

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИНЖЕНЕРНЫЙ ИНСТИТУТ

## **Математика**

Методические указания по проведению практических занятий

**35.03.06** *Агроинженерия*

**Новосибирск 2020**

## КАФЕДРА ВЫСШЕЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

УДК 51 (07)

ББК 22.1, я7

М 34

Рецензент: доктор физ.-мат. наук, проф. И.В. Ершов

Составитель: канд. техн. наук, доцент С.Н. Бурков

**Математика:** методические указания по проведению практических занятий / Новосиб. гос. аграр. ун-т;  
Сост. С.Н. Бурков. – Новосибирск, 2020. – 23 с.

В методических указаниях представлены задания для выполнения на практических занятиях, примерные варианты контрольных работ, вопросы к экзаменам, список рекомендуемой литературы.

Методические указания предназначены для студентов очной формы обучения по направлению подготовки 35.03.06 Агроинженерия.

Утверждены и рекомендованы к изданию учебно-методическим советом Инженерного института (протокол № 5 от «01» декабря 2020 г.)

## Содержание

Введение	4
Методические указания по освоению дисциплины	4
<b>1 семестр</b>	5
Раздел 2. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии	5
Раздел 3. Математический анализ	8
Вопросы к экзамену	10
<b>2 семестр</b>	12
Раздел 3. Математический анализ	12
Раздел 4. Дифференциальные уравнения	15
Вопросы к экзамену	15
<b>3 семестр</b>	17
Раздел 5. Ряды	17
Раздел 6. Теория вероятностей и математическая статистика	18
Вопросы к экзамену	22
Литература	22

## Введение

### Цели и задачи дисциплины

**Цель** преподавания математических дисциплин в вузе для студентов инженерных специальностей – ознакомить студентов с основами математического аппарата, необходимого для решения теоретических и практических инженерных задач; привить студентам умение самостоятельно изучать учебную литературу по математике и ее приложениям; развить логическое и алгоритмическое мышление; повысить общий уровень математической культуры; выработать навыки математического исследования прикладных вопросов.

#### **Задачи** дисциплины:

- развить у студентов логическое мышление,
- познакомить студентов с идеями и методами высшей математики,
- привить студентам опыт работы с математической и связанной с математикой научной и учебной литературой,
- привить студентам опыт решения задач с использованием математических методов.

#### **Требования к результатам освоения дисциплины**

В результате изучения дисциплины студент *должен*:

##### **Знать:**

- основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры и аналитической геометрии, теории дифференциальных уравнений, теории вероятностей и теории математической статистики;
- основные понятия и методы математического анализа;
- дифференциальное и интегральное исчисление функций одной и нескольких переменных;
- методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений;
- понятия рядов и их практическое применение в приближенных вычислениях;

##### **Уметь:**

- использовать математический аппарат для обработки технической и экономической информации и анализа данных, связанных с машиноиспользованием и надежностью технических систем;

##### **Владеть:**

- методами построения математических моделей типовых профессиональных задач.

### Методические указания по освоению дисциплины

Успешное освоение компетенций, формируемых данной учебной дисциплиной, предполагает оптимальное использование времени самостоятельной работы.

Все задания к практическим занятиям рекомендуется выполнять непосредственно после соответствующей темы лекционного курса, что способствует лучшему усвоению материала, позволяет своевременно выявить и устранить «пробелы» в знаниях, систематизировать ранее пройденный материал, на его основе приступить к получению новых знаний и овладению навыками.

#### **Методические указания по выполнению контрольных работ**

В процессе изучения дисциплины студент выполняет пять контрольных работ и одну РГР: по две контрольные работы в первом и третьем семестрах и РГР и контрольную работу во втором семестре. В первом семестре тема первой контрольной работы «Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии», второй - «Дифференциальное исчисление функции одной переменной», во втором семестре контрольная работа теме «Дифференциальные уравнения» и РГР по теме «Кратные и криволинейные интегралы», в третьем семестре первая контрольная работа по теме «Ряды», вторая контрольная работа по теме «Теория вероятностей».

#### **Критерии оценки выполнения контрольных работ**

- оценка «отлично» выставляется при правильно выполненной задаче, аккуратно и чисто, в соответствии с требованиями, оформленном решении;
- оценка «хорошо» выставляется при правильно решенной задаче и при наличии в ходе выполнения незначительных помарок;
- оценка «удовлетворительно» выставляется, если после проверки в задаче будут исправлены все ошибки, и она будет оформлена в соответствии с пунктом выше.
- во всех остальных случаях работа не засчитывается и выдается другой вариант.

1 семестр.

Раздел 2. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии

Занятия 1, 2. Определители, матрицы.

Вычислить определители.

$$1. \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} \quad 2. \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & -10 \end{vmatrix} \quad 3. \begin{vmatrix} \sqrt{a} & -1 \\ a & \sqrt{a} \end{vmatrix}$$

$$4. \begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ -\cos \alpha & \sin \alpha \end{vmatrix} \quad 5. \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$6. \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & 6 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

7. Найти  $P(A)$ , если

$$P(A) = A^2 - 9A^{-1} - 2|A|E, \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Занятие 3, 4. Системы линейных уравнений.

Решить системы уравнений

$$1. \begin{cases} 2x - 3y + z - 2 = 0, \\ x + 5y - 4z + 5 = 0, \\ 4x + y - 3z + 4 = 0 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 2x - y + z = 2, \\ 3x + 2y + 2z = -2, \\ x - 2y + z = 1 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x + 2y + 3z = 4, \\ 2x + 4y + 6z = 3, \\ 3x + y - z = 1 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x + 2y + 3z = 4, \\ 2x + y - z = 3, \\ 3x + 3y + 2z = 7 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 4, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = -5, \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 4 \end{cases}$$

Занятия 5, 6, 7. Элементы векторной алгебры.

1. По сторонам  $OA$  и  $OB$  прямоугольника  $OACB$  отложены единичные векторы  $\vec{i}$  и  $\vec{j}$ . Выразить через  $\vec{i}$  и  $\vec{j}$  векторы  $\overrightarrow{OA}$ ,  $\overrightarrow{AC}$ ,  $\overrightarrow{CB}$ ,  $\overrightarrow{BO}$ ,  $\overrightarrow{OC}$  и  $\overrightarrow{BA}$ , если  $OA = 3$  и  $OB = 4$ .

