НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНЖЕНЕРНЫЙ ИНСТИТУТ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Учебно-методическое пособие

Допущено Министерством сельского хозяйства Российской федерации в качестве учебного пособия для студентов высших аграрных учебных заведений, обучающихся по инженерным специальностям.

Издание второе, стереотипное

Новосибирск 2017

Кафедра высшей математики

УДК 517.2

ББК 22.161.1

Д 50

Составители: М.В.Грунина, В.Н.Бабин, Р.Т.Бильданов,

Рецензенты: В.П.Ильин, д-р.физ.-мат.наук, проф.,
М.С.Соппа, д-р.физ.-мат.наук, проф.

Дифференциальное исчисление: учеб.-метод. пособие / сост.: М.В.Грунина, В.Н.Бабин, Р.Т.Бильданов; Новосиб. гос. аграр. ун-т. Инженерный институт – Новосибирск, 2017 – 91 с.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов всех форм обучения по направлениям подготовки, реализуемым в ФГБОУ ВО Новосибирский ГАУ

Предисловие

В настоящее время математическим анализом называют часть математики, которая изучает дифференциальное и интегральное исчисление. Систематическое учение о производных – дифференциальное исчисление – было развито немецким математиком и философом Г.Лейбницем (1646 – 1716) и английским математиком и основателем современного математического естествознания И.Ньютоном (1643 – 1727).

Термин «функция» был введён Лейбницем, но долго под ним подразумевались лишь функции, заданные каким-либо аналитическим выражением. Во времена Л.Эйлера функции, заданные в различных частях интервала разными уравнениями, не считались «настоящими» функциями. Но уже в 1822 г. французский математик Фурье в своих исследованиях пользовался по существу самым общим понятием функции, хотя явно и не сформулировал определение этого понятия.

Современное определение числовой функции, в котором это понятие освобождалось от способа задания, было дано независимо друг от друга русским математиком Н.И.Лобачевским в 1834 г. и немецким математиком Л. Дирихле в 1837 г. Основная идея этих определений заключалась в следующем: не существенно, каким образом каждому x поставлено в соответствие определённое значение $f(x)$, важно только, что это соответствие установлено.

Современное же понятие функции с произвольными областями определения и значений (не обязательно числовыми), а также современная терминология и обозначения сформировались в первой половине XX в.

Наглядный смысл понятия предела функции был ясен математикам XVII в. Они умели фактически правильно находить пределы. Но строгие определения понятий предела последовательности и предела функции, сохранившиеся до наших дней, были даны лишь французским математиком О.Коши (1789 – 1857) и далеко не сразу были всем понятны.

Лозунг многих математиков XVII в.: «Двигайтесь вперёд, и вера в правильность результатов к вам придёт».

Только после работ Коши в течение XIX в. начала математического анализа получили логическое обоснование. Для этого, в частности, была необходима строгая теория действительных чисел. А она была развита только во второй половине XIX в. Вейерштрассом, Дедекиндом и Кантором.

Введение

§1. Элементы теории множеств

Определение. Множество – совокупность некоторых объектов. Все объекты различны и отличимы друг от друга. Объекты, из которых состоит множество, называются его элементами.

Традиционно множества обозначаются заглавными буквами латинского алфавита ($A, B, X, Y, M, \ldots$), а их элементы – малыми буквами ($a, b, x, y, m, \ldots$).

Запись $a \in A$ означает, что элемент a принадлежит множеству A; $a \notin A$ означает, что элемент a не принадлежит множеству A.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется пустым и обозначается символом Ø.

В дальнейшем используются следующие обозначения:

1. $\forall$ – квантор общности,
$\forall a \in A$ – «для любого элемента a из множества A»;
2. $\exists$ – квантор существования,
$\exists a \in A$ – «существует элемент a из множества A»;
3. $\mid$ – «такой, что», «обладающий свойством»;
4. $\Rightarrow$ – «следовательно»;
5. $\Leftrightarrow$ – «тогда и только тогда», «равносильно».

В конкретных рассуждениях все элементы рассматриваемых множеств являются элементами некоторого одного множества U (которое определяется для каждого случая индивидуально), которое называется универсальным множеством, или универсумом.

Способы задания множеств:

1. Перечислением, т.е. списком элементов множества:
$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$;

2. Описанием характеристических свойств, которыми должны обладать элементы множества: $A = \{a \mid P(a)\}$;

3. Порождающей процедурой, которая описывает способ получения новых элементов множества из уже полученных или других объектов: $A = \{a \mid a := f(b)\}$.

Пример. 1. $A = \{2, 4, 6, 8, ...\}$;

2. $A = \{n \mid n \in N, n$ – четное$\}$;

3. $A = \{n \mid n = 2k, k \in N\}$.

Множества, элементами которых являются числа, называются числовыми.

Пример. **N** $= \{1; 2; 3; ...; n; ...\}$ – множество натуральных чисел;

Z $= \{0; \pm 1; \pm 2; ...; \pm n; ...\}$ – множество целых чисел;

Q $= \{\frac{m}{n} \mid m \in Z, n \in N\}$ – множество рациональных чисел;

R – множество действительных (вещественных) чисел.

Множество A является подмножеством множества B, если каждый элемент множества A является элементом множества B:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B).$$

Два множества равны, если они являются подмножествами друг друга:

$$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \text{ и } B \subseteq A).$$

Мощностью конечного множества называется величина, равная числу элементов этого множества. Мощность множества A обозначается $|A|$. Если $|A| = |B|$, то множества A и B называются равномощными.

Операции над множествами

1. Объединение: $A \bigcup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}$;

2. Пересечение: $A \bigcap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$;

3. Разность: $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}$;

4. Симметрическая разность:

$A \Delta B = \{x \mid (x \in A \text{ и } x \notin B) \text{ или } (x \notin A \text{ и } x \in B)\}$;

5. Дополнение: $\overline{A} = \{x \mid x \notin A\}$.

Диаграммой Эйлера-Венна называется геометрическое представление множеств. На диаграмме множества изображаются фигурами, ограниченными замкнутыми линиями (например, кругами). Для выделения результата операций используется штриховка.

Упорядоченной парой называется набор (a,b), где a и b – объекты, из которых состоит пара.

Две упорядоченные пары равны, если равны элементы, стоящие на соответствующих местах:

$$(a,b) = (c,d) \Leftrightarrow a = c \text{ и } b = d .$$

Аналогично определяется упорядоченный набор из трех и более элементов.

Декартовым произведением двух множеств A и B называется множество всех возможных упорядоченных пар, в которых первый элемент принадлежит множеству A, а второй – множеству B:

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Теорема (о мощности декартова произведения)

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|.$$

Пример. Пусть $X = \{1,2,3\}$, $Y = \{a,b\}$.

Найти $X \times Y$, $Y \times X$, Y^2.

Решение:

$X \times Y = \{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b)\}$;

$Y \times X = \{(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3)\}$;

$Y^2 = \{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b)\}$.

§2. Бинарные отношения

Отношением называется один из способов задания взаимосвязей между элементами множеств. Рассмотрим унарные и бинарные отношения. Унарное (одноместное) отношение отражает наличие некоторого признака R у элементов множества A. Бинарное (двуместное) отношение определяет взаимосвязи, существующие между элементами множеств A и B.

Определение. Бинарным отношением R из множества A в множество B называется некоторое подмножество декартова произведения $A \times B$, т.е. $R \subseteq A \times B$. Обозначается

$$aRb \Leftrightarrow (a,b) \in R.$$

Областью определения бинарного отношения R называется множество R; областью значений бинарного отношения R называется множество $\operatorname{Im} R = \{b \mid \exists a \ (a,b) \in R\}$.

Образом элемента $a \in A$ относительно отношения R называется множество

$$\operatorname{im}_R a = \{b \in B \mid (a,b) \in R\};$$

прообразом элемента $b \in B$ относительно отношения R называется множество

$$B;$$

образом множества $X \subseteq A$ относительно отношения R называется множество

$$R(X) = \bigcup_{x \in X} \operatorname{im}_R x;$$

прообразом множества $Y \in B$ относительно отношения R называется множество

$$f \cdot$$

Свойства бинарных отношений

Бинарное отношение R на множестве A называется

– рефлексивным, если $\forall a \in A \ (a,a) \in R$;

– антирефлексивным, если $\forall a \in A \ (a,a) \notin R$;

– симметричным, если $\forall (a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R$;

– антисимметричным, если

$\forall a,b \in R,\ \textit{если}\ (a,b) \in R\ \textit{и}\ (b,a) \in R,\ \textit{то}\ a=b$;

– транзитивным, если

$\forall a,b,c \in R \ (a,b) \in R,\ (b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R$.

Бинарное отношение, обладающее свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности, называется отношением эквивалентности на множестве A. Отношение эквивалентности разбивает множество A на классы эквивалентности по отношению R.

Отношением нестрогого порядка на множестве R называется бинарное отношение, обладающее свойствами рефлексивности, антисимметричности и транзитивности. Антирефлексивное, антисимметричное и транзитивное отношение R на множестве A называется отношением строгого порядка.

Определение. Бинарное отношение f из A в B называется функциональным (функцией), если образом любого элемента a из области определения f является единственный элемент b из области значений f, т.е. если $(a,b) \in f$ и $(a,c) \in f$, то $b=c$. Обозначается $f(a)=b$. В этом случае a называется аргументом функции, b – значением функции.

Областью определения функции f называется множество

$$\mathrm{Dom}\, f = \{a \in A \,|\, \exists b \in B \,|\, b = f(a)\};$$

областью значений функции f называется множество

$$\operatorname{Im} f = \{b \in B \big| \exists a \in A \big| b = f(a)\}.$$

Функция f называется всюду определенной, если $\operatorname{Dom} f = A$; частично определенной, если $\operatorname{Dom} f \subset A$.

Функция f из A в B обозначается $f: A \to B$.

Функция $f: A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \to B$ называется n-местной, имеющей n аргументов:

$$f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = b, \text{ где } a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n.$$

§3. Функции одного переменного

Для функций действительного переменного их области определения D и области значений E принадлежат множеству действительных чисел R. Если обозначить функцию символом f, а элементы D и E – символами x и y, то функция f сопоставляет по определенному *правилу* каждому элементу $x \in D$ единственное значение $y \in E$, что записывается в виде:

$$f: D \to E \quad \text{или} \quad y = f(x).$$

По традиции x называют *независимой переменной* (*аргументом*), а y – *зависимой переменной* – *функцией*. Иногда функцию обозначают тем же символом, что и значение, и пишут $y = y(x)$.

Способы задания функций: 1) аналитический (т.е. математической формулой, называемой *аналитическим выражением* и дающей возможность вычислить значение функции); 2) графический; 3) при помощи таблицы; 4) при помощи словесного описания.

Функция *определена* для $x \in R$, если значение $f(x)$ конечное и действительное. Множество значений x, для которых функция определена, образует *область определения* (*область существования*) $D \subset R$. В простейших случаях D

есть открытый промежуток (интервал) $(a; b)$: $a < x < b$, или полуоткрытые промежутки [a, b): $a \le x < b$, $(a, b]$: $a < x \le b$, или закрытый промежуток (отрезок, сегмент) $[a, b]$: $a \le x \le b$, где a и b – некоторые числа или символы $-\infty$ и $+\infty$ (в последних случаях равенства исключаются). Если функция задана аналитически и об области определения ничего не сказано, то ее считают множеством всех чисел, при которых формула, задающая значение функции, имеет смысл, и называют *естественной областью определения функции* $D(f)$.

Множество всех значений, которые функция принимает на элементах своей области определения, есть *область значений* $E \subset R$.

Считая, что x – некоторая точка M числовой оси, а соответствующее значение $y = f(x)$ – точка M' другой числовой оси, функцию называют *отображением*. Тогда точка M' – *образ* точки M, а точка M – *прообраз* точки M'.

Сложная функция. Если функция $y = f(u)$ отображает область определения E в область значений L, а функция $u = g(x)$ отображает свою область определения D в область значений E_1, при этом $E_1 \subset E$, тогда *сложная функция* $y = f(g(x))$ отображает D в L.

Неявная функция. Пусть дано уравнение вида $F(x, y) = 0$ и пусть существует такое множество X, что для каждого $x_0 \in X$ существует по крайней мере одно число y, удовлетворяющее уравнению $F(x_0, y) = 0$. Обозначим одно из таких чисел через y_0 и поставим его в соответствие числу x_0. В результате имеем функцию f, определенную на множестве X, и такую, что $F(x_0, f(x_0)) = 0$ для всех $x_0 \in X$. В этом случае говорят, что функция f *задается неявно* уравнением $F(x, y) = 0$.

Основные элементарные функции: постоянная $y = C$ (C – const); степенная $y = x^{\alpha}$; показательная $y = a^{x}$ ($a > 0$, $a \neq 1$); логарифмическая $y = \log_a x$, ($a > 0$, $a \neq 1$); тригонометрические $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$; обратные тригонометрические $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$.

Элементарной функцией называется всякая функция, которая может быть явным образом задана с помощью формулы, содержащей лишь конечное число арифметических операций и композиций (суперпозиций) основных элементарных функций.

Классы элементарных функций.

1. *Целые рациональные функции*:

$$y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n,\ a_i = const$$

$(i = \overline{0, n})$. Сумма, разность и произведение целых рациональных функций есть целая рациональная функция.

2. *Дробные рациональные функции:*

$$y = \frac{a_o x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_o x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m}.$$

Заметим, что класс целых рациональных функций содержится в классе дробных рациональных функций.

3. *Алгебраические функции*: между y и x существует зависимость вида

$$p_o(x) y^n + p_1(x) y^{n-1} + \ldots + p_{n-1}(x) y + p_n(x) = 0,$$

где $p_o(x), p_1(x), \ldots, p_n(x)$ – многочлены относительно x. Классы 1, 2 содержатся в классе алгебраических функций.

4. *Трансцендентные функции* – это всякие функции, не являющиеся алгебраическими. Можно показать, что показательная, логарифмическая, прямые и обратные тригонометрические функции являются трансцендентными.

Пример. Найти область определения $D(f)$ функции $y = \arcsin(1-x) + \lg(\lg x)$.

