $\Rightarrow$ *нет оснований отвергать гипотезу* H_0.

Задача на тему Т5 для самостоятельного решения.

Р5	Заданы две независимые выборки $\{x_i\}$ = {773; 815; 843; 861; 877; 889; 885; 903; 911; 919; 929; 941;981} $\{y_j\}$ = {792; 827; 854;869; 886; 892; 901; 905; 918; 923; 937; 955} извлеченные из нормальных Генеральная совокупность X и Y. На уровне значимости α =0.05 проверить гипотезу H_0: $D_X = D_Y$

Т6. “Сравнение исправленной выборочной дисперсии с гипотетической генеральной дисперсией нормальной совокупности”.

Пусть из генеральной совокупности X, распределенной по нормальному закону, извлекли выборку $\{x_i\}$ объема n, по которой нашли исправленную дисперсию D_x. Необходимо на уровне значимости α проверить гипотезу $D_x = D_X$, где D_X - гипотетическая (*точно не известная, предполагаемая*) дисперсия генеральной совокупности.

РЕЦЕПТ

Проверим гипотезу H_0: $D_x = D_X$

Для этого:

1) вычислим наблюдаемое значение критерия

$$\chi^2_{набл} = \frac{(n-1)D_x}{D_X};$$

2) по Таблице критических точек распределения χ^2 (**Таблица 4**) при заданном уровне значимости и числе степеней свободы $k = n-1$ найдем критическое значение $\chi^2_{крит} = \chi^2_{крит}(\alpha, k)$;

3) сравниваем $\chi^2_{набл}$ с $\chi^2_{крит}$, тогда

если $\chi^2_{набл} < \chi^2_{крит}$, то нет оснований отвергать гипотезу H_0,

если $\chi^2_{набл} > \chi^2_{крит}$, то гипотеза H_0 отвергается.

Пример реализации РЕЦЕПТА

Пусть по выборке $\{x_i\}$ (объем n=25), извлеченной из нормальной генеральной совокупности X, вычислили по формуле (2′) исправленную дисперсию D_x=18.3. Необходимо проверить гипотезу H_0: $D_x = D_X$ на уровне значимости α=0.01, если гипотетическая дисперсия ГС D_X=20.

Решение.

1) вычислим:

$$\chi^2_{набл} = \frac{(n-1)D_x}{D_X} = \frac{(25-1)\times 18.3}{20} = 21.96$$

и число степеней свободы

$$k = n-1 = 25-1 = 24;$$

2) по **Таблице 4** найдем

$$\chi^2_{крит} = \chi^2_{крит}(\alpha, k) = \chi^2_{крит}(0.01{,}24) = 43;$$

3) сравним

$21.96 < 43$ ($\chi^2_{набл} < \chi^2_{крит}$) $\Rightarrow$ *нет оснований отвергать гипотезу* H_0.

Задача на тему Т6 для самостоятельного решения.

Р6	Задана выборка $\{x_i\}$={11, 12, 9, 11, 12, 10, 11, 9, 12, 11, 10, 9, 8, 11, 10, 11, 13, 8, 10, 11, 9, 12, 8, 11, 10}, извлеченная из нормальной ГС X. На уровне значимости α=0.05 проверить гипотезу H_0: D_X=1.4

Т7. "Сравнение двух средних генеральных совокупностей, дисперсии которых известны (большие независимые выборки)".

Пусть из разных генеральных совокупностей X и Y (безразлично как распределенных) извлекли выборки $\{x_i\}$ (объем n_1>30) и $\{y_j\}$ (объем n_2>30), по которым нашли средние $\bar{x}$ и $\bar{y}$. Генеральные дисперсии D_X и D_Y известны. Необходимо сравнить генеральные средние $\bar{x}_Г$ и $\bar{y}_Г$ на уровне значимости α.

РЕЦЕПТ

Проверим гипотезу H_0: $\bar{x}_Г = \bar{y}_Г$. Для этого:

1) вычислим наблюдаемое значение критерия

$$Z_{набл} = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{D_X}{n_1} + \frac{D_Y}{n_2}}};$$

2) по таблице значений интегральной функции Лапласа Φ (**Таблица 2**) найдем критическое значение $Z_{крит}$ из условия

$$\Phi(Z_{крит}) = \frac{1-\alpha}{2};$$

3) сравниваем $|Z_{набл}|$ с $Z_{крит}$, тогда

если $|Z_{набл}| < Z_{крит}$, то нет оснований отвергать гипотезу H_0,

если $|Z_{набл}| > Z_{крит}$, то гипотеза H_0 отвергается.