2. Пусть у прямоугольника  $OACB$  из предыдущей задачи  $M$  – середина  $BC$  и  $N$  – середина  $AC$ . Определить векторы  $\overrightarrow{OM}$ ,  $\overrightarrow{ON}$  и  $\overrightarrow{MN}$  при  $OA = 3$  и  $OB = 4$ .
  3. Построить точку  $M(5; -3; 4)$  и определить длину её радиус-вектора.
  4. Определить угол между векторами  $\vec{a} = -\vec{i} + \vec{j}$  и  $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$ .
  5. Определить углы  $\triangle ABC$  с вершинами  $A(2; -1; 3)$ ,  $B(1; 1; 1)$  и  $C(0; 0; 5)$ .
  6. Раскрыть скобки в выражении  $(2\vec{i} - \vec{j}) \cdot \vec{j} + (\vec{j} - 2\vec{k}) \cdot \vec{k} + (\vec{i} - 2\vec{k})^2$
  7. Вычислить: 1)  $(\vec{m} + \vec{n})^2$ , если  $\vec{m}$  и  $\vec{n}$  – единичные векторы с углом между ними  $30^\circ$ ; 2)  $(\vec{a} - \vec{b})^2$ , если  $|\vec{a}| = 2\sqrt{2}$ ,  $|\vec{b}| = 4$  и угол между векторами равен  $135^\circ$ .
  8. Определить длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{a} = 2\vec{m} + \vec{n}$ ,  $\vec{b} = \vec{m} - 2\vec{n}$ , где  $\vec{m}$  и  $\vec{n}$  – единичные векторы, угол между которыми  $60^\circ$ .
  9. Дан вектор  $\vec{a} = 2\vec{m} - \vec{n}$ , где  $\vec{m}$  и  $\vec{n}$  – единичные векторы с углом  $120^\circ$  между ними. Найти  $\cos(\widehat{\vec{a}; \vec{m}})$  и  $\cos(\widehat{\vec{a}; \vec{n}})$ ?
  10. Определить и построить вектор  $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ , если 1)  $\vec{a} = 3\vec{i}$ ,  $\vec{b} = 2\vec{k}$ ; 2)  $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$ ,  $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j}$ ; 3)  $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ ,  $\vec{b} = 3\vec{j} + 2\vec{k}$ . Найти в каждом случае площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ .
  11. Вычислить площадь треугольника с вершинами  $A(7; 3; 4)$ ,  $B(1; 0; 6)$  и  $C(4; 5; -2)$ .
  12. Раскрыть скобки и упростить выражения:
    - 1)  $\vec{i} \times (\vec{j} + \vec{k}) - \vec{j} \times (\vec{i} + \vec{k}) + \vec{k} \times (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$ ;
    - 2)  $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \times \vec{c} + (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \times \vec{b} + (\vec{b} - \vec{c}) \times \vec{a}$ ;
    - 3)  $(2\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{c} - \vec{a}) + (\vec{b} + \vec{c}) \times (\vec{a} + \vec{b})$ ;
    - 4)  $2\vec{i} \cdot (\vec{j} \times \vec{k}) + 3\vec{j} \cdot (\vec{i} \times \vec{k}) + 4\vec{k} \cdot (\vec{i} \times \vec{j})$ .
  13. Векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  составляют угол  $45^\circ$ . Найти площадь треугольника, построенного на векторах  $\vec{a} - 2\vec{b}$  и  $3\vec{a} + 2\vec{b}$ , если  $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 5$ .
  14. Построить параллелепипед на векторах  $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ ,  $\vec{b} = -3\vec{j} + \vec{k}$ ,  $\vec{c} = 2\vec{j} + 5\vec{k}$  и вычислить его объём. Правой или левой будет тройка векторов  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ ?
  15. Построить пирамиду с вершинами  $O(0; 0; 0)$ ,  $A(5; 2; 0)$ ,  $B(2; 5; 0)$  и  $C(1; 2; 4)$  и вычислить её объём, площадь грани  $ABC$  и высоту пирамиды, опущенную на эту грань.
- Занятия 8, 9, 10 Аналитическая геометрия на плоскости: прямая, кривые второго порядка.**
1. Построить прямые: 1)  $3x+4y=12$ ; 2)  $3x-4y=0$ ; 3)  $2x-5=0$ ; 4)  $2y+5=0$ .
  2. Дан треугольник с вершинами  $A(-2; 0)$ ,  $B(2; 4)$ ,  $C(4; 0)$ . Сделать чертеж, написать уравнения сторон треугольника, медианы  $AE$ , высоты  $AD$  и найти длину медианы  $AE$ .
  3. Построить эллипс  $x^2 + 4y^2 = 16$ , найти его фокусы и эксцентриситет.
  4. Написать каноническое уравнение эллипса, зная, что: 1) расстояние между фокусами равно 8, а малая полуось  $b = 3$ ; 3) большая полуось  $a = 6$ , а эксцентриситет  $e = 0,5$ .
  5. Земля движется по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце. Наименьшее расстояние от земли до Солнца равно приблизительно 147,5 миллиона километров, а наибольшее 152,5 миллиона километров. Найти большую полуось и эксцентриситет орбиты Земли.
  6. Построить гиперболу  $x^2 - 4y^2 = 16$  и её асимптоты. Найти фокусы, эксцентриситет и угол между асимптотами.
  7. Определить траекторию точки  $M$ , которая движется так, что остаётся вдвое дальше от точки  $F(-8; 0)$ ,

чем от прямой  $x = -2$ .

8. Составить уравнение геометрического места точек, одинаково удалённых от точки  $F(0; 2)$  и от прямой  $y = 4$ . Найти точки пересечения этой кривой с осями координат и построить её.

9. Зеркальная поверхность прожектора образована вращением параболы вокруг её оси симметрии. Диаметр зеркала 80 см, а глубина его 10 см. На каком расстоянии от вершины параболы нужно поместить источник света, если для отражения лучей параллельным пучком он должен быть в фокусе параболы?

**Занятия 11, 12, 13. Аналитическая геометрия в пространстве: плоскость, прямая, взаимное положение прямой и плоскости.**

1. Найти плоскость, проходящую через точку  $(2; 2; -2)$  и параллельную плоскости  $x - 2y - 3z = 0$ .

2. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку  $(-1; -1; 2)$  и перпендикулярной к плоскостям  $x - 2y + z - 4 = 0$  и  $x + 2y - 2z + 4 = 0$ .

3. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки  $M_1(-1; -2; 0)$  и  $M_2(1; 1; 2)$  и перпендикулярной к плоскости  $x + 2y + 2z - 4 = 0$ .

4. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки  $M_1(1; -1; 2)$ ,  $M_2(2; 1; 2)$  и  $M_3(1; 1; 4)$ .

5. Найти расстояние от точки  $(5; 1; -1)$  до плоскости  $x - 2y - 2z + 4 = 0$ .

6. Найти расстояние между параллельными плоскостями  $4x + 3y - 5z - 8 = 0$  и  $4x + 3y - 5z + 12 = 0$ .

7. Уравнения прямой  $\begin{cases} x + 2y + 3z - 13 = 0 \\ 3x + y + 4z - 14 = 0 \end{cases}$  написать: 1) в проекциях; 2) в канонической форме. Найти

следы прямой на координатных плоскостях, построить прямую и её проекции.

8. Написать уравнения прямой, проходящей через точку  $A(4; 3; 0)$  и параллельной вектору  $\vec{p} = \{-1; 1; 1\}$ . Найти след прямой на плоскости  $yOz$  и построить прямую.

9. Построить прямую, проходящую через точки  $A(2; -1; 3)$  и  $B(2; 3; 3)$ , написать её уравнения.

10. Написать параметрические уравнения прямой: 1) проходящей через точку  $(-2; 1; -1)$  и параллельной вектору  $\vec{p} = \{1; -2; 3\}$ ; 2) проходящей через точки  $A(3; -1; 4)$  и  $B(1; 1; 2)$ .

11. Написать уравнения прямой, проходящей через точку  $(-4; 3; 0)$  и параллельной прямой

$$\begin{cases} x - 2y + z = 4, \\ 2x + y - z = 0. \end{cases}$$

12. Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую  $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{3}$  и точку  $(3; 4; 0)$ .

13. Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую  $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+2}{2}$  и перпендикулярной к плоскости  $2x + 3y - z = 4$ .

14. Написать уравнение плоскости, проходящей через параллельные прямые  $\frac{x-3}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}$  и  $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2}$ .

15. Найти точку пересечения прямой  $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{2}$  с плоскостью  $x + 2y + 3z - 29 = 0$ .

**Занятие 14. Контрольная работа по теме «Элементы векторной алгебры и аналитической геометрии»**  
Примерный вариант контрольной работы.

I. По координатам вершин пирамиды  $A_1A_2A_3A_4$  найти:

1) длины ребер  $A_1A_2$  и  $A_1A_3$ ; 2) угол между ребрами  $A_1A_2$  и  $A_1A_3$ ; 3) площадь грани  $A_1A_2A_3$ ; 4) объем пирамиды; 5) уравнение прямых  $A_1A_2$  и  $A_1A_3$ ; 6) уравнения плоскостей  $A_1A_2A_3$  и  $A_1A_2A_4$ ; 7) угол между плоскостями  $A_1A_2A_3$  и  $A_1A_2A_4$ .  $A_1(-1;2;1)$ ;  $A_2(-2;2;5)$ ;  $A_3(-3;3;1)$ ;  $A_4(-1;4;3)$ .