Решение. Так как функция arcsin *x* определена при $|x| \le 1$, а функция lg *x* – при *x* > 0, то *x* должен удовлетворять нескольким условиям одновременно, т.е. $D(f)$ получается пересечением множеств:

$$D(f) = (x > 0) \bigcap (\lg x > 0) \bigcap (|1-x| \le 1) =$$
$$= (x > 0) \bigcap (x > 1) \bigcap (-1 \le 1 - x \le 1)$$
$$= (x > 1) \bigcap (0 \le x \le 2) = (1 < x \le 2);\ D(f) = (1; 2].$$

Пример. Сложную функцию $y = \arcsin(\lg(\operatorname{tg} 2^{3x}))$ представить цепочкой из основных элементарных функций.

Решение. $y = \arcsin z,\ z = \lg u,\ u = \operatorname{tg} v,\ v = 2^w,\ w = 3x.$

Пример. Функция $y = f(x)$ задана в неявном виде уравнением $x^2 + y^2 = R^2$. Написать функцию в явном виде.

Решение. Решив уравнение $F(x, y) \equiv x^2 + y^2 - R^2 = 0$ относительно *y*, получим в явном виде две однозначные функции $y = +\sqrt{R^2 - x^2}$ и $y = -\sqrt{R^2 - x^2}$ с одной и той же областью существования, но с различными областями значений. Обе они удовлетворяют исходному уравнению, и выбор конкретной из них, если необходимо, определяется из геометрических, или физических, или иных соображений.

§4. Некоторые свойства функций

Ограниченные функции. Функция *f*(*x*) называется *ограниченной сверху* (*снизу*) в области *D*, если существует такое число *M*, что $\forall x \in D$ выполняется $f(x) \le M$ ($f(x) \ge M$).

Функция $f(x)$ называется *ограниченной* в D, если она ограничена и сверху и снизу, т.е. существуют такие числа M и N ($M < N$), что $\forall x \in D$ выполняется $M \le f(x) \le N$.

Монотонные функции. Пусть: 1) функции $f(x)$ определена в D; 2) $\forall x_1, x_2 \in D$ приращение функции $\Delta f = f(x_2) - f(x_1)$. Функция $f(x)$ называется *монотонно возрастающей* (*убывающей*) в D в строгом смысле, если для $x_1 < x_2$ выполняется $f(x_1) < f(x_2)$ или $\Delta f > 0$ $((f(x_1) > f(x_2)$ или $\Delta f < 0)$, и называется *неубывающей* (*невозрастающей*), если $f(x_1) \le f(x_2)$ или $\Delta f \ge 0$ $((f(x_1) \ge f(x_2)$ или $\Delta f \le 0)$.

Четные и нечетные функции. Функция $f(x)$, определенная в симметричном интервале $(-l, l)$, называется *четной,* если $f(-x) \equiv f(x)$, и *нечетной,* если $f(-x) \equiv -f(x)$.

Периодические функции. Функция $f(x)$, определенная в D, называется *периодической*, если существует число $T > 0$ такое, что $\forall x \in D$ выполняется $f(x \pm T) = f(x)$. Наименьшее из T называется периодом $f(x)$.

Обратная функция. Пусть даны непустые множества X и Y и функции $f: X \to Y$ и $g: Y \to X$, при этом функция f двум *разным* значениям x_1 и x_2 из X ставит в соответствие *разные* значения $y_1 = f(x_1)$ и $y_2 = f(x_2)$ из Y.

Функцию g будем называть *обратной* к функции f, если для всякого $x \in X$ выполняется $g(f(x)) = x$ и для всякого $y \in Y$ выполняется $f(g(y)) = y$.

Функция g, обратная к f, обозначается f^{-1}. Если учесть, что традиционно функцию обозначают y, а аргумент x, то обратной функцией к $y = f(x)$ будет $y = f^{-1}(x)$.

Теорема. Если функция f строго монотонна в области X и имеет область значений Y, то для нее существует однозначная обратная функция f^{-1}, определенная на Y и с областью значений X.

Для функций, заданных аналитически $y = f(x)$, обратную функцию можно получить, выразив x через y, затем, следуя традиции, условимся менять x и y местами.

Взаимно обратными функциями являются:

а) $f(x) = \cos x$ $\quad \begin{cases} X = [0, \pi], \\ Y = [-1, 1], \end{cases}$ $\quad \hat{f}(x) = \arccos x$;

б) $f(x) = \sin x$, $\quad \begin{cases} X = [-\pi/2, \pi/2], \\ Y = [-1, 1], \end{cases}$ $\quad \hat{f}(x) = \arcsin x$;

в) $f(x) = tgx$, $\quad \begin{cases} X = (-\pi/2, \pi/2), \\ Y = (-\infty, +\infty), \end{cases}$ $\quad \hat{f}(x) = \mathrm{arctg}\, x$;

г) $f(x) = ctgx$, $\quad \begin{cases} X = (0, \pi), \\ Y = (-\infty, +\infty), \end{cases}$ $\quad \hat{f}(x) = \mathrm{arcctg}\, x$;

д) $f(x) = a^x$ $(a > 0, a \neq 1)$. $\quad \begin{cases} X = (-\infty, +\infty), \\ Y = (0, +\infty), \end{cases}$ $\quad \hat{f}(x) = \log_a x$.

Глава 1. Предел функции

§1. Предел. Бесконечно малые и бесконечно большие величины. Основные определения и теоремы

Определение 1. Функция, областью определения которой служит множество всех натуральных чисел, называется **последовательностью**.

Такие функции принято кратко записывать $y_n = f(n)$, $n \in \boldsymbol{N}$.

Последовательность считается заданной, если задан ее общий член y_n.

Определение 2. Число a называется **пределом последовательности** $y_n = f(n)$, если для любого положительного числа ε существует такое число N, что для всех натуральных чисел $n > N$ выполнено неравенство $|f(n) — a| < \varepsilon$ или, что то же самое, $|y_n — a| < \varepsilon$.

Тот факт, что a есть предел последовательности y_n, символически записывается так: $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$ или $y_n \to a$ при $n \to \infty$.

Определение 3. δ-окрестностью точки x_1 называется интервал $(x_1–\delta;\ x_1+\delta)$, или, другими словами, множество точек, удовлетворяющих неравенству $|x — x_1| < \delta$.

Определение 4. Число a называется **пределом функции $f(x)$ в точке x_1**, если для всякого числа $\varepsilon > 0$ можно указать такую δ-окрестность точки x_1, что как только $|x — x_1| < \delta$ $(x \neq x_1)$, то выполняется неравенство $|f(x) — a| < \varepsilon$.

Это записывают так:

$\lim\limits_{x\to x_1} f(x) = a$ или $f(x) \to a$ $(x \to x_1)$ и графически иллюстрируют так, как это показано на рис.1.

Замечание 1. Если $f(x)$ стремится к пределу a_1 при x, стремящемуся к некоторому числу так, что x принимает только значения, меньшие x_1, то пишут $\lim\limits_{x \to x_1 - 0} f(x) = a_1$ и называют a_1 **пределом функции $f(x)$ в точке x_1 слева**. Если x принимает только значения больше, чем x_1, то пишут $\lim\limits_{x \to x_1 + 0} f(x) = a_2$ и называют a_2 **пределом функции $f(x)$ в точке x_1 справа**.

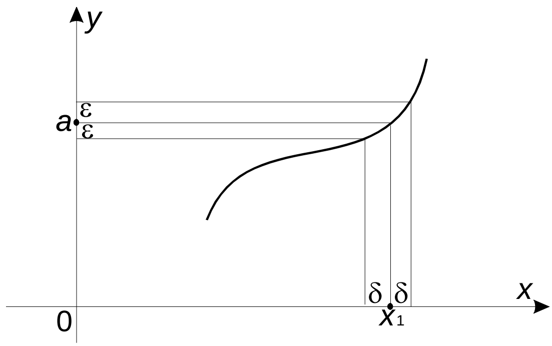


Рис.1

Если пределы слева и справа существуют и равны, т.е. $a_1 = a_2 = a$, то a и будет пределом. И обратно, если существует предел функции a в точке x_1, то существуют пределы функции в точке x_1 слева и справа и они равны.

Определение 5. Функция $f(x)$ стремится к пределу a при $x \to \infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $N(\varepsilon) > 0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x| > N$, выполняется неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$. Графически это выглядит так (рис.2).

Определение 6. Функция $\alpha = \alpha(x)$ называется **бесконечно малой при $x \to x_1$, или при $x \to \infty$,** если $\lim\limits_{x \to x_1} \alpha(x) = 0$ или $\lim\limits_{x \to \infty} \alpha(x) = 0$.

Определение 7. Функция $f(x)$ называется **бесконечно большой при $x \to x_1$**, если для любого числа $M > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $|f(x)| > M$ для всех $x \in (x_1 - \delta;\ x_1 + \delta)$, т.е. $\lim\limits_{x \to x_1} f(x) = \infty$.

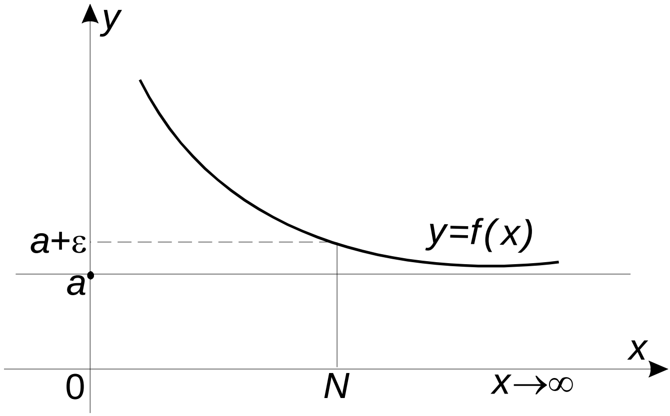


Рис.2

Определение 8. Переменная величина y называется **ограниченной**, если можно указать такое число $M > 0$, что $|y| \le M$. В частности, функция $y = f(x)$ ограничена в интервале (a, b), если найдется постоянное число $M > 0$ такое, что $|f(x)| < M$ для любого x, удовлетворяющего неравенству $a < x < b$. Если для переменной величины нельзя указать числа M, ограничивающего ее, то говорят: переменная величина неограниченная.

Основные теоремы

Теорема 1. Для того, чтобы функция $y = f(x)$ в точке $x = x_1$ имела пределом число a, необходимо и достаточно, чтобы она была представима в окрестности этой точки в виде суммы $f(x) = a + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция в окрестности точки $x = x_1$.

Теорема 2. Предел алгебраической суммы конечного числа функций, имеющих пределы, равен такой же сумме пределов слагаемых.

Теорема 3. Предел произведения конечного числа функций, имеющих пределы, равен произведению пределов сомножителей.

Теорема 4. Если функция $f(x)$ имеет в точке $x = x_1$ предел, отличный от нуля, то функция $\dfrac{1}{f(x)}$ ограничена в окрестности той же точки.

Теорема 5. Предел частного двух функций, имеющих пределы, равен частному пределов, если предел знаменателя отличен от нуля.

Теорема 6. Если $\alpha(x)$ есть функция бесконечно малая в окрестности точки $x = x_1$, то функция $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ бесконечно большая в окрестности той же точки.

Замечательные пределы

Теорема 7. Предел отношения синуса бесконечно малой дуги к самой дуге, выраженной в радианах, равен единице, т.е.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ – первый замечательный предел.

Теорема 8. Предел последовательности $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e,\ e = 2{,}71828\ldots .$$

Теорема 9. Предел функции $f(x) = \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ при $x \to \pm\infty$ равен e.

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e, \\ &\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e. \end{aligned}\right\} \text{— второй замечательный предел.}$$

§2. Непрерывность

Определение 1. Функция $y = f(x)$ называется **непрерывной в точке x_0**, если она определена в этой точке и ее окрестности и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ или $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0$.

Определение 2. Функция непрерывна на интервале (*a, b*), если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

Использование непрерывности для вычисления пределов

Теорема 1. Всякая элементарная функция непрерывна на том множестве, на котором она определена.

Теорема 2. Сумма, произведение и частное (при условии, что знаменатель отличен от нуля) непрерывных функций есть функция непрерывная.

Теорема 3. Пусть $y = f(x)$ – непрерывная функция, тогда $\lim\limits_{x\to x_1} f(x) = f(\lim\limits_{x\to x_1} x)$.

Последнее равенство означает, что непрерывная в точке $x = x_1$ функция допускает переход к пределу под знаком функции в окрестности рассматриваемой точки.

Правило 1. Чтобы найти предел в точке $x = x_1$ функции, непрерывной в этой точке, надо в функцию, стоящую под знаком предела, вместо аргумента x подставить его предельное значение x_1.

Сформулированное правило вместе с основными теоремами дает возможность вычислять пределы непрерывных функций.

Пример 1. Найти предел функции $f(x) = \left(\frac{\sqrt{6+x}-1}{x-2}\right)^x$ в точке $x = 3$.

Решение. Так как данная функция непрерывна в точке $x = 3$, то, используя теоремы о правилах предельного перехода и свойство непрерывности, получим :

$$\lim_{x\to3}\left(\frac{\sqrt{6+x}-1}{x-2}\right)^x = \left(\frac{\lim\limits_{x\to3}(\sqrt{6+x}-1)}{\lim\limits_{x\to3}(x-2)}\right)^{\lim\limits_{x\to3}x} =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{\lim\limits_{x\to3}(6+x)}-\lim\limits_{x\to3}1}{\lim\limits_{x\to3}x-\lim\limits_{x\to3}2}\right)^{\lim\limits_{x\to3}x} = \left(\frac{\sqrt{\lim\limits_{x\to3}6+\lim\limits_{x\to3}x}-\lim\limits_{x\to3}1}{\lim\limits_{x\to3}x-\lim\limits_{x\to3}2}\right)^{\lim\limits_{x\to3}x} =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{6+3}-1}{3-2}\right)^3 = \left(\frac{2}{1}\right)^3 = 8.$$

Столь подробная запись в практическом вычислении пределов не применяется, но мысленно каждый раз эти этапы необходимо пройти, потому что существо вопроса остается именно таким.

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x$; $k \in \boldsymbol{R}$, $k \neq 0$.