Пример реализации РЕЦЕПТА

Пусть из разных генеральных совокупностей X и Y извлекли выборки $\{x_i\}$ (объем $n_1 = 35$) и $\{y_j\}$ (объем $n_2 = 40$), по которым нашли средние выборочные $\bar{x} = 120$ и $\bar{y} = 125$. Дисперсии генеральных совокупностей известны $D_X = 90$ и $D_Y = 110$. Необходимо сравнить генеральные средние $\bar{x}_Г$ и $\bar{y}_Г$ на уровне значимости $\alpha = 0.02$.

Решение.

Проверим гипотезу H_0: $\bar{x}_Г = \bar{y}_Г$, для этого:

1) вычислим:

$$Z_{набл} = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{D_X}{n_1} + \frac{D_Y}{n_2}}} = \frac{120 - 125}{\sqrt{\frac{90}{35} + \frac{110}{40}}} = -2.17;$$

2) по **Таблице 2** найдем значение $Z_{крит}$, при котором

$$\Phi(Z_{крит}) = \frac{1 - 0.02}{2} = 0.49 \quad \Rightarrow \quad Z_{крит} = 2.33;$$

3) сравним $|Z_{набл}| = 2.17$ и $Z_{крит}$

$2.17 < 2.33$ ($|Z_{набл}| < Z_{крит}$) $\Rightarrow$ *нет оснований отвергать гипотезу* H_0.

Задача на тему Т7 для самостоятельного решения.

Р7	Заданы выборки $\{x_i\}$={12,11,10,12,8,9,11,13,12,10,9,11,9,12,11,11,10,9,8,11,7,10,11,13,8,11,10,11,9,12,8,11,10,10,11,9,8}, $\{y_j\}$={10,13,9,11,10,8,12,12,13,11,8,10,8,11,10,12,8,7,9,10,8,11,12,12,7,10,9,10,9,13,8,12,9,11}, извлеченные из генеральных совокупностей X и Y. На уровне значимости α=0.04 проверить гипотезу H_0: $\bar{x}_Г = \bar{y}_Г$. В качестве известных генеральных дисперсий D_X и D_Y принять выборочные дисперсии D_x и D_y, рассчитанные по формуле (3).

Т8. “Сравнение выборочной средней с гипотетической генеральной средней нормальной совокупности”.

Пусть из генеральной совокупности X, распределенной по нормальному закону с известной дисперсией D_X, извлекли выборку $\{x_i\}$ объема n, по которой нашли выборочную среднюю $\bar{x}$. Необходимо на уровне значимости α проверить гипотезу $\bar{x} = x_0$ (где x_0 - гипотетическое значение неизвестной генеральной средней $\bar{x}_Г$).

РЕЦЕПТ

Проверим гипотезу H_0: $\bar{x} = x_0$. Для этого:

1) вычислим наблюдаемое значение критерия

$$U_{набл} = \frac{(\bar{x} - x_0)\sqrt{n}}{\sqrt{D_X}};$$

2) по таблице значений интегральной функции Лапласа Φ (**Таблица 2**) найдем критическое значение $U_{крит}$ из условия

$$\Phi(U_{крит}) = \frac{1-\alpha}{2};$$

3) сравниваем $|U_{набл}|$ с $U_{крит}$, тогда

если $|U_{набл}| < U_{крит}$, то нет оснований отвергать гипотезу H_0,

если $|U_{набл}| > U_{крит}$, то гипотеза H_0 отвергается.

Пример реализации РЕЦЕПТА

Из нормально распределенной генеральной совокупности X с дисперсией D_X=28, извлекли выборку $\{x_i\}$ объема $n = 200$, по которой нашли выборочную среднюю $\bar{x} = 12.4$. Необходимо на уровне значимости $\alpha = 0.06$ проверить гипотезу $\bar{x}$ =13.

Решение.

Проверим гипотезу H_0: $\bar{x}$ =13.

1) вычислим наблюдаемое значение критерия

$$U_{набл}=\frac{(12.4-13)\sqrt{200}}{\sqrt{28}}\approx -1.60\,;$$

2) по таблице значений интегральной функции Лапласа Φ (**Таблица 2**) найдем критическое значение $U_{крит}$ из условия

$$\Phi(U_{крит})=\frac{1-0.06}{2}=0.47 \quad\Rightarrow\quad U_{крит}=1.88;$$

3) сравниваем $|U_{набл}|$=1.60 с $U_{крит}$, тогда

1.60 < 1.88 ($|U_{набл}|<U_{крит}$) $\Rightarrow$ *нет оснований отвергать гипотезу* H_0.