II. Заданы координаты вершин треугольника  $ABC$ .

Найти: 1) Длины сторон треугольника;

2) Уравнения сторон треугольника;

3) Уравнение высоты, проведенной из точки  $C$ ; ее длину; площадь треугольника;

4) Уравнение медианы, проведенной из вершины  $A$ .

$A(1;2)$ ;  $B(1;-2)$ ;  $C(5;-1)$ .

III. Привести уравнение кривой второго порядка  $f(x,y) = 0$  к каноническому виду и найти точки пересечения ее с прямой. Построить график кривой и прямой.

$$2x^2 + 4x - y + 3 = 0; 2x - y - 1 = 0.$$

### Раздел 3. Математический анализ

#### Занятие 15. Предел функции.

Вычислить пределы

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x-1}{x^2+1}.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3-1}{x^2+1}.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{1-2x}.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2-3x+2}{2x^2+4x+1}.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-3x+2}.$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x^2-2x-3}.$$

$$7. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x+6}{x^3+8}.$$

$$8. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-x-2}{x^3+1}.$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 7} \frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}.$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt[3]{4x+7}-3}{x^2-x-20}.$$

$$11. \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} \right).$$

$$12. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x-10}+2}{x^2-3x+2}.$$

#### Занятие 16. Замечательные пределы.

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x}.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{3}}{x}.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2}.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 2x}{x \sin x}.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos \frac{x}{2}}{x-\pi}.$$

$$6. \lim_{n \rightarrow -\infty} \left( 1 + \frac{2}{n} \right)^{3n}.$$

$$7. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x-2}{3x+1} \right)^{2x}.$$

$$8. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-3x}-1}{x}.$$

$$9. \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot [\ln n - \ln(n+2)].$$

#### Занятие 17. Производная.

Найти производные функций:

$$1. y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x - 5.$$

$$2. y = \frac{x^5}{5} - \frac{2x^3}{3} + x.$$



$$3. y = x + 2\sqrt{x}.$$

$$5. y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}.$$

$$7. y = 3x - 6\sqrt{x}.$$

$$9. y = \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{3x^3}.$$

$$11. y = x - \sin x.$$

$$13. y = x^2 \cos x.$$

$$15. y = \frac{\cos x}{x^2}.$$

$$17. y = \frac{x}{1-4x}.$$

$$19. y = \frac{\cos x}{1-\sin x}.$$

$$21. s = \frac{gt^2}{2}.$$

$$23. f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 + x; \text{вычислить } f'(0), f'(1), f'(-1).$$

$$24. f(x) = x^2 - \frac{1}{2x^2}; \text{вычислить } f'(2) - f'(-2).$$

$$25. f(x) = \frac{x}{2x-1}; \text{найти } f'(0), f'(2), f'(-2).$$

$$26. y = \sin 6x.$$

$$28. y = \sqrt{2x - \sin 2x}.$$

$$30. y = \sin^3 x + \cos^3 x.$$

$$32. y = \sin \sqrt{x}.$$

$$34. y = \frac{\sin^2 x}{\cos x}.$$

$$36. y = \frac{\sqrt{2x-1}}{x}.$$

$$38. y = x \ln x.$$

$$40. y = \lg 5x.$$

$$4. y = \frac{10}{x^3}.$$

$$6. y = x + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{5x^5}.$$

$$8. y = 6\sqrt[3]{x} - 4\sqrt[4]{x}.$$

$$10. y = \frac{8}{\sqrt[4]{x}} - \frac{6}{\sqrt[3]{x}}.$$

$$12. y = x - \operatorname{tg} x.$$

$$14. y = x^2 \operatorname{ctg} x.$$

$$16. y = \frac{x^2}{x^2 + 1}.$$

$$18. y = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{x}}.$$

$$20. y = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}.$$

$$22. x = a(t - \sin t).$$

$$27. y = \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}.$$

$$29. y = \sin^2 x.$$

$$31. y = \operatorname{tg}^3 x - 3\operatorname{tg} x + 3x.$$

$$33. y = \frac{1}{(1 + \cos 4x)^5}.$$

$$35. y = x\sqrt{x^2 - 1}.$$

$$37. y = \frac{1 + \sin 2x}{1 - \sin 2x}.$$

$$39. y = \frac{1 + \ln x}{x}.$$

$$41. y = \ln x - \frac{2}{x} - \frac{1}{2x^2}.$$

42.  $y = \ln(x^2 + 2x).$

43.  $y = \ln(1 + \cos x).$

44.  $y = \ln \sin x - \frac{1}{2} \sin^2 x.$

45.  $y = x^2 + 3^x.$

46.  $y = x^2 2^x.$

47.  $y = x^2 e^x.$

**Занятия 18,19,20. Исследование функций.**

Провести полное исследование функции и построить её график:

1.  $y = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x.$

2.  $y = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}.$

3.  $y = \frac{1}{1 + x^2}.$

4.  $y = x - \ln x.$

**Занятие 21. Контрольная работа по теме «Дифференциальное исчисление функции одной переменной»**

Примерный вариант контрольной работы.

*I. Найти производную функции одной переменной, исходя из определения производной.*

$$y = -\frac{5}{3x-4}$$

*II. Найти производные первого порядка данных функций, используя аппарат дифференцирования.*

а)  $y = 3x^5 - \sin x$

б)  $y = \sqrt{x} \operatorname{tg} x$

в)  $y = \frac{\ln x}{4 - 3 \cos x}$

г) 
$$\begin{cases} x = \arcsin 2t \\ y = \frac{1}{1 - 4t^2} \end{cases}$$

**Вопросы к экзамену**

1. Матрицы и действия над ними. Определители второго и третьего порядков. Решение систем линейных алгебраических уравнений по методу (правила) Крамера.
2. Обратная матрица. Решение систем линейных алгебраических уравнений матричным методом.
3. Элементарные преобразования и ранг матрицы. Метод Гаусса решения систем линейных алгебраических уравнений. Теорема Кронекера – Капелли.
4. Векторы и действия над ними. Декартовы координаты векторов.
5. Скалярное произведение векторов и его свойства. Векторное произведение и его свойства. Смешанное произведение векторов и его свойства.
6. Расстояние между точками на плоскости. Деление отрезка в данном отношении.
7. Уравнения прямой: с угловым коэффициентом; по двум точкам. Уравнения прямой: параллельно осям координат; проходящей через данную точку в данном направлении.
8. Уравнение прямой в нормальном виде, расстояние от точки до прямой. Уравнение прямой в отрезках. Общее уравнение прямой. Угол между двумя прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых.
9. Окружность и ее уравнение. Парабола и ее уравнение. Эллипс, вывод канонического уравнения. Гипербола, ее каноническое уравнение, асимптоты.
10. Функция, способы задания, область определения, отрезок, интервал, полуинтервал, окрестность точки,  $\sigma$  - окрестность точки (понятия и обозначения).
11. Понятие предела функции в точке. Непрерывность функции в точке. Теоремы о пределах и их следствия (без доказательства).
12. Первый замечательный предел. Второй замечательный предел. Вывод формул:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^n - 1}{nx} = 1.$$

13. Производная, ее геометрический смысл, уравнение касательной.
14. Правила дифференцирования. Таблица производных.
15. Производная сложной функции. Производная обратной функции.
16. Дифференциал функции и его применения в приближенных вычислениях. Таблица дифференциалов.

17. Теоремы о непрерывных функциях. Теорема Вейерштрасса и ее следствия, теорема Ролля. Теоремы Коши и Лагранжа.

18. Правило Лопиталя, раскрытие неопределенностей

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}.$$

19. Экстремумы. Необходимые и достаточные условия экстремума на основе первой и второй производных. План исследования функции на экстремум.

20. Наименьшие и наибольшие значения функции на отрезке. План исследования.