Решение. Сделаем замену переменного $\dfrac{x}{k}=y$; если $x \to \pm\infty$, то $y \to \pm\infty$,

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{x} = \lim_{y\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{ky} = \lim_{y\to\pm\infty}\left(\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\right)^{k}.$$

Выражение, стоящее под последним знаком предела, можно рассматривать как функцию u^k, где $u=\left(1+\dfrac{1}{y}\right)^{y}$. Если $y \to \pm\infty$, то $u \to e$. Но функция u^k непрерывна в точке $u_0 = e$. Следовательно, $\lim\limits_{u\to e} u^k = e^k$. Поэтому

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{x} = e^k.$$

Аналогично доказывается, что

$$\lim_{y\to 0}(1+ky)^{\frac{1}{y}} = e^k.$$

Пример 3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2x}\right)^{8x}$.

Из примера 2 следует

$$\lim_{x\to\infty}\left(\left(1-\frac{1}{2x}\right)^{x}\right)^{8} = e^{-\frac{1}{2}\cdot 8} = e^{-4}.$$

Пример 4. $\lim\limits_{x\to 0}(1+6x)^{\frac{5}{x}}$.

Из примера 2 следует

$$\lim_{x\to 0}((1+6x)^{\frac{1}{x}})^5 = e^{6\cdot 5} = e^{30}.$$

Из теоремы 6 о связи бесконечно малой и бесконечно большой функций следуют два правила для практического нахождения пределов.

Правило 2. Если при отыскании предела дроби предел знаменателя равен нулю, а предел числителя отличен от нуля, то предел такой функции равен $+\infty$ или $-\infty$.

Пример 5. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3x+1}{x-5}=\infty$.

Правило 3. Если при отыскании предела дроби предел знаменателя равен ∞, а предел числителя равен конечному числу, то предел дроби равен 0.

Пример 6. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{4}{\operatorname{tg} x}=0$.

§3. Раскрытие неопределенностей

Как показывают решения задач, приведенных в §2 этой же главы, в простейших случаях нахождение предела функции сводится к подстановке в аналитическое выражение, задающее эту функцию, предельного значения аргумента. Часто подстановка предельного значения аргумента приводит к неопределенным выражениям вида

$$\frac{0}{0};\ \frac{\infty}{\infty};\ 0\cdot\infty;\ \infty - \infty;\ 0^0;\ \infty^0;\ 1^\infty.$$

Нахождение предела функции в этих случаях называется раскрытием неопределенности. Для раскрытия неопределенности приходится, прежде чем перейти к пределу, проводить преобразования данного выражения.

В последующих задачах показывается, какими приемами обычно пользуются при таких преобразованиях.

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-2x}$.

Решение. Прежде всего, отметим, что при $x_1 = 2$ функция разрывна, и непосредственная подстановка предельного значения аргумента приводит к неопределенному выражению вида $\dfrac{0}{0}$. Следовательно, прежде чем перейти к пределу, необходимо данное выражение преобразовать. Разложив на множители числитель и знаменатель, вспомним, что $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, тогда $x^2 - 5x + 6 =$
$= (x - 2)\cdot(x - 3)$ и $x^2 - 2x = x\cdot(x - 2)$, получим:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-2x}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-3)}{x\cdot(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-3}{x}=-\frac{1}{2}.$$

Заметим, что аргумент x только стремится к своему предельному значению 2, но не совпадает с ним. Таким образом, разность $x - 2$, т.е. множитель, на который мы сокращаем, отличен от нуля при $x \to 2$.

Пример 2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1+x}}{x}$.

Решение. Подстановка $x = 0$ приводит к неопределенности вида $\dfrac{0}{0}$. Домножим на сопряженное к $1-\sqrt{1+x}$ числитель и знаменатель дроби:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-\sqrt{1+x})(1+\sqrt{1+x})}{x\cdot(1+\sqrt{1+x})}=\lim_{x\to 0}\frac{1-(\sqrt{1+x})^2}{x\cdot(1+\sqrt{1+x})}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-1-x}{x\cdot(1+\sqrt{1+x})}=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{1+\sqrt{1+x}}=-\frac{1}{2}.$$

Пример 3. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{2x+1}}$.

Решение. Неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$, для ее раскрытия домножим на сопряженные к числителю и знаменателю:

$$\lim_{x\to 4}\frac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{2x+1}}=\lim_{x\to 4}\frac{(2-\sqrt{x})(2+\sqrt{x})(3+\sqrt{2x+1})}{(3-\sqrt{2x+1})(3+\sqrt{2x+1})(2+\sqrt{x})}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{[2^2-(\sqrt{x})^2](3+\sqrt{2x+1})}{[3^2-(\sqrt{2x+1})^2](2+\sqrt{x})}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(4-x)(3+\sqrt{2x+1})}{(9-2x-1)(2+\sqrt{x})}=\lim_{x\to 4}\frac{(4-x)(3+\sqrt{2x+1})}{2(4-x)(2+\sqrt{x})}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}.$$

Правило 1. Если неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$ образована рациональными или иррациональными функциями, нужно преобразовать подпредельную функцию таким образом, чтобы выделить в числителе и знаменателе множитель, предел которого равен нулю, и, сократив на него дробь, найти предел частного.

Правило 2. Для нахождения предела частного от деления двух рациональных или иррациональных функций при $x\to\infty$ нужно раскрыть неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$, для чего числитель и знаменатель подпредельной дроби необходимо разделить на высшую степень аргумента знаменателя и находить далее предел частного.

Результаты возможны следующие:

1) искомый предел равен отношению коэффициентов при старших степенях аргумента числителя и знаменателя, если эти степени одинаковы;

2) предел равен бесконечности, если степень аргумента числителя выше степени аргумента знаменателя;
3) предел равен нулю, если степень аргумента числителя ниже степени аргумента знаменателя.

Пример 4.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{6x^2-3x+2}{3x^2-7}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(6-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(3-\frac{7}{x^2}\right)}=\frac{6}{3}=2,\ \text{т.к.}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{7}{x^2}=0.$$

Пример 5.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x^3+1}}{x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^3\left(4+\frac{1}{x^3}\right)}}{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x\left(4+\frac{1}{x^3}\right)}}{\left(1-\frac{2}{x}\right)}=\infty.$$

Пример 6.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-7}}{\sqrt[4]{x^6+2x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\cdot\sqrt{1-\frac{7}{x^2}}}{x\cdot\sqrt[4]{x^2\left(1+\frac{2}{x^5}\right)}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0.$$

Пример 7. $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2+5x})$.

В этом примере неопределенность вида $\infty-\infty$. Этот случай нахождения предела нужно привести к случаю $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$. Домножим на сопряженное числитель и знаменатель, получим:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x-\sqrt{x^2+5x})(x+\sqrt{x^2+5x})}{(x+\sqrt{x^2+5x})}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-(x^2+5x)}{x+\sqrt{x^2\left(1+\frac{5}{x}\right)}}=$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-5x}{x\left(1+\sqrt{1+\frac{5}{x}}\right)} = -\frac{5}{2} = -2{,}5.$$

Неопределенность 1^{∞}.

Мы уже рассматривали несколько примеров на второй замечательный предел

$$\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y} = e \text{ и } \lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}} = e.$$

Пример 8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x-3}{4x+1}\right)^{2x-1}$ (неопределенность 1^{∞}).

Решение. Преобразуем выражение в скобках, выделив единицу.

$\dfrac{4x-3}{4x+1} = \dfrac{4x+1-1-3}{4x+1} = \left(1+\dfrac{-4}{4x+1}\right)$, понимаем, что $\lim\limits_{x\to\infty}\left(-\dfrac{4}{4x+1}\right) = 0$, т.е. $\dfrac{-4}{4x+1} = \dfrac{1}{y}$, тогда $\dfrac{4x+1}{-4} = y$. Получаем $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x-3}{4x+1}\right)^{2x-1} = \lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{-4}{4x+1}\right)^{\frac{4x+1}{-4}}\right]^{\frac{-4}{4x+1}\cdot(2x-1)} =$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-4(2x-1)}{4x+1}} = e^{-2}.$$

§4. Эквивалентные бесконечно малые функции (б.м.ф.). Применение б.м.ф. к вычислению пределов

Среди различных бесконечно малых функций в приложениях математики важную роль играют те из них, предел отношения которых равен 1.

Определение. Две бесконечно малые функции в окрестности точки $x = x_1$ α и β называются **эквивалентными** (равносильными), если предел их отношения в этой точке равен единице, т.е.

$$\lim_{x \to x_1} \frac{\beta}{\alpha} = 1.$$

Эквивалентность обозначается символом ~, т.е. пишут $\beta \sim \alpha$.

В окрестности точки $x = 0$

$\sin x \sim \operatorname{tg} x \sim \arcsin x \sim \operatorname{arctg} x \sim e^x - 1 \sim \ln(1 + x) \sim x$.

Теорема 1. Предел отношения двух бесконечно малых функций в точке $x = x_1$ равен пределу отношения им эквивалентных бесконечно малых функций в той же точке.

Пример 1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x + \sin^2 x}{\sin 2x - x^3}$ (неопределенность $\dfrac{0}{0}$).

При $x \to 0$ $\sin x \sim x$, $\sin 2x \sim 2x$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{3x + \sin^2 x}{\sin 2x - x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{3x + x^2}{2x - x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{x(3 + x)}{x(2 - x^2)} = 1{,}5$$

Пример 2. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sin(x - 2)}{x^2 - 4}$ (неопределенность $\dfrac{0}{0}$).

Так как при $x \to 2$, $x - 2 \to 0$ и $\sin(x - 2) \sim (x - 2)$.

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sin(x - 2)}{x^2 - 4} = \lim_{x \to 2} \frac{x - 2}{(x - 2)(x + 2)} = \frac{1}{4}.$$

Пример 3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} 2x}{5x}$ (неопределенность $\dfrac{0}{0}$).

При $x \to 0$ arctg $2x \sim 2x$. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} 2x}{5x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{5x} = \dfrac{2}{5}$.

Пример 4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{x\cdot \operatorname{tg} 3x}$ (неопределенность $\dfrac{0}{0}$).

Так как $1 - \cos 4x = 2\cdot\sin^2 2x$ (из формулы $\sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$), при $x \to 0$ $\sin 2x \sim 2x$, $\operatorname{tg} 3x \sim 3x$, получим $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{x\cdot \operatorname{tg} 3x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2 2x}{x\cdot \operatorname{tg} 3x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2(2x)^2}{x\cdot 3x} = \dfrac{8}{3}$.

Пример 5. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{\arcsin(1-2x)}{4x^2-1}$ (неопределенность $\dfrac{0}{0}$).

Так как при $x \to \dfrac{1}{2}$ $(1 - 2x) \to 0$, $\arcsin(1 - 2x) \sim (1 - 2x)$, получим $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{\arcsin(1-2x)}{4x^2-1} = \lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{(1-2x)}{(2x-1)(2x+1)} = -\dfrac{1}{2}$.

Пример 6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-12x)}{e^{-6x}-1}$ (неопределенность $\dfrac{0}{0}$).

Так как при $x \to 0$ $\ln(1 - 12x) \sim -12x$, $e^{-6x} - 1 \sim -6x$, получим $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-12x)}{e^{-6x}-1} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-12x}{-6x} = 2$.

Глава 2. Дифференциальное исчисление функции одной переменной

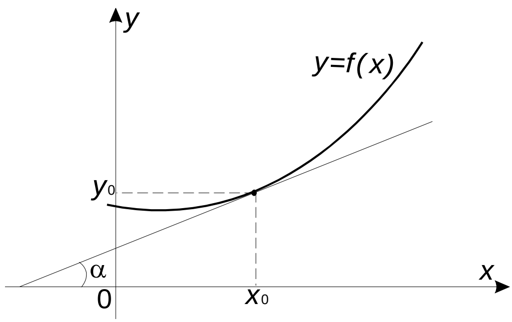
§1. Производная и дифференциал

Определение 1. Производной функции $y = f(x)$ в точке x называется предел (если он существует и конечен) отношения приращения функции к приращению аргумента при условии, что последнее стремится к нулю.

Обозначается $y' = f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$.

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Геометрический смысл производной



Производная функции $y = f(x)$ в точке x_0 равна тангенсу угла, который образует касательная, проведенная к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0 с положительным направлением оси Ox. $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$.

Определение 2. Операция нахождения производной называется **дифференцированием функции**. Функция называется **дифференцируемой в некоторой точке**, если она имеет в этой точке производную, и дифференцируемой на некотором множестве, если она дифференцируема в каждой точке этого множества.

Теорема 1. Если функция дифференцируема в некоторой точке, то она непрерывна в этой точке.

Основные правила дифференцирования

Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – функции, дифференцируемые в некоторой точке x_0, C – постоянная величина, тогда:

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$;
2. $(C \cdot u)' = C \cdot u'$;
3. $(C)' = 0$;
4. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + v' \cdot u$;
5. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$.

Производная сложной функции

Теорема 2. Пусть y – сложная функция x, т.е. $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$, или $y = f\left(\varphi(x)\right)$.

Если $\varphi(x)$ и $f(u)$ — дифференцируемые функции своих аргументов соответственно в точках x и $u = \varphi(x)$, то сложная функция также дифференцируема в точке x и ее производную находят по формуле

$$y'(x) = f'(u) \cdot \varphi'(x), \text{ или } y_x' = y_u' \cdot u_x'.$$

Таблица производных элементарных функций

1. $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$;
2. $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$;
3. $(e^u)' = e^u \cdot u'$;

8. $(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$;
9. $(\operatorname{ctg} u)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$;
10. $(\arcsin u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$;

4. $(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a}$;

5. $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$;

6. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$;

7. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$;

11. $(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$;

12. $(\mathrm{arctg}\, u)' = \frac{u'}{1+u^2}$;

13. $(\mathrm{arcctg}\, u)' = -\frac{u'}{1+u^2}$.

Замечание. Если $u = x$, то $u' = x' = 1$.

Примеры.

Найти производные от функций:

1) $y = 6\sqrt{x} + \frac{x}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{4}{x^2} + 6x - x^2 + 4$.

Преобразуем функцию, введя дробные и отрицательные показатели: $y = 6 \cdot x^{\frac{1}{2}} + x^{1-\frac{2}{3}} - 4 \cdot x^{-2} + 6x - x^2 + 4$.