Задача на тему Т8 для самостоятельного решения.

P8	Задана выборка $\{x_i\}$={22,21,20,22,18,19,21,23,22,20,19,21,19,22,21,21,20,19,18,21,17,20,21,23,18,21,20,21,19,22,18,20}, извлеченная из нормально распределенной генеральной совокупности *X*. На уровне значимости α=0.02 проверить гипотезу H_0: $\bar{x}$=21. В качестве известной генеральной дисперсии D_X принять исправленную выборочную дисперсию D_x, рассчитанную по формуле (2′).

Т9. “Проверка гипотезы о статистической значимости выборочного коэффициента корреляции”.

Пусть из двумерной генеральной совокупности (X,Y), распределенной по нормальному закону, извлекли выборку $\{x_i, y_i\}$ объема n, и рассчитали коэффициент корреляции r_{xy} по формулам (6) и (7). Необходимо оценить наличие связи между компонентами X и Y генеральной совокупности, иными словами – на принятом уровне значимости α проверить гипотезу H_0: r_{XY}=0. (r_{XY} - генеральный коэффициент корреляции).

Если эта гипотеза принимается, то X и Y некоррелированы (между ними отсутствует связь), если отвергается, то X и Y статистически связаны. Тесноту этой связи и характеризует величина r_{xy} : чем ближе $|r_{xy}|$ к единице, тем связь теснее. В “предельном” случае, если $|r_{xy}|$=1, то между X и Y существует линейная зависимость.

РЕЦЕПТ

Проверим гипотезу H_0: r_{XY}=0. Для этого:

1) вычислим наблюдаемое значение критерия

$$T_{набл} = \frac{r_{xy}\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_{xy}^2}};$$

2) по таблице критических точек распределения Стьюдента (**Таблица 5**) при уровне значимости α и числе степеней свободы $k = n-2$ найдем критическое значение $T_{крит}$;

3) сравниваем $|T_{набл}|$ с $T_{крит}$, тогда:

если $|T_{набл}| < T_{крит}$, то нет оснований отвергать гипотезу H_0,

если $|T_{набл}| > T_{крит}$, то гипотеза H_0 отвергается.

Пример реализации РЕЦЕПТА

Из нормально распределенной генеральной совокупности (X,Y) выборку $\{x_i, y_i\}$ объема $n = 50$, по которой нашли выборочный коэффициент корреляции $r_{xy} = -0.42$. Необходимо проверить гипотезу о равенстве нулю коэффициента корреляции генеральной совокупности на уровне значимости $\alpha = 0.05$.

Решение.

Проверим гипотезу H_0 r_{XY}=0:

1) вычислим наблюдаемое значение критерия

$$T_{набл} = \frac{r_{xy}\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_{xy}^2}} = \frac{-0.42\sqrt{50-2}}{\sqrt{1-(-0.42)^2}} \approx -3.86;$$

2) по таблице критических точек распределения Стьюдента (**Таблица 5**) найдем $T_{крит}$=2.02;

3) сравниваем $|T_{набл}|$=3.86 с $T_{крит}$, тогда

$$3.86 > 2.02 \ (|T_{набл}| > T_{крит}) \qquad \Rightarrow \qquad \textit{гипотеза } H_0 \textit{ отвергается},$$

это означает, что коэффициента корреляции генеральной совокупности r_{XY} значимо отличается от нуля - X и Y коррелированы.

Задача на тему T9 для самостоятельного решения.

P9	Задана выборка $\{x_i\}$={1.02, 1.38, 1.70, 1.95, 2.12, 2.16, 2.49, 2.61, 2.64, 2.79, 2.61, 2.53, 2.47, 2.06, 2.03, 1.92, 1.67, 1.35, 0.98} $\{y_i\}$={2.55, 3.94, 4.40, 5.06, 5.47, 5.59, 6.82, 7.15, 7.24, 7.61, 7.15, 7.09, 6.71, 5.41, 5.32, 4.98, 4.29, 3.83, 2.39} извлеченная из нормально распределенной генеральной совокупности (X,Y). На уровне значимости α=0.001 проверить гипотезу H_0: r_{XY}=0.