21. Выпуклость, вогнутость функции, необходимые и достаточные условия.

22. Вертикальные и наклонные асимптоты. Общая схема построения.

## 2 семестр

### Раздел 3. Математический анализ

#### Занятие 1. Неопределенный интеграл

Найти интегралы:

1.  $\int \left( x^2 + 2x + \frac{1}{x} \right) dx$ . 2.  $\int \frac{10x^8 + 3}{x^4} dx$ . 3.  $\int \frac{x-2}{x^3} dx$ .

4.  $\int \frac{(x^2+1)^2}{x^3} dx$ . 5.  $\int (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}) dx$ . 6.  $\int \left( \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}} \right) dx$ .

7.  $\int e^x \left( 1 - \frac{e^{-x}}{x^2} \right) dx$ . 8.  $\int a^x \left( 1 + \frac{a^{-x}}{\sqrt{x^3}} \right) dx$ . 9.  $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx$ .

10.  $\int \operatorname{ctg}^2 x dx$ . 11.  $\int \frac{dx}{\cos^2 x \sin^2 x}$ . 12.  $\int \frac{3-2 \operatorname{ctg}^2 x}{\cos^2 x} dx$ .

13.  $\int \sin^2 \frac{x}{2} dx$ . 14.  $\int \left( \frac{2}{1+x^2} - \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx$ . 15.  $\int \frac{dx}{x^2-25}$ .

16.  $\int \frac{dx}{x^2+9}$ . 17.  $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$ . 18.  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+5}}$ .

19.  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}$ . 20.  $\int \frac{dx}{x^2+3}$ . 21.  $\int \left( \frac{3}{x^2+3} + \frac{6}{x^2-3} \right) dx$ .

22.  $\int \left( \frac{1}{\sqrt{2-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{2+x^2}} \right) dx$ . 23.  $\int \cos 3x dx$ . 24.  $\int \sin \frac{x}{2} dx$ .

25.  $\int e^{-3x} dx$ . 26.  $\int \frac{dx}{\cos^2 5x}$ . 27.  $\int (e^{x/2} + e^{-x/2}) dx$ .

28.  $\int \sqrt{4x-1} dx$ . 29.  $\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x}}$ . 30.  $\int \frac{dx}{1-10x}$ .

Занятие 2. Метод подстановки (замены переменной). Интегрирование по частям

1.  $\int \frac{e^{3x}}{1-3e^{3x}} dx$ . 2.  $\int \operatorname{ctg} x dx$ . 3.  $\int \frac{dx}{x(1+\ln x)}$ .

4.  $\int \sin^2 x \cos x dx$ . 5.  $\int e^{\cos x} \sin x dx$ . 6.  $\int e^{-x^2} x dx$ .  
 7.  $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$ . 8.  $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{1+x^2}}$ . 9.  $\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}$ .  
 10.  $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{1+2\cos x}}$ . 11.  $\int \ln x dx$ . 12.  $\int x \ln(x-1) dx$ .  
 13.  $\int x e^{2x} dx$ . 14.  $\int \frac{\ln x dx}{x^2}$ . 15.  $\int \sqrt{x} \ln x dx$ .

### Занятия 3, 4. Интегрирование рациональных дробей

1.  $\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}$ . 2.  $\int \frac{dx}{x^2 + 6x + 13}$ . 3.  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}}$ .  
 4.  $\int \frac{x^3}{x-2} dx$ . 5.  $\int \frac{x-4}{(x-2)(x-3)} dx$ . 6.  $\int \frac{2x+7}{x^2 + x - 2} dx$ .  
 7.  $\int \frac{5x+2}{x^2 + 2x + 10} dx$ . 8.  $\int \frac{(2x+1) dx}{(x^2 + 2x + 5)^2}$ .

### Занятие 5. Интегрирование тригонометрических функций и иррациональных выражений

1.  $\int \sin^2 x dx$ . 2.  $\int (1 + 2\cos x)^2 dx$ . 3.  $\int \cos^4 x dx$ .  
 4.  $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$ . 5.  $\int \sin^5 x dx$ . 6.  $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$ . 7.  $\int \frac{dx}{\sin x}$ .  
 8.  $\int \frac{dx}{\cos x}$ . 9.  $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}} dx$ . 10.  $\int \frac{x dx}{\sqrt{2x+1} + 1}$ . 11.  $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}}$ .

### Занятия 6, 7. Определенный интеграл

Вычислить:

1.  $\int_1^3 x^3 dx$ . 2.  $\int_1^2 \left( x^2 + \frac{1}{x^4} \right) dx$ . 3.  $\int_1^4 \sqrt{x} dx$ .  
 4.  $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$ . 5.  $\int_0^3 e^{x/3} dx$ .  
 6.  $\int_0^{\pi/4} \sin 4x dx$ . 7.  $\int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}-1}$ .

Вычислить площадь, ограниченную линиями:

8.  $xy = 4$ ,  $x = 1$ ,  $x = 4$ ,  $y = 0$ . 9.  $y = \ln x$ ,  $x = e$ ,  $y = 0$ .  
 10.  $y = x^2$ ,  $y = 2 - x^2$ . 11.  $y = x^2 + 4x$ ,  $y = x + 4$ .

### Занятие 8. Несобственные интегралы

Вычислить интегралы:

1.  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ . 2.  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$ . 3.  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ .

$$4. \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^n}.$$

$$5. \int_0^{\infty} e^{-x} dx.$$

$$6. \int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx.$$

$$7. \int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$$

$$8. \int_2^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}.$$

$$9. \int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}.$$

$$10. \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}.$$

#### Занятия 9,10. Функции нескольких переменных.

Найти частные производные функций:

$$1. z = x^3 + 3x^2y - y^3.$$

$$2. z = \ln(x^2 + y^2).$$

$$3. z = \frac{y}{x}.$$

$$4. z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

Найти полные дифференциалы функций:

$$5. z = x^2y.$$

$$6. z = \frac{xy}{x-y}.$$

$$7. \text{Найти частные производные третьего порядка } z = x^3 + x^2y + y^3.$$

$$8. \text{Найти частные производные четвёртого порядка } z = x^4 + 3x^2y^2 - 2y^4.$$

9. Найти экстремум функций:

$$1) z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20; \quad 2) z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1.$$

#### Занятия 11,12,13,14, Двойной, криволинейный интеграл

$$1. \int_0^a dx \int_0^{\sqrt{x}} dy.$$

$$2. \int_2^4 dx \int_x^{2x} \frac{y}{x} dy.$$

$$3. \int_1^2 dy \int_0^{\ln y} e^x dx.$$

$$4. \iint_D xy dx dy \quad (0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2).$$

$$5. \iint_D \frac{x^2}{1+y^2} dx dy \quad (0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1).$$

$$6. \iint_D \frac{y dx dy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}} \quad (0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1).$$

В задачах 7–9 найти пределы двукратного интеграла  $\iint_D f(x, y) dx dy$  при данных (конечных) областях интегрирования  $D$ .

$$7. \text{Параллелограмм со сторонами } x = 3, x = 5, 3x - 2y + 4 = 0, 3x - 2y + 1 = 0.$$

$$8. \text{Треугольник со сторонами } x = 0, y = 0, x + y = 2.$$

$$9. x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0.$$

В задачах 10–14 изменить порядок интегрирования.

$$10. \int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} f(x, y) dx.$$

$$11. \int_1^2 dx \int_x^{2x} f(x, y) dy.$$

$$12. \int_0^2 dx \int_{2x}^{6-x} f(x, y) dy.$$

$$13. \int_0^1 dx \int_0^x f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f(x, y) dy.$$

$$14. \int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy + \int_1^3 dx \int_0^{(3-x)/2} f(x, y) dy.$$

Найти объёмы тел, ограниченных данными поверхностями.

15. Плоскостями координат, плоскостями  $x = 4$ ,  $y = 4$  и параболоидом вращения  $z = x^2 + y^2 + 1$ .