Вычислим y', используя правила 1, 2, 3 и формулу 1 таблицы производных

$$y' = 6 \cdot (x^{\frac{1}{2}})' + (x^{\frac{1}{3}})' - 4 \cdot (x^{-2})' + 6(x)' - (x^2)' + (4)' =$$

$$= 6 \cdot \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} + \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}-1} - 4 \cdot (-2x^{-2-1}) + 6 - 2 \cdot x^{2-1} =$$

$$= 3x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} + 8x^{-3} + 6 - 2x = \frac{3}{\sqrt{x}} + \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}} + \frac{8}{x^3} - 2x + 6.$$

2) $y = \frac{4\sqrt{x} - 1}{\mathrm{tg}\, x}$.

Применим правило 5 и формулы 1, 8:

$$y' = \frac{(4\sqrt{x}-1)' \cdot \operatorname{tg} x - (\operatorname{tg} x)' \cdot (4\sqrt{x}-1)}{\operatorname{tg}^2 x} =$$

$$= \frac{4 \cdot \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \cdot \operatorname{tg} x - \frac{1}{\cos^2 x} \cdot (4\sqrt{x}-1)}{\operatorname{tg}^2 x} = \frac{\frac{2}{\sqrt{x}} \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{4\sqrt{x}-1}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg}^2 x} =$$

$$= \frac{(2\sin x \cdot \cos x - 4 + \sqrt{x})\cos^2 x}{\sqrt{x} \cdot \cos^2 x \cdot \sin^2 x} = \frac{\sin 2x + \sqrt{x} - 4}{\sqrt{x} \cdot \sin^2 x}.$$

3) $y = 3^x \cdot (\log_3 x - x)$.

Применим правило 4 и формулы 2, 4:

$y' = (3^x)' \cdot (\log_3 x — x) — 3^x \cdot (\log_3 x — x)'$

$$= 3^x \cdot \ln 3(\log_3 x - 3) - 3^x \cdot \left(\frac{1}{x \ln 3} - 1 \right) =$$

$$= \frac{3^x \cdot (x \ln^2 3 \cdot \log_3 x - 3 \cdot x \ln^2 3 - 1 + x \ln 3)}{x \ln 3}.$$

4) $y = 2x \cdot \sqrt{x} + \ln \sin x + 4^{3x}$.

Используем правила 1 и 2, применим теорему о производной сложной функции и по таблице производных имеем:

$$y' = 2(x^{\frac{3}{2}})' + (\ln \sin x)' + (4^{3x})' = 2 \cdot \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\sin x} \cdot (\sin x)' +$$

$$+4^{3x} \cdot \ln 4 \cdot (3x)' = 3\sqrt{x} + \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x + 4^{3x} \cdot \ln 4 \cdot 3 =$$

$$= 3\sqrt{x} + \operatorname{ctg} x + 3 \ln 4 \cdot 4^{3x}.$$

5) $y = 7^{\operatorname{arcctg} x - \sqrt{x}}$.

Воспользуемся формулой 2:

$$y' = 7^{\operatorname{arcctg} x - \sqrt{x}} \cdot \ln 7 \cdot (\operatorname{arcctg} x - \sqrt{x})' = 7^{\operatorname{arcctg} x - \sqrt{x}} \cdot \ln 7 \cdot$$

$$\cdot\left(\frac{-1}{1+x^2}-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)=-7^{\operatorname{arcctg} x-\sqrt{x}}\cdot\ln 7\cdot\frac{2\sqrt{x}+1+x^2}{2(1+x^2)\sqrt{x}}.$$

6) $y=\sqrt{\sin^2 4x-x^2}$.

$$y'=((\sin^2 4x-x^2)^{\frac{1}{2}})'=\frac{1}{2}(\sin^2 4x-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(\sin^2 4x-x^2)'=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\sin^2 4x-x^2}}\cdot(2\sin 4x\cdot(\sin 4x)'-2x)=$$

$$=\frac{2\sin 4x\cdot\cos 4x\cdot 4-2x}{2\sqrt{\sin^2 4x-x^2}}=\frac{4\sin 8x-2x}{2\sqrt{\sin^2 4x-x^2}}=\frac{2\sin 8x-x}{\sqrt{\sin^2 4x-x^2}}.$$

7) $y = x^{2x}$.

Чтобы найти производную от показательно-степенной функции, необходимо ее предварительно прологарифмировать, например, по основанию *e*.

Ln y = ln x^{2x}, т.к. ln $x^n = n \cdot \ln x$, получим ln $y = 2x \cdot \ln x$.

Теперь берем производную от обеих частей. Слева производную сложной функции, справа производную произведения.

$$\frac{1}{y}\cdot y'=2\cdot(x'\cdot\ln x+x\cdot(\ln x)')\Rightarrow\frac{1}{y}\cdot y'=2\left(\ln x+x\cdot\frac{1}{x}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'=2y(\ln x+1),$$

так как $y = x^{2x}$, $y' = 2x^{2x}\cdot(\ln x + 1)$.

8) $y = 3^{xy} + x^2$.

Дифференцируем обе части равенства, учитывая, что y есть функция x.

$$y'=3^{xy}\cdot\ln 3\cdot(x\cdot y)'+2x\Rightarrow y'=3^{xy}\cdot\ln 3\cdot(x'\cdot y+x\cdot y')+2x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'=3^{xy}\cdot\ln 3\cdot(y+x\cdot y')+2x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'=3^{xy}\cdot\ln 3\cdot y+x\cdot y'\cdot 3^{xy}\cdot\ln 3+2x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' \cdot (1 - x \cdot 3^{xy} \cdot \ln 3) = 3^{xy} \cdot \ln 3 \cdot y + 2x \Rightarrow y' = \frac{3^{xy} \cdot \ln 3 \cdot y + 2x}{1 - x \cdot 3^{xy} \cdot \ln 3}.$$

Определение 3. Дифференциал функции равен ее производной, умноженной на дифференциал независимой переменной.

$$dy = y' \cdot dx,$$

дифференциал независимой переменной равен ее приращению

$$dx = \Delta x.$$

При достаточно малых значениях $|\Delta x|$

$$\Delta y \approx dy.$$

Из этого следует формула приближенного вычисления

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x.$$

Пример 9. Найти дифференциал от функции

$$y = e^{-x}(x^2 - 1).$$

Решение. Сначала найдем y'.

$y' = (e^{-x})' \cdot (x^2 - 1) + (e^{-x}) \cdot (x^2 - 1)' = (e^{-x}) \cdot (-x)' \cdot (x^2 - 1) + e^{-x} \cdot 2x = e^{-x} \cdot (-x^2 + 1 + 2x)$.

$$dy = y' \cdot dx.$$

$$dy = e^{-x} \cdot (2x + 1 - x^2)dx.$$

Пример 10. Вычислить приближенное значение функции $y = x^7 - 3x^4 + 4x^3 - 2$ при $x = 1{,}002$.

Решение. Пусть $x_0 = 1$, тогда $\Delta x = 0{,}002$. Найдем y'.

$y' = 7x^6 - 12x^3 + 12x^2$. Найдем значение функции и ее производной в точке $x_0 = 1$: $f(1) = 1 - 3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 - 2 = 0$,

$f'(1) = 7 \cdot 1 - 12 \cdot 1 + 12 \cdot 1 = 7$,

$f(1{,}002) \approx f(1) + f'(1) \cdot \Delta x = 0 + 7 \cdot 0{,}002 = 0{,}014$.

Определение 3. Производной *n*-го порядка называется первая производная от производной $(n - 1)$-го порядка.

Обозначение $y^{(n)} = \dfrac{d^n y}{dx^n} = f^{(n)}(x)$.

Пример 11. Найти производную третьего порядка от функции $y = x^2 \cdot e^x$.

Решение. Найдем y': $y' = (x^2)' \cdot e^x + x^2 \cdot (e^x)' = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = e^x \cdot (x^2 + 2x)$.

Найдем y'': $y'' = (y')' = (e^x)' \cdot (x^2 + 2x) + e^x \cdot (x^2 + 2x)' = e^x \cdot (x^2 + 2x + 2x + 2) = = e^x \cdot (x^2 + 4x + 2)$.

Затем найдем y''': $y''' = (y'')' = e^x \cdot (x^2 + 4x + 2) + e^x \cdot (2x + 4) = e^x \cdot (x^2 + 6x + 6)$.

§2. Приложение производной к вычислению пределов и исследованию функций

Правило Лопиталя. Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ дифференцируемы в некоторой окрестности точки x_0, за исключением, быть может, самой точки x_0, причем в этой окрестности $\varphi'(x) \neq 0$, и если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = 0$ или $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = \infty$, то

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Таким образом, для неопределенностей $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ предел отношения двух функций равен пределу отношения их производных, если последний существует (конечный или бесконечный).

Замечание. Символ x_0 может быть как конечным числом, так и бесконечностью.

Пример 1. Вычислить $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^4 - 16}{x^3 + 5x^2 - 6x - 16}$.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^4-16}{x^3+5x^2-6x-16}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{(x^4-16)'}{(x^3+5x^2-6x-16)'}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{4x^3}{3x^2+10x-6}=\frac{16}{13}.$$

Пример 2. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{\ln(1+x)}$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\ln(1+x)}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x'}{(\ln(1+x))'}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{1+x}}=\lim_{x\to\infty}(1+x)=\infty.$$

Определение 1. Функция $y = f(x)$ называется **возрастающей на интервале (*a, b*)**, принадлежащем области определения функции, если большему значению аргумента соответствует большее значение функции, т.е. если $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$.

Определение 2. Функция $y = f(x)$ называется **убывающей на интервале (*a, b*)**, если большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции,

т.е. если $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$.

Функции, убывающие или возрастающие на некотором интервале, называются **монотонными**.

Теорема 1 (достаточный признак возрастания функции). Если во всех точках интервала $f'(x) > 0$, то функция $f(x)$ возрастает на этом интервале.

Теорема 2 (достаточный признак убывания функции). Если во всех точках интервала $f'(x) < 0$, то $f(x)$ убывает на этом интервале.

Определение 3. Функция $y = f(x)$ имеет **минимум в точке x_0**, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности $f(x_0) < f(x_0+\Delta x)$, $(\Delta x \neq 0)$.
Определение 4. Функция $y = f(x)$ имеет **максимум в точке x_0**, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности $f(x_0) > f(x_0+\Delta x)$, $(\Delta x \neq 0)$.
Точки минимума и максимума функции называются **точками экстремума**.

Теорема 3 (необходимый признак экстремума).
Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и имеет в этой точке экстремум, то ее производная при $x = x_0$ обращается в нуль: $f'(x_0) = 0$.

Следствие. Функция может иметь экстремум лишь в тех точках, где производная равна нулю, либо в тех точках области определения, где производная не существует.
Такие точки называются критическими точками I рода.
Теорема 4 (первый достаточный признак экстремума).
Если при переходе через критическую точку I рода первая производная меняет знак с "+" на "–", то в этой точке максимум, если она меняет знак с
"–" на "+", то минимум.
Теорема 5 (второй достаточный признак экстремума).
Пусть функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема в точке x_0 и пусть выполняются условия $f'(x_0) = 0$ и $f''(x_0) \neq 0$, тогда $f(x)$ имеет минимум в точке x_0, если $f''(x_0) > 0$, и максимум, если $f''(x_0) < 0$.

Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значения функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$:
1) найти критические точки внутри $[a, b]$;

2) вычислить значение функции в этих точках и на границе области $f(a)$ и $f(b)$;
3) выбрать среди этих значений наибольшее и наименьшее.

Определение 5. График функции называется **выпуклым в интервале (*a, b*)**, если в этом интервале он расположен ниже любой своей касательной, и **вогнутым**, если в этом интервале он расположен выше любой своей касательной.

Теорема 6 (достаточный признак вогнутости-выпуклости графика). Если для функции $y = f(x)$ во всех точках интервала (a, b) $f''(x) > 0$, то кривая вогнута на этом интервале, и если $f''(x) < 0$, то выпукла.

Определение 6. Точки графика непрерывной функции, в которых изменяется выпуклость на вогнутость или наоборот, называются **точками перегиба**.

Теорема 7 (достаточный признак существования точки перегиба). Если в точке x_0 функция $y = f(x)$ имеет первую производную $f'(x_0)$, а $f''(x_0) = 0$ или не существует и $f''(x_0)$ при переходе через точку x_0 меняет знак, то точка $(x_0; f(x_0))$ является точкой перегиба графика функции $y = f(x)$.

Определение 7. Прямая называется **асимптотой кривой**, если расстояние от переменной точки M кривой до этой прямой стремится к нулю при неограниченном удалении точки M от начала координат по какой-либо ветви кривой.

Вертикальные асимптоты: прямая $x = a$ является вертикальной асимптотой $\Leftrightarrow$ когда выполняется одно из условий: $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = \pm\infty$ или $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \pm\infty$.

Горизонтальные асимптоты: прямая $y = b$ является горизонтальной асимптотой $\Leftrightarrow$ когда $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$ или $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$.

Наклонные асимптоты: для того, чтобы кривая $y = f(x)$ имела асимптоту $y = kx + b \Leftrightarrow$ чтобы существовали конечные пределы:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x};\ b = \lim_{x\to\infty}[f(x) - kx] \text{ или}$$

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x};\ b = \lim_{x\to-\infty}[f(x) - kx].$$

Замечание. Горизонтальная асимптота является частным случаем наклонной.

В примерах 3 и 4 исследовать данные функции и построить их графики.

Исследование будем проводить по следующей схеме:

1) найти область определения функции и исследовать ее поведение на границах области;

2) исследовать функцию на непрерывность;

3) определить, является ли данная функция четной, нечетной;

4) найти интервалы возрастания и убывания функции и точки ее экстремума;

5) найти интервалы выпуклости и вогнутости графика функции и точки перегиба;

6) найти асимптоты графика функции.

Пример 3. $y = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$.

Решение.

1. Областью определения функции (D) является вся числовая прямая, за исключением точки с абсциссой $x = 1$, в которой знаменатель функции обращается в нуль, т.е.

D: $(-\infty; 1) \cup (1;\ \infty)$:

а) $x \to -\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = -\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} y = -\infty$;

б) $x \to 1-0$; $\lim\limits_{x \to 1-0} \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 1-0} y = -\infty$;

в) $x \to 1+0$; $\lim\limits_{x \to 1+0} \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = \infty$; $\lim\limits_{x \to 1+0} y = \infty$;

г) $x \to \infty$; $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = \infty$; $\lim\limits_{x \to \infty} y = \infty$.

2. Функция непрерывна во всей области определения как частное двух непрерывных функций.