Таблица 1

Таблица значений функции $\varphi(x)$

x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$
0	0.3989	0.51	0.3503	1.01	0.2396	1.51	0.1276	2.01	0.0529	2.52	0.0167
0.02	0.3989	0.52	0.3485	1.02	0.2371	1.52	0.1257	2.02	0.0519	2.54	0.0158
0.03	0.3988	0.53	0.3467	1.03	0.2347	1.53	0.1238	2.03	0.0508	2.56	0.0151
0.04	0.3986	0.54	0.3448	1.04	0.2323	1.54	0.1219	2.04	0.0498	2.58	0.0143
0.05	0.3984	0.55	0.3429	1.05	0.2299	1.55	0.1200	2.05	0.0488	2.60	0.0136
0.06	0.3982	0.56	0.3410	1.06	0.2275	1.56	0.1182	2.06	0.0478	2.62	0.0129
0.07	0.3980	0.57	0.3391	1.07	0.2251	1.57	0.1163	2.07	0.0468	2.64	0.0122
0.08	0.3977	0.58	0.3372	1.08	0.2227	1.58	0.1145	2.08	0.0459	2.66	0.0116
0.09	0.3973	0.59	0.3352	1.09	0.2203	1.59	0.1127	2.09	0.0449	2.68	0.0110
0.10	0.3970	0.60	0.3332	1.10	0.2179	1.60	0.1109	2.10	0.0440	2.70	0.0104
0.11	0.3965	0.61	0.3312	1.11	0.2155	1.61	0.1092	2.11	0.0431	2.72	0.0099
0.12	0.3961	0.62	0.3292	1.12	0.2131	1.62	0.1074	2.12	0.0422	2.74	0.0093
0.13	0.3956	0.63	0.3271	1.13	0.2107	1.63	0.1057	2.13	0.0413	2.76	0.0088
0.14	0.3951	0.64	0.3251	1.14	0.2083	1.64	0.1040	2.14	0.0404	2.78	0.0084
0.15	0.3945	0.65	0.3230	1.15	0.2059	1.65	0.1023	2.15	0.0396	2.80	0.0079
0.16	0.3939	0.66	0.3209	1.16	0.2036	1.66	0.1006	2.16	0.0387	2.82	0.0075
0.17	0.3932	0.67	0.3187	1.17	0.2012	1.67	0.0989	2.17	0.0379	2.84	0.0071
0.18	0.3925	0.68	0.3166	1.18	0.1989	1.68	0.0973	2.18	0.0371	2.86	0.0067
0.19	0.3918	0.69	0.3144	1.19	0.1965	1.69	0.0957	2.19	0.0363	2.88	0.0063
0.20	0.3910	0.70	0.3123	1.20	0.1942	1.70	0.0940	2.20	0.0355	2.90	0.0060
0.21	0.3902	0.71	0.3101	1.21	0.1919	1.71	0.0925	2.21	0.0347	2.92	0.0056
0.22	0.3894	0.72	0.3079	1.22	0.1895	1.72	0.0909	2.22	0.0339	2.94	0.0053
0.23	0.3885	0.73	0.3056	1.23	0.1872	1.73	0.0893	2.23	0.0332	2.96	0.0050
0.24	0.3876	0.74	0.3034	1.24	0.1849	1.74	0.0878	2.24	0.0325	2.98	0.0047
0.25	0.3867	0.75	0.3011	1.25	0.1826	1.75	0.0863	2.25	0.0317	3.00	0.0044
0.26	0.3857	0.76	0.2989	1.26	0.1804	1.76	0.0848	2.26	0.0310	3.20	0.0024
0.27	0.3847	0.77	0.2966	1.27	0.1781	1.77	0.0833	2.27	0.0303	3.40	0.0012
0.28	0.3836	0.78	0.2943	1.28	0.1758	1.78	0.0818	2.28	0.0297	3.60	0.0006
0.29	0.3825	0.79	0.2920	1.29	0.1736	1.79	0.0804	2.29	0.0290	3.80	0.0003
0.30	0.3814	0.80	0.2897	1.30	0.1714	1.80	0.0790	2.30	0.0283	4.00	0.0001
0.31	0.3802	0.81	0.2874	1.31	0.1691	1.81	0.0775	2.31	0.0277		
0.32	0.3790	0.82	0.2850	1.32	0.1669	1.82	0.0761	2.32	0.0270		
0.33	0.3778	0.83	0.2827	1.33	0.1647	1.83	0.0748	2.33	0.0264		
0.34	0.3765	0.84	0.2803	1.34	0.1626	1.84	0.0734	2.34	0.0258		
0.35	0.3752	0.85	0.2780	1.35	0.1604	1.85	0.0721	2.35	0.0252		
0.36	0.3739	0.86	0.2756	1.36	0.1582	1.86	0.0707	2.36	0.0246		
0.37	0.3725	0.87	0.2732	1.37	0.1561	1.87	0.0694	2.37	0.0241		
0.38	0.3712	0.88	0.2709	1.38	0.1539	1.88	0.0681	2.38	0.0235		
0.39	0.3697	0.89	0.2685	1.39	0.1518	1.89	0.0669	2.39	0.0229		
0.40	0.3683	0.90	0.2661	1.40	0.1497	1.90	0.0656	2.40	0.0224		
0.41	0.3668	0.91	0.2637	1.41	0.1476	1.91	0.0644	2.41	0.0219		
0.42	0.3653	0.92	0.2613	1.42	0.1456	1.92	0.0632	2.42	0.0213		
0.43	0.3637	0.93	0.2589	1.43	0.1435	1.93	0.0620	2.43	0.0208		
0.44	0.3621	0.94	0.2565	1.44	0.1415	1.94	0.0608	2.44	0.0203		
0.45	0.3605	0.95	0.2541	1.45	0.1394	1.95	0.0596	2.45	0.0198		
0.46	0.3589	0.96	0.2516	1.46	0.1374	1.96	0.0584	2.46	0.0194		
0.47	0.3572	0.97	0.2492	1.47	0.1354	1.97	0.0573	2.47	0.0189		
0.48	0.3555	0.98	0.2468	1.48	0.1334	1.98	0.0562	2.48	0.0184		
0.49	0.3538	0.99	0.2444	1.49	0.1315	1.99	0.0551	2.49	0.0180		
0.50	0.3521	1.00	0.2420	1.50	0.1295	2.00	0.0540	2.50	0.0175		