16. Параболоидом  $z = x^2 + y^2$ , цилиндром  $y = x^2$  и плоскостями  $y = 1$ ,  $z = 0$ .

17. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$\oint_L (2x + y) dx + (x + 4y) dy,$$

где  $L$  – замкнутый контур ABCA, образованный прямыми  $y = 0$ ,  $x = 1$ ,  $y = x$ .

18. Вычислить интеграл

$$\int_L x^3 dx + 2xy^2 dy - 3x^2 z dz, \text{ где } L \text{ – отрезок прямой от точки } A(1, 2, -2) \text{ до точки } B(0, -1, 0).$$

## Занятия 15 РГР «Кратные и криволинейные интегралы»

### Задание

1. Построить область интегрирования, вычислить интеграл, изменить порядок интегрирования и вычислить интеграл  $\iint_D 60(y - 2bx) dx dy$ . Область  $D$  ограничена линиями  $y = x^2 + 2bx + c$ ,  $y = kx + d$ .

2. Вычислить двойной интеграл в полярной системе координат  $\iint_D \frac{3c}{\pi} \sqrt{k^2 + cx^2 + cy^2} dx dy$ .

$$D: x^2 + y^2 \leq (2R)^2, \quad x^2 + y^2 \geq R^2.$$

3. Составить тройной интеграл и вычислить объем тела, ограниченного поверхностями  $y = ax^2$ ,  $y = 2ax^2$ ,  $x = c$ ,  $z = 0$ ,  $\frac{ac^3}{60} z = |k| + bx + y$ .

4. Область  $D$  ограничена линиями  $y = ax^2$ ,  $y = 2ax^2$ ,  $x = c$ . Границей области  $D$  является контур  $L$ . Вычислить криволинейный интеграл (обход против часовой стрелки)  $\oint_L (3x - 3ky) dx + (3y + 3kx) dy$  непосредственно и пользуясь формулой Грина.

*Работа должна быть выполнена на листах формата А4. Каждая задача должна заканчиваться словом «Ответ:» и полученным значением.*

## Выбор параметров $a, b, c, d, k, R$ .

№ варианта	Параметры					
	$b$	$c$	$k$	$d$	$a$	$R$
1	1	4	1	4	3	4
2	2	5	2	5	2	3
3	3	6	3	6	1	2
4	1	7	4	10	3	1
5	2	1	5	7	2	7
6	3	2	-1	-10	1	6
7	1	3	-2	0	3	5
8	2	4	-3	-6	2	4
9	3	5	-4	-16	1	3
10	1	6	-5	0	3	2
11	2	7	1	5	2	1
12	3	1	2	-2	1	7
13	1	2	3	4	3	6
14	2	3	4	7	2	5
15	3	4	5	10	1	4
16	1	5	-1	3	3	3
17	2	6	-2	-2	2	2
18	3	7	-3	-11	1	1
19	1	1	-4	-4	3	7
20	2	2	-5	-12	2	6
21	3	3	1	-3	1	5
22	1	4	2	5	3	4

### Раздел 4. Дифференциальные уравнения

#### Занятия 16, 17. Дифференциальные уравнения первого порядка

Найти общее решение дифференциальных уравнений:

1.  $(xy^2 + x)dx + (y - x^2y)dy = 0$ .

2.  $xyy' = 1 - x^2$ .

3.  $yy' = \frac{1 - 2x}{y}$ .

Однородные уравнения

4.  $y' = \frac{y^2}{x^2} - 2$ .

5.  $y' = \frac{x - y}{x + y}$ .

6.  $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ .

7.  $y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$ .

Линейные уравнения и уравнения Бернулли

8.  $y' + 2y = 4x$ .  
 9.  $y' + \frac{1-2x}{x^2} y = 1$ .  
 10.  $y' = \frac{1}{2x - y^2}$ .  
 11.  $y' + 2xy = 2x^3 y^3$ .  
 12.  $y' - y \operatorname{tg} x + y^2 \cos x = 0$ .  
 13.  $y' - y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$ ;  $y(0) = 0$ .

**Занятия 18, 19, 20. Дифференциальные уравнения высших порядков**

**Уравнения высших порядков**

1.  $y'' = x + \sin x$ .  
 2.  $y'' = \ln x$ .  
 3.  $y''' = \frac{1}{x}$ .  
 4.  $y''' = \cos 2x$ .

**Линейные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами**

5.  $y'' + y' - 2y = 0$ .  
 6.  $y'' - 9y = 0$ .  
 7.  $y'' - 4y' = 0$ .  
 8.  $y'' + y = 0$ .  
 9.  $y'' + 6y' + 13y = 0$ .  
 10.  $y'' - 7y' + 6y = \sin x$ .  
 11.  $y'' - 6y' + 9y = 2x^2 - x + 3$ .  
 12.  $y'' - 4y' + 4y = \operatorname{sh} 2x$ .  
 13.  $y'' - 2y' + 10y = 10x^2 + 18x + 6$ ;  $y(0) = 1$ ;  $y'(0) = 3, 2$ .

**Занятие 21. Контрольная работа по теме «Дифференциальные уравнения»**

Примерный вариант контрольной работы.

1.  $y' = \frac{x+y}{x-y}$   
 2.  $xy' + y = -x^2 y^2$ ,  $y(1) = 1$   
 3.  $y'' = \frac{x}{\sqrt{(1-4x^2)^3}}$   
 4.  $y'' - 2y' + y = 9e^{-2x} + 2x - 4$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 1$   
 5.  $y'' - 4y' + 3y = 8e^{5x}$

**Вопросы к экзамену**

1. Первообразная. Неопределенный интеграл. Свойства неопределенного интеграла. Таблица 18 основных интегралов.
2. Простейшие приемы интегрирования. Метод интегрирования по частям.
3. Рациональные и дробно-рациональные функции. Разложение правильной дроби на простейшие. Интегрирование простейших дробей 4-х типов.
4. Схема интегрирования дробно-рациональной функции.
5. Интегрирование тригонометрических функций:

$$\int R(\sin x, \cos x) dx, \int (\sin x)^m \cdot (\cos x)^n dx, \int \sin(mx) \cdot \cos(nx) dx, \\ \int \cos(mx) \cos(nx) dx, \int \sin(mx) \sin(nx) dx.$$

6. Интегралы типа:

$$\int \frac{Mx + N}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx, \int \frac{Mx + N}{ax^2 + bx + c} dx.$$

7. Понятие определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница.
8. Свойства определенного интеграла. Геометрический смысл определенно-го интеграла. Площадь эллипса.



9. Как определяется функция нескольких переменных? Дайте определение непрерывности функции нескольких переменных.
10. Что называется частной производной функции нескольких переменных?
11. Как вычисляется производная по направлению и какова ее связь с градиентом функции?
12. Сформулируйте правило исследования функции двух переменных на экстремум.
13. Какие задачи приводят к понятию криволинейного интеграла? Как вычисляется криволинейный интеграл?
14. Как влияет на значение криволинейного интеграла направление обхода контура интегрирования?
15. Каковы условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования?
16. Какова связь независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования и равенства нулю криволинейного интеграла по любому замкнутому контуру?
17. Понятие двойного и тройного интегралов. Вычисление в декартовой системе координат.
18. Вычисление двойного интеграла в полярной системе координат.
19. Вычисление тройного интеграла в сферической системе координат.
20. Что называется частным решением дифференциальных уравнений?
21. Что называется общим решением дифференциального уравнения?
22. Какой вид имеет дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными? Как найти общее решение (общий интеграл) этого уравнения?
23. Какое уравнение называется однородным дифференциальным уравнением первого порядка? Как найти его общий интеграл?
24. Каковы свойства решений линейных однородных уравнений второго порядка?
25. Какой вид имеет общее решение линейного однородного уравнения второго порядка?
26. Укажите вид общего решения линейного неоднородного уравнения второго порядка.