3. Если функция четная, то выполняется равенство $f(-x) = f(x)$, если нечетная, то выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$, если ни одно из этих равенств не выполняется, то функция не является ни четной, ни нечетной.

Найдем $f(-x)$. $f(-x) = \dfrac{(-x)^2 - 2 \cdot (-x) + 2}{-x - 1} = \dfrac{x^2 + 2x + 2}{-x - 1}$.

$f(-x) \neq f(x)$ и $f(-x) \neq -f(x)$, значит, функция ни четная, ни нечетная.

4. Для нахождения точек экстремума найдем критические точки функции, т.е. те точки, в которых первая производная обращается в нуль или не существует.

$$y' = \frac{2x^2 - 4x + 2 - x^2 + 2x - 2}{(x-1)^2}; \; y' = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}.$$

Производная не существует только при $x = 1$, где функция не определена, найдем значения x, при которых она обращается в нуль.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \frac{x(x-2)}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x = 2. \end{cases}$$

Вычислим значение функции при $x = 0$ и $x = 2$:

$$y = \left. \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} \right|_{x=0} = -2;$$

$$y = \left. \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} \right|_{x=2} = 2.$$

Получили две критические точки $A_1(0;-2)$ и $A_2(2;2)$, которые проверим на экстремум с помощью первого достаточного признака. Для этого исследуем, как ведет себя первая производная этой функции при переходе через критические точки.

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; 1)$	1	$(1; 2)$	2	$(2; \infty)$
y'	+	0	—	не сущ.	—	0	+
y	↗	макс.	↘	не сущ.	↘	мин.	↗

При переходе через точку A_1 производная меняет знак с "+" на "–", значит, в этой точке максимум функции, а при переходе через точку A_2 – с "–" на "+", значит, в этой точке функция достигает своего минимума. Там, где производная положительна, функция возрастает, где отрицательна – убывает.

5. Для определения точек перегиба и направления вогнутости функции найдем вторую производную.

$$y'' = \left[\frac{x(x-2)}{(x-1)^2} \right]'; \quad y'' = \frac{2}{(x-1)^3}.$$

Вторая производная нигде не обращается в нуль, поэтому точек перегиба у функции нет. Знак второй производной зависит от знака ее знаменателя:

$y'' > 0$, если $(x-1)^3 > 0$, т.е. $x > 1$;

$y'' < 0$, если $(x-1)^3 < 0$, т.е. $x < 1$.

Таким образом, функция вогнута на интервале $(1; \infty)$ и выпукла на интервале $(-\infty; 1)$.

6. Определим, имеет ли функция асимптоты. Вернемся к исследованиям в пункте 1: из 1а, 1г по определению следует, что горизонтальных асимптот у функции нет; из 1б, 1в

также по определению следует, что $x = 1$ является вертикальной асимптотой функции.

Для того, чтобы существовала наклонная асимптота $y = ax + b$, необходимо существование конечного отличного от нуля предела $a = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{y}{x}$.

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 2x + 2}{x^2 - x} = 1,$$

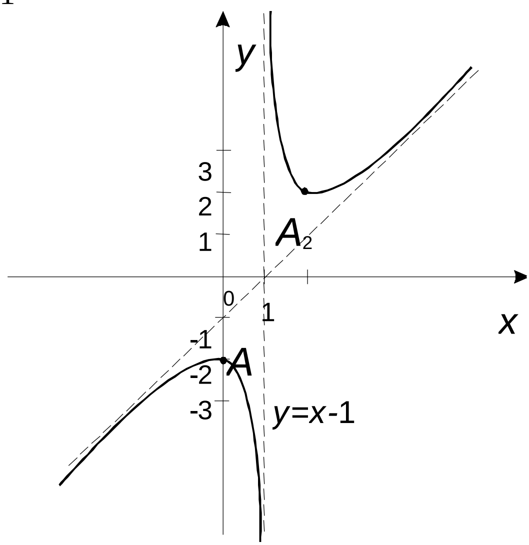
b определяется по формуле $b = \lim\limits_{x\to\infty} (y - ax)$,

$$b = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} - x = \lim_{x\to\infty} \frac{-x + 2}{x - 1} = -1.$$

Таким образом, наклонная асимптота существует и имеет вид $y = x - 1$.

По полученным исследованиям строим график функции

$$y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}.$$



Пример 4. $y = e^{8x-x^2-14}$.

1. Областью определения данной функции является вся числовая ось, D: $(-\infty; \infty)$. Исследуем поведение функции на концах области:

$$\lim_{x\to-\infty} e^{8x-x^2-14} = \lim_{x\to-\infty} e^{-(x-4)^2+2} = 0; \ \lim_{x\to\infty} e^{8x-x^2-14} = 0.$$

Таким образом, на концах области функция стремится к нулю.

2. Функция непрерывна на всей числовой оси.

3. Исследуем на четность, нечетность.

Найдем $f(-x)$: $f(-x) = e^{-8x-x^2-14}$. $f(-x) \neq f(x)$ и $f(-x) \neq -f(x)$ $\Rightarrow$ функция не является ни четной, ни нечетной.

4. Для отыскания экстремума найдем первую производную функции $y' = (8-2x)\cdot e^{-x^2+8x-14}$.

Производная определена на всей числовой оси и обращается в нуль при $x = 4$. Вычислим значение функции при $x = 4$.

$$y = e^{8x-x^2-14}\Big|_{x=4} = e^2.$$

Получили критическую точку $A_2(4;\ e^2)$. Исследуем ее с помощью первого достаточного признака на экстремум.

x	$(-\infty; 4)$	4	$(4; \infty)$
y'	+	0	—
y	↗	макс.	↘

Итак, функция возрастает на интервале $(-\infty; 4)$, убывает на интервале $(4; \infty)$ и имеет максимум в точке A_2.

5. Найдем вторую производную для определения точек перегиба и промежутков вогнутости и выпуклости.

$$y'' = (8-2x)^2 \cdot e^{-x^2+8x-14} - 2 \cdot e^{-x^2+8x-14}, \text{ или}$$

$$y'' = 2 \cdot e^{-x^2+8x-14}(2x^2 - 16x + 31).$$

Значение второй производной равно нулю,
если $2x^2 — 16x + 31 = 0$.

Решаем это квадратное уравнение: $x_{1,2} = \dfrac{16 \pm \sqrt{256-248}}{4}$,

или $x_{1,2} = \dfrac{8 \pm \sqrt{2}}{2}$, или $x_{1,2} = 4 \pm \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Вычислим значение функции при $x = 4 \pm \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

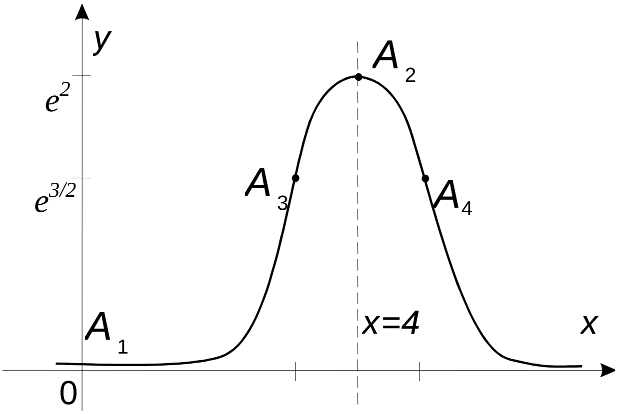
$$y = e^{8x-x^2-14}\Big|_{x=4\pm\frac{\sqrt{2}}{2}} = e^{\frac{3}{2}}.$$

Получили точки $A_3(4 - \dfrac{\sqrt{2}}{2};\ e^{\frac{3}{2}})$ и $A_4(4 + \dfrac{\sqrt{2}}{2};\ e^{\frac{3}{2}})$, с помощью достаточного признака проверим, являются ли они точками перегиба. Для этого проверим, как ведет себя вторая производная при переходе через эти точки.

x	$(-\infty; 4 - \frac{\sqrt{2}}{2})$	$4 - \frac{\sqrt{2}}{2}$	$(4 - \frac{\sqrt{2}}{2}; 4 + \frac{\sqrt{2}}{2})$	$4 + \frac{\sqrt{2}}{2}$	$(4 + \frac{\sqrt{2}}{2}; \infty)$
y''	+	0	–	0	+
y	$\cup$	перегиб	$\cap$	перегиб	$\cup$

Итак, на интервалах $(-\infty; 4 - \dfrac{\sqrt{2}}{2})$, $(4 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}; \infty)$ функция вогнута, на интервале $(4 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}; 4 + \dfrac{\sqrt{2}}{2})$ выпукла, а точки A_3 и A_4 являются точками перегиба.

6. Определим наличие асимптот. Из исследований пункта 1 следует, что вертикальных асимптот функция не имеет, но имеет горизонтальную асимптоту $x = 0$. Наклонных асимптот также нет, так как $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{8x-x^2-14}}{x}=0$. Построим график функции $y=e^{8x-x^2-14}$ по характерным точкам.



Глава 3. Функции нескольких переменных

§1. Частные производные, дифференциал

Определение 1. Если каждой паре (x, y) значений двух независимых переменных величин x и y из некоторой области их изменения D соответствует определенное значение величины z, то говорят, что z есть функция двух переменных x и y, и обозначают $z = f(x, y)$.

Определение 2. Совокупность пар (x, y) значений x и y, при которых функция $z = f(x, y)$ принимает определенное действительное значение, называется областью существования этой функции.

Определение 3. Частной производной функции $z = f(x, y)$ по x называется предел отношения частного приращения Δz по x, $\Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x, y)$ к приращению Δx при условии, что Δx стремится к нулю, т.е.

$$z'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}.$$

Другие обозначения z'_x, f'_x, $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$.

Аналогично определяется частная производная по y:

$$z'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Наряду с определением 3 имеет место другое определение частных производных.

Определение 4. Частной производной функции $z = f(x, y)$ по x называется производная от z, взятая в предположении, что y – постоянная величина, аналогично z'_y – это производная, посчитанная в предположении, что x – постоянна.

Пример 1. Найти частные производные от функции

$z = x^2 y + e^{xy} + \sqrt{y}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y \cdot (x^2)' + e^{xy} \cdot (xy)'_x + 0 = 2xy + e^{xy} \cdot y,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 \cdot (y)' + e^{xy} \cdot (xy)'_y + (y^{\frac{1}{2}})' = x^2 + xe^{xy} + \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

Определение 5. Дифференциал первого порядка функции двух переменных находится по формуле

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy .$$

Пример 2. Найти dz для функции $z = \frac{x}{y}$.

Найдем частные производные: $z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y} \cdot (x)' = \frac{1}{y}$, $z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = x \cdot (y^{-1})' = -\frac{x}{y^2}$, тогда $dz = \frac{1}{y} dx - \frac{x}{y^2} dy$, или $dz = \frac{ydx - xdy}{y^2}$.

Приближенное вычисление с помощью дифференциала

Известно, что при малых приращениях аргументов x и y функция $z = f(x, y)$ получает полное приращение Δz, приближенно равное dz, т.е.

$$\Delta z \cong dz.$$

Так как $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$,

$dz = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy$ и $dx = \Delta x$; $dy = \Delta y$, получим

$f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x,y) \cong f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y$ или

$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \cong f(x, y) + f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y$.

Введем обозначения $x_1 + \Delta x = x_2$, $y_1 + \Delta y = y_2$, получаем

$f(x_2, y_2) \cong f(x_1, y_1) + f'_x(x_1, y_1)\Delta x + f'_y(x_1, y_1)\Delta y$,

где $\Delta x = x_2 - x_1$, $\Delta y = y_2 - y_1$.

Эта формула позволяет находить приближенное значение функции $z = f(x, y)$ в точке (x_2, y_2), если известно ее точное значение в точке (x_1, y_1).

Пример 3. Дана функция $z = \ln(\sqrt{x} + y)$ и точки $P_1(1;\ 0)$; $P_2(0{,}96;0{,}05)$. Найти приближенное значение функции в точке P_2, исходя из ее точного значения в точке P_1.

Решение: а) для отыскания приближенного значения функции $z = \ln(\sqrt{x} + y)$ в точке $P_2(0{,}96;\ 0{,}05)$ воспользуемся формулой $f(x_2, y_2) \cong f(x_1, y_1) + f'_x(x_1, y_1)\Delta x + f'_y(x_1, y_1)\Delta y$, где $\Delta x = 0{,}96 - 1 = -0{,}04$; $\Delta y = 0{,}05 - 0{,}00 = 0{,}05$;

$f(x_1, y_1) = \ln(\sqrt{1} + 0) = \ln 1 = 0$; $f(x_2, y_2) = \ln(\sqrt{0{,}96} + 0{,}05)$;

б) находим частные производные f'_x и f'_y в точке $P_1(1, 0)$:

$$f'_x = [\ln(\sqrt{x} + y)]'_x = \frac{1}{\sqrt{x} + y} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}; \quad f'_x(1,0) = \frac{1}{2};$$

$$f'_y = [\ln(\sqrt{x} + y)]'_y = \frac{1}{\sqrt{x} + y} \cdot 1; \quad f'_y(1,0) = 1;$$

в) найденные значения $f'_x(1,0)$, $f'_y(1,0)$, $\Delta x = -0{,}04$, $\Delta y = 0{,}05$ подставим в формулу $f(0{,}96;\ 0{,}05) = \ln(\sqrt{0{,}96} + 0{,}05) \cong$ $\cong 0{,}5\cdot(-0{,}04) + 1\cdot 0{,}05 = 0{,}03$, так как $f(1, 0) = 0$.

Ответ: $\ln(\sqrt{0{,}96} + 0{,}05) \cong 0{,}03$.

Определение 6. Частные производные от частных производных первого порядка называются частными производными второго порядка для функции $z = f(x,y)$ и обозначаются:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''_{xx}; \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z''_{yy};$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = z''_{yx}; \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z''_{xy}.$$

Доказано, что $z''_{xy} = z''_{yx}$; z''_{xy} и z''_{yx} называются смешанными частными производными второго порядка для функции $z = f(x, y)$.

Пример 4. Доказать, что $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{1}{x^2}$,

если $z = \ln(y - x) - \ln x - \ln y$.