Таблица 2

Таблица значений функции $\Phi(x)$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0.01	0.0040	0.51	0.1950	1.01	0.3438	1.51	0.4345	2.01	0.4778	2.52	0.4941
0.02	0.0080	0.52	0.1985	1.02	0.3461	1.52	0.4357	2.02	0.4783	2.54	0.4945
0.03	0.0120	0.53	0.2019	1.03	0.3485	1.53	0.4370	2.03	0.4788	2.56	0.4948
0.04	0.0160	0.54	0.2054	1.04	0.3508	1.54	0.4382	2.04	0.4793	2.58	0.4951
0.05	0.0199	0.55	0.2088	1.05	0.3531	1.55	0.4394	2.05	0.4798	2.60	0.4953
0.06	0.0239	0.56	0.2123	1.06	0.3554	1.56	0.4406	2.06	0.4803	2.62	0.4956
0.07	0.0279	0.57	0.2157	1.07	0.3577	1.57	0.4418	2.07	0.4808	2.64	0.4959
0.08	0.0319	0.58	0.2190	1.08	0.3599	1.58	0.4429	2.08	0.4812	2.66	0.4961
0.09	0.0359	0.59	0.2224	1.09	0.3621	1.59	0.4441	2.09	0.4817	2.68	0.4963
0.10	0.0398	0.60	0.2257	1.10	0.3643	1.60	0.4452	2.10	0.4821	2.70	0.4965
0.11	0.0438	0.61	0.2291	1.11	0.3665	1.61	0.4463	2.11	0.4826	2.72	0.4967
0.12	0.0478	0.62	0.2324	1.12	0.3686	1.62	0.4474	2.12	0.4830	2.74	0.4969
0.13	0.0517	0.63	0.2357	1.13	0.3708	1.63	0.4484	2.13	0.4834	2.76	0.4971
0.14	0.0557	0.64	0.2389	1.14	0.3729	1.64	0.4495	2.14	0.4838	2.78	0.4973
0.15	0.0596	0.65	0.2422	1.15	0.3749	1.65	0.4505	2.15	0.4842	2.80	0.4974
0.16	0.0636	0.66	0.2454	1.16	0.3770	1.66	0.4515	2.16	0.4846	2.82	0.4976
0.17	0.0675	0.67	0.2486	1.17	0.3790	1.67	0.4525	2.17	0.4850	2.84	0.4977
0.18	0.0714	0.68	0.2517	1.18	0.3810	1.68	0.4535	2.18	0.4854	2.86	0.4979
0.19	0.0753	0.69	0.2549	1.19	0.3830	1.69	0.4545	2.19	0.4857	2.88	0.4980
0.20	0.0793	0.70	0.2580	1.20	0.3849	1.70	0.4554	2.20	0.4861	2.90	0.4981
0.21	0.0832	0.71	0.2611	1.21	0.3869	1.71	0.4564	2.21	0.4864	2.92	0.4982
0.22	0.0871	0.72	0.2642	1.22	0.3888	1.72	0.4573	2.22	0.4868	2.94	0.4984
0.23	0.0910	0.73	0.2673	1.23	0.3907	1.73	0.4582	2.23	0.4871	2.96	0.4985
0.24	0.0948	0.74	0.2704	1.24	0.3925	1.74	0.4591	2.24	0.4875	2.98	0.4986
0.25	0.0987	0.75	0.2734	1.25	0.3944	1.75	0.4599	2.25	0.4878	3.00	0.4987