### 3 семестр

#### Раздел 5. Ряды

##### Занятия 1, 2, 3. Числовые ряды. Признаки сходимости знакопостоянных рядов.

Найти сумму ряда.

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{9n^2 + 12n - 5}.$$

$$2. \sum_{n=3}^{\infty} \frac{4 - 5n}{n(n-1)(n-2)}.$$

Исследовать сходимость.

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^3(n\sqrt{n})}{n\sqrt{n}}.$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 \frac{n\pi}{2}}{n(n+1)(n+2)}.$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n}.$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n (n+1)!}{(2n)!}.$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(n+2)!}.$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n-5}{e^{3n}}.$$

$$9. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n}.$$

##### Занятия 4,5. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость.

Исследовать абсолютную или условную сходимость.

$$1. 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots$$

$$2. \frac{1}{2\ln 2} - \frac{1}{3\ln 3} + \frac{1}{4\ln 4} - \dots$$

$$3. -\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 4} - \frac{1}{3 \cdot 8} + \frac{1}{4 \cdot 16} - \dots$$

$$4. \sin \frac{\pi}{\sqrt{2}} - \sin \frac{\pi}{\sqrt{3}} + \sin \frac{\pi}{\sqrt{4}} - \dots$$

$$5. -\frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} + \frac{1}{17} - \dots$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{\sqrt{n+2}}{n^3+6}.$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+2}.$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sqrt{n+1}}{n^2}.$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 4n}{n^2+3n+2}.$$

**Занятия 6,7,8. Функциональные ряды: степенные ряды, ряды Тейлора и Маклорена.**

Найти область сходимости степенного ряда:

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n x^n}{4^n \cdot \sqrt{n}}.$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{2^n + 5^n}.$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n x^n}{3^n + 5^n}.$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{4^n \cdot \sqrt[5]{n+3}}.$$

Указанную функцию разложить в ряд Маклорена

$$5. -3 \ln(1+2x^2) + \cos x.$$

$$6. \sqrt[5]{1-5x}.$$

$$7. \frac{1}{\sqrt[5]{1+5x}}.$$

$$8. \frac{1}{(2+x)^2}.$$

Вычислить приближенно с точностью до  $10^{-4}$ .

$$9. \ln 1,1.$$

$$10. \sqrt[4]{17}.$$

$$11. \int_0^{1/4} e^{-x^2} dx.$$

$$12. \int_0^{1/5} \sqrt[3]{1+x^2} dx.$$

Вычислить предел, используя разложение функций в ряд Тейлора.

$$13. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1 - x^2}{x^4}.$$

$$14. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x + x \sin x - 2}{x^4}.$$

Получить решение дифференциального уравнения в виде степенного ряда или ряда Тейлора.

$$15. y' = xy + 1, y(0) = 1.$$

$$16. y' = x - y^2, y(0) = 0.$$

**Занятие 9. Контрольная работа по теме «Ряды».**

**Примерный вариант контрольной работы.**

$$1. \text{ исследовать сходимость } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!};$$

$$2. \text{ исследовать абсолютную и условную сходимость}$$

$$a. -\frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} + \frac{1}{17} - \dots; \quad b. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot 2n}{(n+1)!};$$

$$3. \text{ найти область сходимости степенного ряда } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{7^n \cdot \sqrt[5]{n^3}};$$

$$4. \text{ получить 4 члена разложения в ряд Маклорена:}$$

$$a. \sqrt[4]{1-4x}; \quad b. -\ln(1+2x^2) + 2x \sin 2x;$$

$$5. \text{ найти 4 первых, отличных от нуля члена разложения в ряд Маклорена функции } y = f(x), \text{ являющейся решением дифференциального уравнения } y'' = x^2 y, y(0) = 1, y'(0) = 1.$$

$$6. \text{ вычислить с точностью до } 0,001 \int_0^{0,25} x \ln(1 + \sqrt{x}) dx.$$

**Раздел 6. Теория вероятностей и математическая статистика**

**Занятия 10, 11. Элементы комбинаторики. Классическое определение вероятности.**

1. Каким числом способов 5 человек могут находиться в очереди?

2. Билет в автобус имеет шестизначный номер. Сколько существует номеров, у которых все цифры различные?

3. Сколько существует пятизначных чисел, которые делятся на 5?

4. Сколькими способами из 25 студентов группы можно:

- а) выбрать актив в составе: староста, его заместитель, профорг;  
 б) выбрать трех дежурных?
5. На клумбе растут 9 красных и 6 белых роз. Сколькими способами из них можно составить букет из 3 белых и 2 красных роз?
6. Шесть ящиков различных материалов доставляются на 5 этажей стройки. Сколькими способами можно распределить ящики по этажам
7. Лифт с четырьмя пассажирами останавливается на 8 этажах. Сколькими способами пассажиры могут выйти из лифта?
8. Монету подбрасывают два раза. Описать пространство элементарных исходов и события:  
 А – первый раз выпал герб;  
 В – один раз выпал герб;  
 С – выпал хотя бы один герб.  
 Являются ли совместными события А и В? В и С?
9. Образуют ли полную группу событий следующие события:  
 а) испытание: бросание монеты, события:  $A_1$  – появление герба,  $A_2$  – появление решки.  
 б) испытание: бросание двух монет, события:  $B_1$  – появление двух гербов,  $B_2$  – появление двух решек.  
 в) испытание: два выстрела по мишени, события:  $C_1$  – одно попадание,  $C_2$  – два попадания,  $C_0$  – ни одного попадания.  
 г) испытание: два выстрела по мишени, события:  $D_1$  – хотя бы одно попадание,  $D_2$  – хотя бы один промах.
10. Выполнить действия:  $A+\emptyset$ ;  $A+\Omega$ ;  $A+A$ ;  $A\cdot\emptyset$ ;  $A\cdot\Omega$ ;  $A\cdot A$ .
11. Среди студентов, пришедших на лекцию, наугад выбирают одного. Событие А – студент юноша, В – студент не курит, С – студент живет в общежитии. Описать события  $\overline{ABC}$ ,  $(A+B)C$ .  
 При каком условии будет иметь место равенство  $ABC=A$ ?  
 Когда будет справедливо соотношение  $\overline{C} = B$ ?
12. Какова вероятность выпадения хотя бы одного герба при двукратном бросании монеты?
13. Два игрока бросают игральные кости. Какова вероятность того, что сумма выпавших очков равна 10?
14. Какова вероятность того, что 7 случайно выбранных человек родились в разные дни недели?
15. В коробке 10 красных, 6 синих и 8 зеленых карандашей. Наугад вынимают три из них. Какова вероятность, что  
 а) все они разных цветов;  
 б) все они красные;  
 в) среди них два красных;  
 г) среди них два красных и один синий;  
 д) все они желтые?
16. Из 200 кур 50 белых, 100 красных и 50 полосатых, из 25 петухов 6 белых, 14 красных и 5 полосатых. Предполагая, что скрещивание происходит случайно, найти вероятность белой пары.
17. Наудачу выбирается шестизначное число. Какова вероятность, что число является палиндромом, т.е. одинаково читается как слева направо, так и справа налево?
18. В лифт шестизэтажного дома на первом этаже вошли 4 человека. Каждый из них с равной вероятностью выходит на любом этаже, начиная со второго. Какова вероятность, что трое выйдут на одном этаже?
19. Каждый из 5 шаров случайным образом кладут в один из 6 ящиков. Какова вероятность, что все шары попадут в разные ящики?
20. В первой части курса из 20 вопросов студент знает 15, во второй части – из 10 знает 5. Какова вероятность того, что студент ответит на произвольные 2 вопроса, один из которых из первой части, а другой из второй?
21. Среди 12 цыплят 5 курочек. Какова вероятность того, что из выбранных наудачу 4 цыплят 2 курочки?
22. Из колоды в 36 карт выбирают 4 карты. Какова вероятность того, что 3 из них красные?
- Занятие 12. Теоремы сложения и умножения.**
1. Студент пришёл на экзамен, зная лишь 50 из 60 вопросов программы. Экзаменатор задал студенту 3 вопроса. Найти вероятность того, что студент знает все эти вопросы.
2. Определить вероятность того, что при трёхкратном бросании игральной кости ни разу не выпадет одно очко.
3. Два человека больны заболеванием, для которого коэффициент выздоровления составляет 98%. Найти вероятность того, что они оба выздоровеют.
4. Какова вероятность того, что из колоды в 36 игровых карт будут подряд вынуты 2 туза?
5. Всхожесть семян огурцов равна 0,9. Найти вероятность того, что из двух посаженных семян хотя бы одно не взойдёт.
6. Игральная кость бросается два раза. Найти вероятность того, что хотя бы один раз выпадет «шестёрка».
7. Из колоды в 36 карт наудачу вынимается одна. Определить вероятность того, что это будет карта пиковой масти или туз.
8. Посадили по одному саженцу яблони и груши. Вероятность того, что приживётся саженец яблони, равна 0,9, саженец груши – 0,8. Найти вероятность того, что  
 а) оба саженца приживутся;