Найдем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y-x}(y-x)'_x - \frac{1}{x} - 0 = -\frac{1}{y-x} - \frac{1}{x},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)'_x = \frac{1}{(y-x)^2}(y-x)'_x + \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{(y-x)^2} + \frac{1}{x^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)'_y = \frac{1}{(y-x)^2}(y-x)'_y + 0 = \frac{1}{(y-x)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{(y-x)^2} + \left(-\frac{1}{(y-x)^2} + \frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x^2}.$$

$\dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{x^2}$, что и требовалось доказать.

§2. Экстремумы функции двух переменных. Наибольшее и наименьшее значение функции z = *f*(*x*,*y*) в замкнутой области

Определение 1. Функция $z = f(x, y)$ имеет максимум в точке $M_0(x_0, y_0)$, если $f(x_0, y_0) > f(x, y)$ для всех точек (x, y), достаточно близких к точке (x_0, y_0) и отличных от нее.

Определение 2. Функция $z = f(x, y)$ имеет минимум в точке $M_0(x_0, y_0)$, если $f(x_0, y_0) < f(x, y)$ для всех точек (x, y), достаточно близких к точке (x_0, y_0) и отличных от нее.

Максимум и минимум функции называются **экстремумами** функции $z = f(x, y)$.

Теорема 1 (необходимые условия экстремума).
Если функция $z = f(x, y)$ достигает экстремума в точке $M_0(x_0, y_0)$, то частные производные от функции $z = f(x, y)$, z'_x и z'_y обращаются в нуль или не существуют в точке M_0.

Точки, в которых частные производные обращаются в нуль или не существуют, называются **критическими**.

Теорема 2 (достаточный признак экстремума).
Пусть в некоторой области, содержащей критическую точку $M_0(x_0, y_0)$, функция $f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные до третьего порядка включительно, и пусть

$$A = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2}, \ B = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} \text{ и } C = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2}.$$

Тогда
1) $f(x, y)$ имеет максимум в точке M_0, если $A \cdot C - B^2 > 0$ и $A < 0$;
2) $f(x, y)$ имеет минимум в точке M_0, если $A \cdot C - B^2 > 0$ и $A > 0$;
3) $f(x, y)$ не имеет экстремума, если $A \cdot C - B^2 < 0$;
4) если $A \cdot C - B^2 = 0$, то экстремум может быть, может не быть.

Пример 1. Найти экстремумы функции

$$z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1.$$

1. Находим z'_x, z'_y и критические точки, т.е. такие точки, в которых z'_x и z'_y равны нулю. $z'_x = 3x^2 - 6y$, $z'_y = 24y^2 - 6x$.

Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 6y = 0, \\ 24y^2 - 6x = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0, y_1 = 0, \\ x_2 = 1, y_2 = 0,5. \end{cases}$$

$M_1(0; 0)$ и $M_2(1; 0,5)$ — критические точки.

2. Находим частные производные z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy} и их значения в критических точках:

$$z''_{xx} = 6x;\ z''_{xy} = -6;\ z''_{yy} = 48y;$$

$A_1 = z''_{xx}(0, 0) = 0$; $B_1 = z''_{xy}(0, 0) = -6$; $C_1 = z''_{yy}(0, 0) = 0$.

В точке $M_1(0, 0)$: $A_1 \cdot C_1 - B_1^2 = 0 - 36 = -36 < 0$; значит, в точке M_1 экстремума нет.

$$A_2 = z''_{xx}(1; 0{,}5) = 6;\ B_2 = z''_{xy}(1; 0{,}5) = -6;$$

$$C_2 = z''_{yy}(1; 0{,}5) = 24.$$

В точке $M_2(1; 0{,}5)$ $A_2 \cdot C_2 - B_2^2 = 6 \cdot 24 - 36 = 108 > 0$ и $A_2 > 0$, значит, точка M_2 – точка минимума.

$z_{\min}(1;0{,}5) = 1^3 + 8 \cdot (0{,}5)^3 - 6 \cdot 1 \cdot 0{,}5 + 1 = 0$.

Ответ: $z_{\min}(1;0{,}5) = 0$.

Чтобы найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = f(x, y)$ в замкнутой области, нужно:

а) найти критические точки, лежащие внутри области, вычислить значение функции в этих точках.

б) исследовать функцию на границе области; если граница состоит из нескольких различных линий, то исследование проводится для каждого участка в отдельности.

в) сравнить полученные значения функции и установить наибольшее и наименьшее значение функции.

Пример 2. Найти наибольшее и наименьшее значение функции

$z = 2x^2 + y^2 - 2x - y$ в прямоугольнике $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2$.

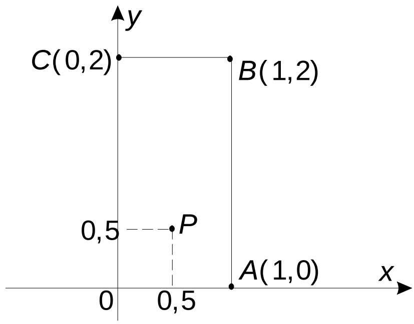
Решение. 1. находим $z'_x = 4x - 2$, $z'_y = 2y - 1$, для отыскания критических точек составим систему

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 2 = 0 \\ 2y - 1 = 0 \end{cases}$$ отсюда $x = 0{,}5$; $y = 0{,}5$.

$P(0{,}5;\ 0{,}5)$ – критическая точка и принадлежит заданной области.

Находим значение в точке P:

$$z(0,5;0,5)=2\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-2\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=-\frac{3}{4}.$$



2. Граница области состоит из отрезков OA, AB, BC и CO. Определим наибольшее и наименьшее значение функции на каждом из этих участков. На отрезке OA: $y = 0$, а $0 \le x \le 1$. Если $y = 0$, то функция z на этом отрезке имеет вид $z = 2x^2 - 2x$, и задача сводится к отысканию наибольшего и наименьшего значения этой функции одного аргумента x на отрезке [0,1]. $z'_x = 4x - 2$; $z'_x = 0$; тогда $4x - 2 = 0$, отсюда $x = 0,5$. Находим значение z в точке $P_1(0,5;\ 0)$ и на концах отрезка, т.е. в точках $O(0,\ 0)$ и $A(1,\ 0)$.

$z_{\text{наим.}}(0,5;\ 0) = 2\cdot\frac{1}{4}-2\cdot\frac{1}{2} = -0,5$; $z(0,\ 0) = 0$; $z_{\text{наиб.}}(1,\ 0) = 0$.

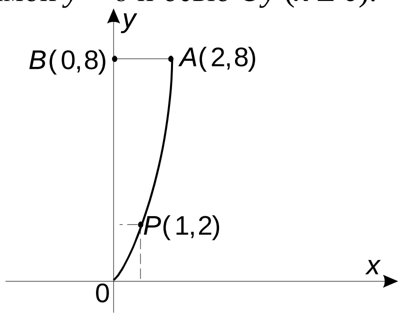
Аналогично проводим решение на каждом из оставшихся участков.

На отрезке AB: $x = 1$, тогда $z = 2 + y^2 - 2 - y = y^2 - y$ – функция аргумента y при $0 \le y \le 2$. $z'_y = 2y - 1$; $z'_y = 0$ при $y = 0,5$. Находим значение z в точках $P_2(1;\ 0,5)$, $B(1,\ 2)$; $z_{\text{наим.}}(1;\ 0,5) = -\frac{1}{4}$; $z_{\text{наиб.}}(1;2) = 2$, а $z_A = 0$ уже известно.

На отрезке BC: $y = 2$, тогда $z = 2x^2 - 2x + 2$ при $0 \le x \le 1$. $z'_x = 4x - 2$; $z'_x = 0$ при $x = 0,5$. Находим значения z в

$P_3(0,5;\ 2)$ и $C(0,\ 2)$ и $z_B = 2$ – известно. $z_{наим.}(0,5;\ 2) = \frac{3}{2}$;
$z_{наиб.}(0;\ 2) = 2$.
На отрезке CO: $x = 0$, тогда $z = y^2 - y$ при $0 \le y \le 2$.
$z'_y = 2y - 1$; $z'_y = 0$ при $y = 0{,}5$. Находим z в точках $P_4(0;\ 0,5)$ и $O(0,\ 0)$, в точке $C(0,\ 2)$ значение $z_{наиб.}(0;\ 2) = 2$ уже найдено. $z_{наим.}(0;\ 0,5) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$; $z(0,\ 0) = 0$.
Сравнивая полученные значения z в критической точке и наименьшие значения z на участках границы, заключаем, что $z_{наим.} = -\frac{3}{4}$ в точке $P(0,5;0,5)$, а наибольшее значение $z_{наиб.} = 2$ в точках $B(1,\ 2)$ и $C(0,\ 2)$.

Пример 3. Найти наибольшее и наименьшее значение функции
$z = 3x^2 - 4xy + 4y + 2x + 6$ в области, ограниченной параболой $y = 2x^2$, прямой $y = 8$ и осью Oy ($x \ge 0$).



Решение: а) находим критические точки

$$\begin{cases} z'_x = 6x - 4y + 2 = 0 \\ z'_y = -4x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 1 \end{cases}$$

Получили критическую точку $P(1,\ 2)$, которая расположена на границе OA:
$z(1,\ 2) = 3 - 8 + 8 + 2 + 6 = 11$;

б) граница области состоит их трех участков: OA, AB, BO.
На участке OA: $y = 2x^2$, а $0 \le x \le 2$, функция имеет вид $z = 11x^2 - 8x^3 + 2x + 6$. Находим $z'_x = 22x - 24x^2 + 2$, $z'_x = 0$, при $x = 1$ и $x = -\frac{1}{2}$, но $x = -\frac{1}{2}$ не входит в указанную область $[0, 2]$. Рассматриваем только $x = 1$, а $y = 2 \cdot 1^2 = 2$, точка $P(1, 2)$ – была уже отмечена. Находим $z(0, 0) = 6$, и значение z в точке $A(2, 8)$, т.е. $z(2, 8) = -10$. $z_{наим.} = -10$, $z_{наиб.}(1,2) = 11$.
На участке AB: $y = 8$, $z = 3x^2 - 30x + 38$ при $0 \le x \le 2$.
$z'_x = 6x - 30$, $z'_x = 0$ при $x = 5$ – это значение не входит в область $[0, 2]$. Находим значение z в точке B, т.е. $z(0, 8) = 38$.
$z_{наим.}(2, 8) = -10$; $z_{наиб.} = 38$ в точке B.
На участке BO: $x = 0$, $z = 4y + 6$ при $0 \le y \le 8$.
По виду $z = 4y + 6$ устанавливаем, что эта функция растет на $[0, 8]$ и поэтому находим сразу значение z в точках B и O: $z(0, 8) = 38$, $z(0, 0) = 6$;
в) сравнивая найденные значения z, заключаем: $z_{наиб.} = 38$ в точке $B(0, 8)$; $z_{наим.} = -10$ в точке $A(2, 8)$.

Индивидуальное задание №1

Задача 1. Найти область определения функции.

1. $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-3x-4}}$.

2. $y=\arccos\dfrac{1-2x}{3}$.

3. $y=\dfrac{1}{\sqrt{|x|-x}}$.

4. $y=\dfrac{2\sqrt{x}}{x^2-3x+2}$.

5. $y=\lg(5x-x^2-6)$.

6. $y=\dfrac{\sqrt{x+1}}{\lg^2 x^2}$.

7. $y=\sqrt{x^2-3x+2}+\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+2x+3}}$.

8. $y=\sqrt{\sin\sqrt{x}}$.

9. $y=2^{\arccos(1-x)}$.

10. $y=\sqrt{\lg\dfrac{5x-x^2}{6}}$.

11. $y=\arcsin\dfrac{x-2}{3}$.

12. $y=\dfrac{1}{\lg(5-x)}+\sqrt{x+2}$.

13. $y=\arcsin\dfrac{x-2}{3}+\sqrt{x}$.

14. $y=\lg\dfrac{x-3}{x^2-5x+4}$.

15. $y=\arcsin\dfrac{2-x}{3}+\sqrt{3-x}$.

16. $y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{16-x^2}$.

17. $y=\sqrt{x}+\left(x-2\right)^{-1/3}-\lg(2x-3)$.

18. $y=\arccos\dfrac{x-2}{2x}$.

19. $y=\dfrac{3}{4-x^2}+\lg(x-1)$.

20. $y=2\sqrt{x-3}+\sqrt{3-x}+\sqrt{x^2+1}$.

21. $y=\dfrac{1}{\lg(2-x)}+\sqrt{x+3}$.

22. $y=\arcsin\dfrac{x-2}{5}+\dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$.

23. $y=\lg\dfrac{x^2-6x+8}{x-3}$.

24. $y=\arccos\dfrac{1-x}{2}+2\sqrt{x}$.

25. $y=\lg(\sqrt{x-3}+\sqrt{5-x})$.

26. $y=2\ln\dfrac{x}{x+1}-1$.

27. $y=\ln(\sqrt{2}\sin x)$.

28. $y=\ln(\cos x-\sin x)$.

29. $y=\sqrt{\dfrac{\sin x+\cos x}{2}}$.

30. $y=\sqrt{(x-1)(x^2-2x-2)}$.

Задача 2. Вычислить предел.

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3+6+...+3n}{n^2+4}$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3-n)^3-(2-n)^3}{(1-n)^3-(1+n)^3}$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3-n)^3-(2-n)^3}{(1-n)^3-(1+n)^3}$.

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1-n)^3-(1+n)^3}{(1+n)^3-(1-n)^3}$.

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(6-n)^2-(6+n)^2}{(6+n)^2-(1-n)^2}$.

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+3+5+...+(2n-1)}{1+2+...+n}$.

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1+2n)^3-8n^3}{(1+2n)^2+4n^2}$.

8. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+4+...+(3n-2)}{\sqrt{5n^4+n+1}}$.

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3-n)^3}{(n+1)^2-(n+1)^3}$.

10. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^2+(n-1)^2-(n+2)^3}{(4-n)^3}$.

11. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+3^{-1}+...+3^{-n}}{1+5^{-1}+...+5^{-n}}$.

12. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^3+(n+2)^3}{(n+4)^3+(n+3)^3}$.

13. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+3)^3+(n+4)^3}{(n+3)^3-(n+4)^3}$.

14. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^3-(n-1)^3}{(n+1)^3+(n-1)^3}$.

15. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{8n^3-2n}{(n+1)^3-(n-1)^3}$.

16. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+6)^3-(n+1)^3}{(2n+3)^2+(n+4)^2}$.

17. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n-3)^3-(n+5)^3}{(3n-1)^3+(2n+3)^3}$.

18. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+10)^2+(3n+1)^2}{(n+6)^3-(n+1)^3}$.

19. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)^3+(3n+2)^3}{(2n+3)^3-(n+7)^3}$.

20. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+7)^3-(n+2)^3}{(3n+2)^2+(4n+1)^2}$.

21. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)^3-(2n+3)^3}{(2n+1)^2+(2n+3)^2}$.

22. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3-(n-1)^3}{(n+1)^3-n^3}$.

23. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+4+\ldots+2n}{1+3+\ldots+(2n+1)}$.

24. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^3-(n-1)^3}{(n+1)^2+(n-1)^2}$.

25. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\ldots+n}{n-n^2+3}$.

26. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+4+6+\ldots+2n}{1+3+5+\ldots+(2n+1)}$.

27. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n+7^n}{2^n-7^{n-1}}$.

28. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!+(n+2)!}{(n-1)!+(n+2)!}$.

29. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3+6+9+\ldots+3n}{n^2+4}$.

30. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n-2^n}{3^{n-1}+2^n}$.

Задача 3. Вычислить предел.

1. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(x^3-2x-1)(x+1)}{x^4+4x^2-5}$.

2. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3-3x-2}{x+x^2}$.

3. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(x^2+3x+2)^2}{x^3+2x^2-x-2}$.

4. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(2x^2-x-1)^2}{x^3+2x^2-x-2}$.

5. $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{(x^2+2x-3)^2}{x^3+4x^2+3x}$.

6. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(x^3-2x-1)^2}{x^4+2x+1}$.

7. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^3-(1+3x)}{x+x^5}$.

8. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-2x+1}{2x^2-x-1}$.

9. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3-3x-2}{x^2-x-2}$.

10. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+5x^2+7x+3}{x^3+4x^2+5x+2}$.

11. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$.

12. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3+x^2-5x+3}{x^3-x^2-x+1}$.

13. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+4x^2+5x+2}{x^3-3x-2}$.

14. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^4-1}{2x^4-x^2-1}$.

15. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3+5x^2+8x+4}{x^3+3x^2-4}$.

16. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-5x^2+8x-4}{x^3-3x^2+4}$.

17. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-6x^2+12x-8}{x^3-3x^2+4}$.

18. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3+5x^2+8x+4}{x^3+7x^2+16x+12}$.

19. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3-3x-2}{(x^2-x-2)^2}$.

20. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-3x-2}{x-2}$.

21. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3-3x-2}{x^2+2x+1}$.

22. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x^2-x+1}$.

23. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^4-1}{2x^4-x^2-1}$.

24. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2+3x+2}{x^3+2x^2-x-2}$.

25. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2-x-1}{x^3+2x^2-x-2}$.

26. $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2+2x-3}{x^3+4x^2+3x}$.

27. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-2x-1}{x^4+2x+1}$.

28. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^3-(1+3x)}{x^2+x^5}$.

29. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$.

30. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^3+7x^2+15x+9}{x^3+8x^2+21x+18}$.

Задача 4. Вычислить предел.

1. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$.

2. $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$.

3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x^2-1}}$.

4. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$.

5. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$.

6. $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$.

7. $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$.

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-2x+x^2}-(1+x)}{x}$.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{8+3x+x^2}-2}{x+x^2}$.

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{x+2\sqrt[3]{x^4}}$.

11. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{2x}}$.

12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$.

13. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{4x}-2}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2x}}$.

14. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}$.

15. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt[3]{9x}-3}{\sqrt{3+x}-\sqrt{2x}}$.

16. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x+2}$.

17. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt[3]{16x}-4}{\sqrt{4+x}-\sqrt{2x}}$.

18. $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x^2}-4}$.

19. $\lim\limits_{x\to 1/2}\dfrac{\sqrt[3]{x/4}-1/2}{\sqrt{1/2+x}-\sqrt{2x}}$.

20. $\lim\limits_{x\to 1/3}\dfrac{\sqrt[3]{x/9}-1/3}{\sqrt{1/3+x}-\sqrt{2x}}$.

21. $\lim\limits_{x\to 1/4}\dfrac{\sqrt[3]{x/16}-1/4}{\sqrt{1/4+x}-\sqrt{2x}}$.

22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[7]{x}}$.

23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[5]{x}}$.

24. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{8+3x-x^2}-2}{\sqrt[5]{x^2+x^3}}$.

25. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-2x+3x^2}-(1+x)}{\sqrt[3]{x}}$.

26. $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$.

27. $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt[3]{(\sqrt{x}-4)^2}}$.

28. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{\sqrt[3]{x^3+8}}$.

29. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt[3]{x^2-16}}$.

30. $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{10-x-6\sqrt{1-x}}{2+\sqrt[3]{x}}$.

Задача 5. Вычислить предел.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin x)}{\sin 4x}$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 10x}{e^{x^2}-1}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x^2-5x}{\sin 3x}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 2x}{\cos 7x-\cos 3x}$.

5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4x}{\operatorname{tg}(\pi(2+x))}$.

6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x}{\operatorname{tg}[2\pi(x+1/2)]}$.

7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos^3 x}{4x^2}$.

8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin 3x}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}$.

9. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2^x-1}{\ln(1+2x)}$.

10. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} 2x}{\sin(2\pi(x+10))}$.

11. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1-7x)}{\sin(\pi(x+7))}$.

12. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x+5\pi/2)\operatorname{tg} x}{\arcsin 2x^2}$.

13. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{9\ln(1-2x)}{4\operatorname{arctg} 3x}$.

14. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{3x+1}}{\cos[\pi(x+1)/2]}$.

15. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 7x}{x^2+\pi x}$.

16. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{4+x}-2}{3\operatorname{arctg} x}$.

17. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\sin[\pi(x+1)]}{\ln(1+2x)}$.

18. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 2x-\cos x}{1-\cos x}$.

19. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sin[\pi(x+2)]}$.

20. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin[5(x+\pi)]}{e^{3x}-1}$.

21. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x\sin x}$.

22. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin 2x}{2^{-3x}-1}\ln 2$.

23. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{4x}-1}{\sin(\pi(x/2+1))}$.

24. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{(e^{3x}-1)^2}$.

25. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 x-\operatorname{tg}^2 x}{x^4}$.

26. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin 2x}{\ln(e-x)-1}$.

27. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x(1-\cos 2x)}$.

28. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x^2+1)}{1-\sqrt{x^2+1}}$.

29. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}(\pi(1+x/2))}{\ln(x+1)}$.

30. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2(e^{\pi x}-1)}{3(\sqrt[3]{1+x}-1)}$.

Задача 6. Вычислить предел.

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)^{n}$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+3}{2n+1}\right)^{n+1}$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-1}{n^2}\right)^{n^4}$.

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-1}{n+3}\right)^{n+2}$.

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+2}{2n^2+1}\right)^{n^2}$.

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2-6n+7}{3n^2+20n-1}\right)^{-n+1}$.

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-3n+6}{n^2+5n+1}\right)^{n/2}$.

8. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-10}{n+1}\right)^{3n+1}$.

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{6n-7}{6n+4}\right)^{3n+2}$.

10. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2+4n-1}{3n^2+2n+7}\right)^{2n+5}$.

11. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)^{-n^2}$.

12. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+5n+7}{2n^2+5n+3}\right)^{n}$.

13. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{n^2}$.

14. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n^2+3n-1}{5n^2+3n+3}\right)^{n^3}$.

15. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n+1}{3n-1}\right)^{2n+3}$.

16. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+7n-1}{2n^2+3n-1}\right)^{-n^2}$.

17. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+3}{n+5}\right)^{n+4}$.

18. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3+1}{n^3-1}\right)^{2n-n^3}$.

19. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+21n-7}{2n^2+18n+9}\right)^{2n+1}$.

20. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{10n-3}{10n-1}\right)^{5n}$.

21. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2-5n}{3n^2-5n+7}\right)^{n+1}$.

22. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+3}{n+1}\right)^{-n^2}$.

23. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-6n+5}{n^2-5n+5}\right)^{3n+2}$.

24. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+4}{n+2}\right)^{n}$.

25. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{7n^2+18n-15}{7n^2+11n+15}\right)^{n+2}$.

26. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-1}{2n+1}\right)^{n+1}$.

27. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3+n+1}{n^3+2}\right)^{2n^2}$.

28. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{13n+3}{13n-10}\right)^{n-3}$.

29. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+2n+3}{2n^2+2n+1}\right)^{3n^2-7}$.

30. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+5}{n-7}\right)^{n/6+1}$.

Задача 7. Вычислить предел.

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{\ln x}$.

2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{\ln x}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-2}{3\operatorname{arctg} x}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{\ln(e-x)-1}$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{9\ln(1-2x)}{4\operatorname{arctg} 3x}$.

6. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1-2^{4-x^2}}{2(\sqrt{2x}-\sqrt{3x^2-5x+2})}$.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 10x}{e^{x^2}-1}$.

8. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3^{5x-3}-3^{2x^2}}{\operatorname{tg}\pi x}$.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-4x^2)}{1-\cos x}$.

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-7x)}{\sin[\pi(x+7)]}$.

11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{e^{2x}-e^{x}}$.

12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{2^{-3x}-1}\cdot\ln 2$.

13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-e^{3x^2}}{\arcsin 3x^2}$.

14. $\lim\limits_{x\to \pi/2}\dfrac{\ln 2x-\ln\pi}{\sin(5x/2)\cos x}$.

15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2(e^{\pi x}-1)}{3\sin(\pi(x+4))}$.

16. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{e^{\pi}-e^{x}}{\sin 5x-\sin 3x}$.

17. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln(9-2x^2)}{\sin 2\pi x}$.

18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{(e^{3x}-1)^2}$.

19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-1}{\sin\left[\pi\left(1+x/2\right)\right]}$.

20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 x}{\operatorname{arctg} 4x^2}$.

21. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2^{x-1}-1}{\ln(2x-1)}$.

22. $\lim\limits_{x\to 2\pi} e^{x^2}\dfrac{\sin 7x-\sin 3x}{e^{x^2}-e^{4\pi^2}}$.

23. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln(5-2x)}{\sqrt{10-3x}-2}$.

24. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2^x-16}{\sin\pi x}$.

25. $\lim\limits_{x\to \pi/2}\dfrac{\sin 2x}{\ln(1+4x-2\pi)}$.

26. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-2x}}{x+\sin x^2}$.

27. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{5x}-2^{-7x}}{2x-\operatorname{tg} x}$.

28. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^x}{\sin 2x-\sin x}$.

29. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^x}{x+\operatorname{tg} x^2}$..

30. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{3x}-3^{2x}}{x+\arcsin x^3}$.

Задача 8. Исследовать функцию на непрерывность и построить эскиз графика.

1. $y=\begin{cases}-x, & x\le 0;\\ x^2, & 0<x\le 2;\\ x+1, & x>2.\end{cases}$

2. $y=\begin{cases}x^2+1, & x\le 1;\\ 2x, & 1<x\le 3;\\ x+2, & x>3.\end{cases}$

3. $y=\begin{cases}x-3, & x<0;\\ x+1, & 0\le x\le 4;\\ 3+\sqrt{x}, & x>4.\end{cases}$

4. $y=\begin{cases}\sqrt{1-x}, & x\le 1;\\ 0, & 1<x\le 2;\\ x-2, & x>2.\end{cases}$

5. $y=\begin{cases}2x^2, & x\le 0;\\ x, & 0<x\le 1;\\ 2, & x>1.\end{cases}$

6. $y=\begin{cases}\sin x, & x<0;\\ x, & 0\le x\le 2;\\ 0, & x>2.\end{cases}$

7. $y=\begin{cases}\cos x, & x\le \pi/2;\\ 0, & \pi/2<x<\pi;\\ \pi/2, & x\ge \pi.\end{cases}$

8. $y=\begin{cases}x-1, & x\le 0;\\ x^2, & 0<x<2;\\ 2x, & x\ge 2.\end{cases}$

9. $y=\begin{cases}3x+1, & x<0;\\ x^2+1, & 0\le x<1;\\ 0, & x\ge 1.\end{cases}$

10. $y=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \operatorname{tg}x, & 0<x<\pi/2;\\ x, & x\ge \pi/2.\end{cases}$

11. $y=\begin{cases}x+4, & x<-1;\\ x^2+2, & -1\le x<1;\\ 2x, & x\ge 1.\end{cases}$

12. $y=\begin{cases}x+1, & x\le 0;\\ (x+1)^2, & 0<x\le 2;\\ -x+4, & x>2.\end{cases}$

13. $y=\begin{cases}x+2, & x\le -1;\\ x^2+1, & -1<x\le 1;\\ -x+3, & x>1.\end{cases}$

14. $y=\begin{cases}-x, & x\le 0;\\ -(x-1)^2, & 0<x<2;\\ x-3, & x\ge 2.\end{cases}$

15. $y=\begin{cases}-2(x+1), & x\le -1;\\ (x+1)^3, & -1<x<0;\\ x, & x\ge 0.\end{cases}$

16. $y=\begin{cases}x^2+1, & x\le 1;\\ x-1, & x>1.\end{cases}$

17. $y=\begin{cases}-x+1, & x<-1;\\ x^3, & x\ge -1.\end{cases}$

18. $y=\begin{cases}x^2, & x\le 1;\\ 2x, & x>1.\end{cases}$

19. $y=\begin{cases}-2x+1, & x<0;\\ x^3-1, & x\ge 0.\end{cases}$

20. $y=\begin{cases}x+1, & x\le 1;\\ -x^2, & x>1.\end{cases}$

21. $y=\begin{cases}-x+1, & x\le 2;\\ 2x+1, & x>2.\end{cases}$

22. $y=\begin{cases}x^2, & x<3;\\ x+6, & x\ge 3.\end{cases}$

23. $y=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1}, & x<1;\\ 3x, & x\ge 1.\end{cases}$

24. $y=\begin{cases}2x^2, & x<1;\\ x+1, & x\ge 1.\end{cases}$

25. $y=\begin{cases} e^x, & x<0; \\ 3-x, & x\geq 0. \end{cases}$

26. $y=\begin{cases} 2x-1, & x<1; \\ x^2+1, & x\geq 1. \end{cases}$

27. $y=\begin{cases} -x^2+1, & x\leq 1; \\ 2x+1, & x>1. \end{cases}$

28. $y=\begin{cases} 2x, & x<1; \\ x^2+1, & x\geq 1. \end{cases}$

29. $y=\begin{cases} x^3, & x<-1; \\ x+1, & x\geq -1. \end{cases}$

30. $y=\begin{cases} 2x^2-1, & x<0; \\ x+1, & x\geq 0. \end{cases}$

Индивидуальное задание №2

Задача 1. Исходя из определения производной, найти $f'(0)$.