0.26	0.1026	0.76	0.2764	1.26	0.3962	1.76	0.4608	2.26	0.4881	3.20	0.4993
0.27	0.1064	0.77	0.2794	1.27	0.3980	1.77	0.4616	2.27	0.4884	3.40	0.4997
0.28	0.1103	0.78	0.2823	1.28	0.3997	1.78	0.4625	2.28	0.4887	3.60	0.4998
0.29	0.1141	0.79	0.2852	1.29	0.4015	1.79	0.4633	2.29	0.4890	3.80	0.4999
0.30	0.1179	0.80	0.2881	1.30	0.4032	1.80	0.4641	2.30	0.4893	4.00	0.49996
0.31	0.1217	0.81	0.2910	1.31	0.4049	1.81	0.4649	2.31	0.4896	4.50	0.49997
0.32	0.1255	0.82	0.2939	1.32	0.4066	1.82	0.4656	2.32	0.4898	5.00	0.5
0.33	0.1293	0.83	0.2967	1.33	0.4082	1.83	0.4664	2.33	0.4901		
0.34	0.1331	0.84	0.2995	1.34	0.4099	1.84	0.4671	2.34	0.4904		
0.35	0.1368	0.85	0.3023	1.35	0.4115	1.85	0.4678	2.35	0.4906		
0.36	0.1406	0.86	0.3051	1.36	0.4131	1.86	0.4686	2.36	0.4909		
0.37	0.1443	0.87	0.3078	1.37	0.4147	1.87	0.4693	2.37	0.4911		
0.38	0.1480	0.88	0.3106	1.38	0.4162	1.88	0.4699	2.38	0.4913		
0.39	0.1517	0.89	0.3133	1.39	0.4177	1.89	0.4706	2.39	0.4916		
0.40	0.1554	0.90	0.3159	1.40	0.4192	1.90	0.4713	2.40	0.4918		
0.41	0.1591	0.91	0.3186	1.41	0.4207	1.91	0.4719	2.41	0.4920		
0.42	0.1628	0.92	0.3212	1.42	0.4222	1.92	0.4726	2.42	0.4922		
0.43	0.1664	0.93	0.3238	1.43	0.4236	1.93	0.4732	2.43	0.4925		
0.44	0.1700	0.94	0.3264	1.44	0.4251	1.94	0.4738	2.44	0.4927		
0.45	0.1736	0.95	0.3289	1.45	0.4265	1.95	0.4744	2.45	0.4929		
0.46	0.1772	0.96	0.3315	1.46	0.4279	1.96	0.4750	2.46	0.4931		
0.47	0.1808	0.97	0.3340	1.47	0.4292	1.97	0.4756	2.47	0.4932		
0.48	0.1844	0.98	0.3365	1.48	0.4306	1.98	0.4761	2.48	0.4934		
0.49	0.1879	0.99	0.3389	1.49	0.4319	1.99	0.4767	2.49	0.4936		
0.50	0.1915	1.00	0.3413	1.50	0.4332	2.00	0.4772	2.50	0.4938		

Таблица 3

Таблица критических точек распределения F Фишера-Снедекора при уровне значимости $\alpha = 0.05$

k_1 – число степеней свободы **большей** дисперсии, k_2 – число степеней свободы **меньшей** дисперсии