- б) приживётся хотя бы один саженец;  
 в) ни один саженец не приживется;  
 г) приживется ровно один саженец.

9. В урне 2 белых, 3 чёрных и 5 красных шаров. Наугад извлекают три шара. Найти вероятность, что они одного цвета.

10. Три стрелка выстрелили по мишени по одному разу. Вероятность попадания для них 0,9; 0,8 и 0,7 соответственно. Найти вероятность, что мишень поражена не более одного раза.

11. Студент подготовил к экзамену 30 из 40 вопросов. На экзамене ему выдают два обязательных вопроса. Если он ответит на них, ему выдают два дополнительных вопроса, из которых для сдачи экзамена необходимо ответить хотя бы на один. Найти вероятность, что студент сдаст экзамен.

### Занятия 13, 14. Формула полной вероятности, формулы Байеса. Схема Бернулли.

1. Станок 30% времени обрабатывает деталь А и 70% – деталь В. При обработке детали А он простаивает 10% времени, а детали В – 15%. Какова вероятность застать станок простаивающим? Найти вероятность, что станок, который застали простаивающим, находился в режиме обработки детали В.

2. Три монтажника ведут сборку однотипных приборов, причём производительность их труда соотносится как 2:3:5. Вероятности сборки прибора отличного качества у них равны соответственно 0,8; 0,6 и 0,6. Найти вероятность, что взятый наудачу изготовленный ими прибор окажется отличного качества. Какова вероятность того, что прибор изготовлен первым рабочим, если он оказался отличного качества?

3. В первой урне 4 белых и 6 чёрных шаров, во второй 5 белых и 4 чёрных. Из первой урны во вторую перекладывают, не глядя, один шар, после чего из второй урны извлекают один шар. Найти вероятность, что этот шар белый. Какова вероятность, что из первой во вторую урну был переложён чёрный шар, если извлечённый из второй урны шар оказался белым?

4. В первой урне 3 белых и 2 чёрных шара, во второй 3 белых и 5 чёрных. Из первой во вторую перекладывают, не глядя, два шара, после чего из второй урны извлекается шар. Найти вероятность того, что этот шар окажется белым. Какова вероятность того, что из первой во вторую урну были переложены чёрный и белый шары, если из второй урны извлечён белый шар?

5. Вероятность того, что телевизор безотказно проработает гарантийный срок, равна 0,8. Закупили 4 телевизора. Какова вероятность, что

- а) три телевизора не проработают гарантийный срок;  
 б) не менее двух телевизоров проработают гарантийный срок.

6. Что более вероятно: выиграть у равносильного противника

- а) три партии из четырех или хотя бы три из восьми;  
 б) три партии из четырех или пять из восьми;  
 в) не менее трех из четырех или не менее пяти из восьми?

7. Известно, что вероятность выиграть хотя бы по одному лотерейному билету из трех равна 0,271. Какова вероятность выиграть по всем трем билетам?

### Занятие 15. Одномерная дискретная СВ.

1. Дан закон распределения одномерной дискретной случайной величины.

$X$	-1	0	2	4
$p$	0,2	$a$	0,3	0,2

Найти

- а) параметр  $a$ ;  
 б) математическое ожидание  $M(X)$ ;  
 в) дисперсию  $D(X)$ .

2. Даны законы распределения двух независимых случайных величин:

$X$	3	4	5
$p$	1/3	1/3	1/3

$Y$	1	2
$q$	1/2	1/2

$X$  – выручка фирмы,  $Y$  – затраты,  $Z=X-Y$  – прибыль. Найти математическое ожидание случайной величины  $Z$ .

3. Даны законы распределения двух независимых случайных величин:

$X$	0	2	4
$p$	0,8	0,1	0,1

$Y$	-2	0	2
$q$	0,5	0,2	0,3

Найти закон распределения случайной величины  $Z=XY$ .

4. Ведётся стрельба до первого попадания, но не свыше 5 выстрелов. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,7.  $X$  – число произведённых выстрелов. Найти закон распределения, математическое ожидание и дисперсию случайной величины  $X$ .
5. По мишени одновременно стреляют 4 стрелка с вероятностью попадания 0,6 для каждого.  $X$  – число попаданий. Найти закон распределения, математическое ожидание и дисперсию случайной величины  $X$ .
6. Из партии в 10 деталей, среди которых 4 бракованных, произвольным образом выбраны 3 детали.  $X$  – число бракованных деталей среди отобранных. Найти закон распределения, математическое ожидание и дисперсию случайной величины  $X$ .
7. В партии из 10 деталей содержится 7 деталей первого сорта. Случайным образом одну за другой без возвращения извлекаем детали до появления детали первого сорта.  $X$  – число попыток. Найти закон распределения, математическое ожидание и дисперсию случайной величины  $X$ .
8. В семье 4 ребенка.  $X$  – число мальчиков. Построить ряд распределения, вычислить математическое ожидание и дисперсию. (Считать вероятности рождения мальчика и девочки равными).

#### Занятие 16 Одномерная непрерывная СВ.

1. Функция распределения задана в виде 
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1, \\ \frac{x-1}{2}, & 1 < x \leq 3, \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

Вычислить математическое ожидание, дисперсию,  $P(2,5 < X < 3,5)$ .

2. Функция распределения задана в виде 
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ Cx^2, & 0 < x \leq 3, \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

Найти параметр  $C$ , вычислить математическое ожидание и дисперсию.

3. Функция распределения задана в виде 
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1, \\ a(x-1)^2, & 1 < x \leq 3, \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

Вычислить значение параметра  $a$  математическое ожидание, дисперсию,  $P(\frac{1}{2} < X < 2)$ .

4. Случайная величина определяется плотностью 
$$f(x) = \begin{cases} Ax^2 + \frac{1}{3}, & x \in (0;1), \\ 0, & x \notin (0;1). \end{cases}$$

Найти параметр  $A$ , математическое ожидание, дисперсию.

5. Случайная величина определяется плотностью  $f(x) = \frac{a}{1+x^2}$ . Найти параметр  $a$ , функцию

распределения  $F(x)$  и  $P(|X| \leq 1)$ .

#### Занятия 17,18. Двумерная дискретная СВ.

1. Дан закон распределения двумерной случайной величины

$X \backslash Y$	-1	0	1	2
1	0,10	0,25	0,30	0,15
2	0,10	0,05	0	0,05

Вычислить корреляционный момент случайных величин  $X$  и  $Y$ .

2. Дан закон распределения двумерной случайной величины

$X \backslash Y$	-1	0	1
1	0,15	0,30	0,35
2	0,05	0,05	0,10

Вычислить коэффициент корреляции случайных величин  $X$  и  $Y$ .