k_2	k_1									
	1	2	3	4	5	6	8	12	24	∞
1	161,45	199,5	215,72	224,57	230,17	233,97	238,89	243,91	249,04	254,32
2	18,51	19	19,16	19,25	19,3	19,33	19,37	19,41	19,45	19,5
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,84	8,74	8,64	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,04	5,91	5,77	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,82	4,68	4,53	4,36
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,15	4	3,84	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,73	3,57	3,41	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,44	3,28	3,12	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,23	3,07	2,9	2,71
10	4,96	4,1	3,71	3,48	3,33	3,22	3,07	2,91	2,74	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,2	3,09	2,95	2,79	2,61	2,4
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3	2,85	2,69	2,5	2,3
13	4,67	3,8	3,41	3,18	3,02	2,92	2,77	2,6	2,42	2,21
14	4,6	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,7	2,53	2,35	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,9	2,79	2,64	2,48	2,29	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,59	2,42	2,24	2,01
17	4,45	3,59	3,2	2,96	2,81	2,7	2,55	2,38	2,19	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,51	2,34	2,15	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,9	2,74	2,63	2,48	2,31	2,11	1,88
20	4,35	3,49	3,1	2,87	2,71	2,6	2,45	2,28	2,08	1,84
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,42	2,25	2,05	1,81
22	4,3	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,4	2,23	2,03	1,78
23	4,28	3,42	3,03	2,8	2,64	2,53	2,38	2,2	2	1,76
24	4,26	3,4	3,01	2,78	2,62	2,51	2,36	2,18	1,98	1,73
25	4,24	3,38	2,99	2,76	2,6	2,49	2,34	2,16	1,96	1,71
26	4,22	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,32	2,15	1,95	1,69
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,3	2,13	1,93	1,67
28	4,2	3,34	2,95	2,71	2,56	2,44	2,29	2,12	1,91	1,65
29	4,18	3,33	2,93	2,7	2,54	2,43	2,28	2,1	1,9	1,64
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,27	2,09	1,89	1,62
35	4,12	3,26	2,87	2,64	2,48	2,37	2,22	2,04	1,83	1,57
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,18	2	1,79	1,51
45	4,06	3,21	2,81	2,58	2,42	2,31	2,15	1,97	1,76	1,48
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,4	2,29	2,13	1,95	1,74	1,44
60	4	3,15	2,76	2,52	2,37	2,25	2,1	1,92	1,7	1,39
70	3,98	3,13	2,74	2,5	2,35	2,23	2,07	1,89	1,67	1,35
80	3,96	3,11	2,72	2,49	2,33	2,21	2,06	1,88	1,65	1,31
90	3,95	3,1	2,71	2,47	2,32	2,2	2,04	1,86	1,64	1,28
100	3,94	3,09	2,7	2,46	2,3	2,19	2,03	1,85	1,63	1,26

Таблица 4

Критические значения распределения χ^2

k **- число степеней свободы**

	Уровень значимости α						
k	0.100	0.050	0.025	0.020	0.010	0.005	0.001
1	2.706	3.841	5.024	5.412	6.635	7.879	10,828
2	4.605	5.991	7.378	7.824	9.210	10.597	13.816
3	6.251	7.815	9.348	9.837	11.345	12.838	16.266
4	7.779	9.488	11.143	11.668	13.277	14.860	18.467
5	9.236	11.070	12.833	13.388	15.086	16.750	20.515
6	10.645	12.592	14.449	15.033	16.812	18.548	22.458
7	12.017	14.067	16.013	16.622	18.475	20.278	24.322
8	13.362	15.507	17.535	18.168	20.090	21.955	26.124
9	14.684	16.919	19.023	19.679	21.666	23.589	27.877
10	15.987	18.307	20.483	21.161	23.209	25.188	29.588
11	17.275	19.675	21.920	22.618	24.725	26.757	31.264
12	18.549	21.026	23.337	24.054	26.217	28.300	32.909
13	19.812	22.362	24.736	25.472	27.688	29.819	34.528
14	21.064	23.685	26.119	26.873	29.141	31.319	36.123
15	22.307	24.996	27.488	28.259	30.578	32.801	37.697
16	23.542	26.296	28.845	29.633	32.000	34.267	39.252
17	24.769	27.587	30.191	30.995	33.409	35.718	40.790
18	25.989	28.869	31.526	32.346	34.805	37.156	42.312
19	27.204	30.144	32.852	33.687	36.191	38.582	43.820
21	29.615	32.671	35.479	36.343	38.932	41.401	46.797
22	30.813	33.924	36.781	37.659	40.289	42.796	48.268
23	32.007	35.172	38.076	38.968	41.638	44.181	49.728
24	33.196	36.415	39.364	40.270	42.980	45.559	51.179
25	34.382	37.652	40.646	41.566	44.314	46.928	52.620
30	40.256	43.773	46.979	47.962	50.892	53.672	59.703
40	51.805	55.758	59.342	60.436	63.691	66.766	73.402
50	63.167	67.505	71.420	72.613	76.154	79.490	86.661
60	74.397	79.082	83.298	84.580	88.379	91.952	99.607
70	85.527	90.531	95.023	96.388	100.425	104.215	112.317
80	96.578	101.879	106.629	108.069	112.329	116.321	124.839
90	107.565	113.145	118.136	119.648	124.116	128.299	137.208
100	118.498	124.342	129.561	131.142	135.807	140.169	149.449

Таблица 5

Критические значения t-критерия Стьюдента

при уровне значимости

тип	α					
двухсторонний	0.100	0.050	0.0250	0.010	0.0050	0.0010
односторонний	0.050	0.025	0.0125	0.005	0.0025	0.0005

k	Уровень значимости α					
two-side one-side	0.100 0.050	0.050 0.0250	0.025 0.0125	0.010 0.0050	0.005 0.0025	0.001 0.0005
1	6.314	12.706	25.452	63.657	127.321	636.619
2	2.920	4.303	6.205	9.925	14.089	31.599
3	2.353	3.182	4.177	5.841	7.453	12.924
4	2.132	2.776	3.495	4.604	5.598	8.610
5	2.015	2.571	3.163	4.032	4.773	6.869
6	1.943	2.447	2.969	3.707	4.317	5.959
7	1.895	2.365	2.841	3.499	4.029	5.408
8	1.860	2.306	2.752	3.355	3.833	5.041
9	1.833	2.262	2.685	3.250	3.690	4.781
10	1.812	2.228	2.634	3.169	3.581	4.587
11	1.796	2.201	2.593	3.106	3.497	4.437
12	1.782	2.179	2.560	3.055	3.428	4.318
13	1.771	2.160	2.533	3.012	3.372	4.221
14	1.761	2.145	2.510	2.977	3.326	4.140
15	1.753	2.131	2.490	2.947	3.286	4.073
16	1.746	2.120	2.473	2.921	3.252	4.015
17	1.740	2.110	2.458	2.898	3.222	3.965
18	1.734	2.101	2.445	2.878	3.197	3.922
19	1.729	2.093	2.433	2.861	3.174	3.883
20	1.725	2.086	2.423	2.845	3.153	3.850
21	1.721	2.080	2.414	2.831	3.135	3.819
22	1.717	2.074	2.405	2.819	3.119	3.792
23	1.714	2.069	2.398	2.807	3.104	3.768
24	1.711	2.064	2.391	2.797	3.091	3.745
25	1.708	2.060	2.385	2.787	3.078	3.725
26	1.706	2.056	2.379	2.779	3.067	3.707
27	1.703	2.052	2.373	2.771	3.057	3.690
28	1.701	2.048	2.368	2.763	3.047	3.674
29	1.699	2.045	2.364	2.756	3.038	3.659
30	1.697	2.042	2.360	2.750	3.030	3.646
40	1.684	2.021	2.329	2.704	2.971	3.551
50	1.676	2.009	2.311	2.678	2.937	3.496
60	1.671	2.000	2.299	2.660	2.915	3.460
70	1.667	1.994	2.291	2.648	2.899	3.435
80	1.664	1.990	2.284	2.639	2.887	3.416
90	1.662	1.987	2.280	2.632	2.878	3.402
100	1.660	1.984	2.276	2.626	2.871	3.390
120	1.658	1.980	2.270	2.617	2.860	3.373
200	1.653	1.972	2.258	2.601	2.839	3.340
300	1.650	1.968	2.253	2.592	2.828	3.323
500	1.648	1.965	2.248	2.586	2.820	3.310
∞	1.645	1.960	2.241	2.576	2.807	3.291

Список основной литературы

1. Красс, М. С. Математика для экономического бакалавриата: учебник / М.С. Красс, Б.П. Чупрынов. - Москва: ИНФРА-М, 2020. - 472 с. - (Высшее образование: Бакалавриат). - ISBN 978-5-16-004467-5. - Текст: электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/1072296

2. Соколов, Г. А. Основы теории вероятностей: учебник / Г. А. Соколов. - 2-е изд. - Москва: ИНФРА-М, 2019. - 340 с. + Доп. материалы [Электронный ресурс]. - (Высшее образование: Бакалавриат). - ISBN 978-5-16-006728-5. - Текст: электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/

3. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник / Е.А. Коган, А.А. Юрченко. - Москва: ИНФРА-М, 2019. - 250 с. - (Высшее образование: Бакалавриат). - DOI 10.12737/textbook_5cde54d3671a96.35212605. - Текст: электронный. - URL: http://znanium.com/catalog/product/1052969

Теория вероятностей и математическая статистика: методические указания по проведению практических занятий, самостоятельному изучению дисциплины и выполнению контрольной работы

Составители: Назарова Лариса Алексеевна
Назаров Леонид Анатольевич
Грунина Мария Викторовна

Подписано к печати “__”_______ 2022 г. Формат 84×108/32
Объём 1,4 уч.-изд.л. Тираж 100 экз.

Издательский центр НГАУ
630039, Новосибирск, ул. Добролюбова, 160