3. Из урны, содержащей 6 белых и 4 черных шара, наудачу извлекают 2 шара. Случайная величина  $X$  – число белых шаров среди выбранных,  $Y$  – число черных шаров среди выбранных. Составить закон распределения случайного вектора  $(X, Y)$ .

4. Игральную кость подбрасывают два раза. Рассматривают две случайные величины:  $X$  – число выпадений единицы и  $Y$  – число выпадений шестерки. Построить матрицу распределения двумерной СВ  $(X, Y)$  и найти

коэффициент корреляции.

### Занятие 19. Нормальное распределение.

1. Случайная величина имеет нормальное распределение с параметрами  $\mu = 1,5$  и  $\sigma = 10$ . Записать аналитическое выражение плотности распределения, функции распределения. Найти математическое ожидание и дисперсию.
2. Годовое потребление угля на некотором предприятии зависит от климатических условий года и является случайной величиной, распределенной по нормальному закону со средним, равным 300 тоннам и средним квадратическим отклонением, равным 5 тоннам. В плановом отделе предприятия решили, что запаса 310 тонн хватит на год с вероятностью 0,99. Правильно ли вычислили вероятность? Если неправильно, то определите, сколько угля надо запастись, чтобы с вероятностью 0,99 его хватило на год.
3. Расход бензина на 100 км для исправного автобуса – случайная величина, подчиняющаяся нормальному закону распределения со средним, равным 15 кг, и средним квадратическим отклонением, равным 2 кг. На автобазе составлена инструкция, согласно которой, автобус отправляется в ремонт, если при испытании он расходует более 20 кг бензина на 100 км. Найти вероятность отправки в ремонт исправного автобуса. Как надо составить инструкцию, чтобы эта вероятность была 0,01?
4. В некоторой стране рост юношей призывного возраста – случайная величина, подчиняющаяся нормальному закону, со средним 180 см и средним квадратическим отклонением 10 см. призывника берут в гвардию, если его рост не меньше 200 см. какова доля призывников, попадающих в гвардию? Как надо изменить инструкцию, чтобы в гвардию призывать 10% новобранцев?
5. Известно, что масса деталей распределена по нормальному закону со средним 10 кг и средним квадратическим отклонением 250 г. Найти вероятность того, что масса случайно выбранной детали будет:  
а) превышать среднее значение детали не более чем на 500г;  
б) отклоняться от среднего значения не более, чем на 500 г.

### Занятие 20. Контрольная работа по теме «Теория вероятностей и математическая статистика»

Задание 1. В партии из 19 деталей имеется 5 стандартных. Определите, сколькими способами можно отобрать 4 детали, чтобы среди них были 3 стандартных.

Задание 2. Среди 28 студентов группы, в которой 16 девушек, разыгрывается 7 билетов в кино. Найдите вероятность того, что среди обладателей билетов окажутся 3 девушки.

Задание 3. В коробке 8 красных карандашей. Определите, сколько зеленых карандашей надо положить в коробку, чтобы после этого вероятность извлечь из коробки один красный карандаш была не более 0,4.

Задание 4. Вероятность правильного оформления счета на предприятии 0,94. Во время аудиторской проверки были взяты два счёта. Какова вероятность того, что: а) хотя бы один из них оформлен правильно, б) только один из них оформлен правильно, в) оба оформлены правильно, г) оба оформлены неправильно?

Задание 5. На город примерно 103 дней в году дует ветер с севера и 199 дней в году – с запада.

Промышленные предприятия, расположенные на севере, производят выброс вредных веществ каждый третий день, а расположенные на западе – в последний день каждой недели. Как часто город подвергается воздействию вредных выбросов?

Задание 6. Завод-изготовитель отправил на базу 1000 доброкачественных изделий. Число изделий поврежденных при транспортировке, составляет в среднем 0,003%. Найдите вероятность того, что на базу поступит: а) 3 поврежденных изделия, б) хотя бы одно поврежденное изделие, в) не более трех поврежденных изделий.

Задание 7. На складе находятся детали, изготовленные на трёх заводах. Объём продукции первого завода составляет 23 %, второго – 45 %. Известно, что средний процент бракованных изделий для первого завода равен 3%, для второго – 2%, для третьего – 1%. Из партии наудачу взято одно изделие, и оно оказалось бракованным. Какова вероятность того, что оно произведено на втором заводе?

Задание 8. Закон распределения дискретной случайной величины имеет вид:

X	-2	-1	0	3	4
P	0,2	0,1	0,2		

Найдите вероятности, и дисперсию, если математическое ожидание равно  $M(X) = 1,1$

Задание 9. Заключен договор на строительство трех одинаковых объектов. Вероятность сдачи объекта в срок равна 0,95. Найдите закон распределения случайной величины X – числа объектов, сданных в срок. Найдите математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины.

Задание 10. Плотность распределения непрерывной случайной величины имеет вид:

$$p(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ kx^2 & \text{при } 0 < x \leq 2, \\ 0 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

Найдите:

- параметр  $k$ ;
- функцию распределения;

$$\left(3 - \frac{1}{2}, 3 + \frac{1}{2}\right)$$

в) вероятность попадания случайной величины в интервал

г) математическое ожидание и дисперсию.

Постройте графики плотности и функции распределения.

#### Вопросы к экзамену

- Какой ряд называется сходящимся (расходящимся)?
- Сформулируйте необходимое условие сходимости ряда.
- Сформулируйте признаки сравнения знакоположительных рядов.
- В чем состоит признак Даламбера?
- Для каких рядов применяется признак Лейбница? В чем его сущность?
- Как найти радиус сходимости степенного ряда?
- Как вычисляются коэффициенты ряда Маклорена для заданной функции?
- 
- Напишите разложения в ряд Маклорена функций:

$$e^x, \sin x, \cos x.$$

- Напишите разложения в ряд Маклорена функций:

$$\arctg x, \arcsin x, (1+x)^n.$$

- Как используются степенные ряды в приближенных вычислениях?
- Сформулируйте классическое определение вероятности события.
- Сформулируйте теоремы сложения и умножения вероятностей.
- Дайте определение полной группы событий.
- Какие случайные величины называются дискретными (непрерывными)?
- Каковы свойства математического ожидания и дисперсии случайной величины.
- Запишите различные формулы для вычисления дисперсии случайной величины.
- Как связаны функция распределения и плотность распределения вероятностей случайной величины?
- Как найти вероятность попадания случайной величины в заданный интервал?
- Какая случайная величина называется нормально распределенной?
- Что такое «правило трех сигм»?
- Напишите формулы для вычисления выборочных числовых характеристик.
- Как найти доверительный интервал для математического ожидания нормально распределенной случайной величины (при известном  $\sigma$ ; при неизвестном  $\sigma$ )?
- Как найти доверительный интервал для среднего квадратического отклонения нормально распределенной случайной величины?

#### Литература

Список рекомендуемой литературы

- Высшая математика:** учебник / В.С. Шипачев. — Москва: ИНФРА-М, 2019. — 479 с. — (Высшее образование). — [www.dx.doi.org/10.12737/5394](http://www.dx.doi.org/10.12737/5394). - Текст: электронный. - URL: <http://znanium.com/catalog/product/990716>
- Ячменёв, Л.Т. **Высшая математика:** учебник / Л.Т. Ячменёв. — Москва: РИОР: ИНФРА-М, 2013. — 752 с. — (Высшее образование: Бакалавриат). - ISBN 978-5-369-01032-7 (РИОР); ISBN 978-5-16-005400-1 (ИНФРА-М). - Текст: электронный. - URL: <http://znanium.com/catalog/product/344777>

3. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов, Т.1, - М.: Интеграл – Пресс, 2006
4. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов, Т.2 , - М.: Интеграл – Пресс, 2006

Составитель Бурков Сергей Николаевич

## МАТЕМАТИКА

Методические указания по проведению практических занятий

Печатается в авторской редакции

Издательский центр НГАУ

630039, Новосибирск, ул. Добролюбова