1. $f(x)=\begin{cases}\operatorname{tg}\left(x^3+x^2\sin\dfrac{2}{x}\right), & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$

2. $f(x)=\begin{cases}\arcsin\left(x^2\cos\dfrac{1}{9x}\right)+\dfrac{2}{3}x, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$

3. $f(x)=\begin{cases}\operatorname{arctg}\left(x\cos\dfrac{1}{5x}\right), & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$

4. $f(x)=\begin{cases}\ln\left(1-\sin\left(x^3\sin\dfrac{1}{x}\right)\right), & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$

5. $f(x)=\begin{cases}\sin\left(x\sin\dfrac{3}{x}\right), & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$

6. $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1+\ln\left(1+x^2\sin\dfrac{1}{x}\right)^2}-1, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$

7. $f(x)=\begin{cases}\sin\left(e^{x^2\sin\frac{5}{x}}-1\right)+x, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$

8. $f(x)=\begin{cases} x^2\cos\dfrac{4}{3x}+\dfrac{x^2}{2}, & x\neq 0; \\ 0, & x=0. \end{cases}$

9. $f(x)=\begin{cases} \operatorname{arctg}\left(x^3-x^{\frac{3}{2}}\sin\dfrac{1}{3x}\right), & x\neq 0; \\ 0, & x=0. \end{cases}$

10. $f(x)=\begin{cases} \sin x\cos\dfrac{5}{x}, & x\neq 0; \\ 0, & x=0. \end{cases}$

11. $f(x)=\begin{cases} x+\arcsin\left(x^2\sin\dfrac{6}{x}\right), & x\neq 0; \\ 0, & x=0. \end{cases}$

12. $f(x)=\begin{cases} \operatorname{tg}(2^{x^2\cos(1/8x)}-1+x), & x\neq 0; \\ 0, & x=0. \end{cases}$

13. $f(x)=\begin{cases} \operatorname{arctg} x\cdot\sin\dfrac{7}{x}, & x\neq 0; \\ 0, & x=0. \end{cases}$

14. $f(x)=\begin{cases} 2x^2+x^2\cos\dfrac{1}{9x}, & x\neq 0; \\ 0, & x=0. \end{cases}$

15. $f(x)=\begin{cases} x^2\cos^2\dfrac{11}{x}, & x\neq 0; \\ 0, & x=0. \end{cases}$

16. $f(x)=\begin{cases} 2x^2+x^2\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0; \\ 0, & x=0. \end{cases}$

17. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\ln\cos x}{x}, & x\neq 0; \\ 0, & x=0. \end{cases}$

18. $f(x)=\begin{cases} 6x+x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0; \\ 0, & x=0. \end{cases}$

19. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x}, & x\neq 0; \\ 0, & x=0. \end{cases}$

20. $f(x)=\begin{cases} e^{x\sin 5x}-1, & x\neq 0; \\ 0, & x=0. \end{cases}$

21. $f(x)=\begin{cases} 3^{x^2\sin\frac{2}{x}}-1+2x, & x\neq 0; \\ 0, & x=0. \end{cases}$

22. $f(x)=\begin{cases} \sqrt{1+\ln(1+3x^2\cos(2/x))}-1, & x\neq 0; \\ 0, & x=0. \end{cases}$

23. $f(x)=\begin{cases} e^{x\sin(3/5\,x)}-1, & x\neq 0; \\ 0, & x=0. \end{cases}$

24. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2^{\operatorname{tg} x}-2^{\sin x}}{x^2}, & x\neq 0;\\ 0, \quad x=0.\end{cases}$

25. $f(x)=\begin{cases}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{3x}{2}-x^2\sin\dfrac{1}{x}\right), & x\neq 0;\\ 0, \quad x=0.\end{cases}$

26. $f(x)=\begin{cases}e^{\sin\left(x^{3/2}\sin\frac{2}{x}\right)}-1+x^2, & x\neq 0;\\ 0, \quad x=0.\end{cases}$

27. $f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{1-2x^3\sin\dfrac{5}{x}}-1+x, & x\neq 0;\\ 0, \quad x=0.\end{cases}$

28. $f(x)=\begin{cases}x^2 e^{|x|}\sin\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0;\\ 0, \quad x=0.\end{cases}$

29. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+2x^2+x^3)}{x}, & x\neq 0;\\ 0, \quad x=0.\end{cases}$

30. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{x}, & x\neq 0;\\ 0, \quad x=0.\end{cases}$

Задача 2. Найти производную.

1. $y=e^{2x}(2-\sin 2x-\cos 2x)/8$.

2. $y=e^{-x}\arcsin e^{x}-\ln(1+\sqrt{1-e^{2x}})$.

3. $y = 3e^{\sqrt[3]{x}}(\sqrt[3]{x^2} - 2\cdot\sqrt[3]{x} + 2)$.

4. $y = e^{\sin x}\left(x - \dfrac{1}{\cos x}\right)$.

5. $y = \dfrac{e^x}{2}[(x^2 - 1)\cos x + (x-1)^2 \sin x]$.

6. $y = -\dfrac{1}{2}e^{-x^2}(x^4 + 2x^2 + 2)$.

7. $y = \dfrac{2x-1}{4}\sqrt{2 + x - x^2}$.

8. $y = (x-4)\sqrt{8x - x^2 - 7}$.

9. $y = \dfrac{x^3}{3}\arccos x - \dfrac{2+x^2}{9}\sqrt{1-x^2}$.

10. $y = \dfrac{3+x}{2}\sqrt{x(2-x)} + 3\arccos\sqrt{\dfrac{x}{2}}$.

11. $y = \dfrac{4+x^2}{x^3}\operatorname{arctg}\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{4}{x}$.

12. $y = \dfrac{x-3}{2}\sqrt{6x - x^2 - 8}$.

13. $y = \dfrac{2x-5}{4}\sqrt{5x - 4 - x^2}$.

14. $y = \sqrt{1-x^2} - x\arcsin\sqrt{1-x^2}$.

15. $y = (2x^2 + 6x + 5)\operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{x+2} - x$.

16. $y = \left(2x^2 - x + \dfrac{1}{2}\right)\operatorname{arctg}\dfrac{x^2-1}{x\sqrt{3}}$.

17. $y=\sqrt{1+2x-x^2}\arcsin\dfrac{x\sqrt{2}}{1+x}$.

18. $y=(x^2+8)\sqrt{x^2-4}+\dfrac{x^4}{16}\arcsin\dfrac{2}{x}$.

19. $y=e^{-2x}\arcsin(e^{2x})$.

20. $y=\sqrt{9x^2-12x+5}\,\mathrm{arctg}(3x-2)$.

21. $y=\dfrac{1}{81}(x^2+18)\sqrt{x^2-9}$.

22. $y=e^{-3x}\arcsin(e^{3x})$.

23. $y=\sqrt{16x^2-8x+2}\cdot\mathrm{arctg}(4x-1)$.

24. $y=(4x^2+12x+11)\sqrt{x^2+3x+2}$.

25. $y=e^{-5x}\arcsin(e^{5x})$.

26. $y=\sqrt{x^2-8x+17}\,\mathrm{arctg}(x-4)$.

27. $y=(3x^2-4x+2)\sqrt{9x^2-12x+3}$.

28. $y=\sqrt{4x^2-12x+10}\,\mathrm{arctg}(2x-3)$.

29. $y=\dfrac{2}{3}(4x^2-4x+3)\sqrt{x^2-x}$.

30. $y=\sqrt{25x^2+1}\,\mathrm{arctg}\,5x$.

Задача 3. Найти производную.

1. $y=\dfrac{2(3x^3+4x^2-x-2)}{15\sqrt{1+x}}$.

2. $y=\dfrac{(2x^2-1)\sqrt{1+x^2}}{3x^3}$.

3. $y=\dfrac{x^4-8x^2}{2(x^2-4)}$.

4. $y=\dfrac{2x^2-x-1}{3\sqrt{2+4x}}$.

5. $y=\dfrac{(1+x^8)\sqrt{1+x^8}}{12x^{12}}$.

6. $y=\dfrac{x^2}{2\sqrt{1-3x^4}}$.

7. $y=\dfrac{(x^2-6)\sqrt{(4+x^2)^3}}{120x^5}$.

8. $y=\dfrac{(x^2-8)\sqrt{x^2-8}}{6x^3}$.

9. $y=\dfrac{4+3x^3}{x\sqrt[3]{(1+x^3)^2}}$.

10. $y=\sqrt[3]{\dfrac{(1+x^{3/4})^2}{x^{3/2}}}$.

11. $y=\dfrac{x^6+x^3-2}{\sqrt{1-x^3}}$.

12. $y=\dfrac{(x^2-2)\sqrt{4+x^2}}{24x^3}$.

13. $y=\dfrac{1+x^2}{2\sqrt{1+2x^2}}$.

14. $y=\dfrac{\sqrt{x-1}(3x+2)}{4x^2}$.

15. $y=\dfrac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3x^3}$.

16. $y=\dfrac{x^6+8x^3-128}{\sqrt{8-x^3}}$.

17. $y=\dfrac{\sqrt{2x+3}(x-2)}{x^2}$.

18. $y=\dfrac{(1-x^2)}{\sqrt[5]{x^3+\frac{1}{x}}}$.

19. $y=\dfrac{(2x^2+3)\sqrt{x^2-3}}{9x^3}$.

20. $y=\dfrac{x-1}{(x^2+5)\sqrt{x^2+5}}$.

21. $y=\dfrac{(2x+1)\sqrt{x^2-x}}{x^2}$.

22. $y=2\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$.

23. $y=\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+5}}$.

24. $y=3\dfrac{\sqrt[3]{x^2+x+1}}{x+1}$.

25. $y=3\cdot\sqrt[3]{(x+1)\big/(x-1)^2}$.

26. $y=(x+7)\big/6\sqrt{x^2+2x+7}$.

27. $y=(x\sqrt{x+1})\big/(x^2+x+1)$.

28. $y=(x^2+2)\big/2\sqrt{1-x^4}$.

29. $y=((x+3)\sqrt{2x-1})\big/(2x+7)$.

30. $y=(3x+\sqrt{x})\big/(\sqrt{x^2+2})$.

Задача 4. Найти производную.

1. $y=(\operatorname{arctg} x)^{(1/2)\ln \operatorname{arctg} x}$.

2. $y=(\sin\sqrt{x})^{\ln\sin\sqrt{x}}$.

3. $y=(\sin x)^{5e^x}$.

4. $y=(\arcsin x)^{e^x}$.

5. $y=(\ln x)^{3^x}$.

6. $y=x^{\arcsin x}$.

7. $y=(\operatorname{ctg} 3x)^{2e^x}$.

8. $y=x^{e^{\operatorname{tg} x}}$.

9. $y=(\operatorname{tg} x)^{4e^x}$.

10. $y=(\cos 5x)^{e^x}$.

11. $y=(x\sin x)^{\sin(x\sin x)}$.

12. $y=(x-5)^{\operatorname{ch} x}$.

13. $y=(x^3+4)^{\operatorname{tg} x}$.

14. $y=x^{\sin x^3}$.

15. $y=(x^2-1)^{\operatorname{sh} x}$.

16. $y=(x^4+5)^{\operatorname{ctg} x}$.

17. $y=(\sin x)^{5^{x/2}}$.

18. $y=(x^2+1)^{\cos x}$.

19. $y=19^{x^{19}}x^{19}$.

20. $y=x^{3^x}\cdot 2^x$.

21. $y=(\sin\sqrt{x})^{e^{1/x}}$.

22. $y=x^{e^{\operatorname{ctg} x}}$.

23. $y = x^{e^{\cos x}}$.

24. $y = x^{2^x} \cdot 5^x$.

25. $y = x^{e^{\mathrm{c}\sin x}}$.

26. $y = (\operatorname{tg} x)^{\ln \operatorname{tg} x/4}$.

27. $y = x^{e^{\operatorname{arctg} x}}$.

28. $y = (x^8 + 1)^{\operatorname{th} x}$.

29. $y = x^{29^x} \cdot 29^x$.

30. $y = (\cos 2x)^{\ln \cos 2x/4}$.

Задача 5. Найти производную y'_x.

1. $\begin{cases} x = \dfrac{3t^2+1}{3t^3}, \\ y = \sin(t^3/3+t). \end{cases}$

2. $\begin{cases} x = \sqrt{1-t^2}, \\ y = \operatorname{tg}\sqrt{1+t}. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x = \sqrt{2t-t^2}, \\ y = 1\Big/\sqrt[3]{(t-1)^2}. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x = \arcsin(\sin t), \\ y = \arccos(\cos t). \end{cases}$

5. $\begin{cases} x = \ln(t+\sqrt{t^2+1}), \\ y = t\sqrt{t^2+1}. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x = \sqrt{2t-t^2}, \\ y = \arcsin(t-1). \end{cases}$

7. $\begin{cases} x = \operatorname{ctg}(2e^t), \\ y = \ln\operatorname{tg} e^t. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x = \ln\operatorname{ctg} t, \\ y = 1\big/\cos^2 t. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} e^{t/2}, \\ y = \sqrt{e^t+1}. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x = \ln\sqrt{\dfrac{1-t}{1+t}}, \\ y = \sqrt{1-t^2}. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x = \ln(1\big/\sqrt{1-t^4}), \\ y = \arcsin(1-t^2)\big/(1+t^2). \end{cases}$

12. $\begin{cases} x = \sqrt{1-t^2}, \\ y = t\Big/\sqrt{1-t^2}. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x = \arcsin(\sqrt{1-t^2}), \\ y = (\arccos t)^2. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x = t\Big/\sqrt{1-t^2}, \\ y = \ln((1+\sqrt{1-t^2}))\big/t. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x = (1+\cos^2 t)^2, \\ y = \cos t\big/\sin^2 t. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x = \ln((1-t)/(1+t)), \\ y = \sqrt{1-t^2}. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x = \arccos(1/t), \\ y = \sqrt{t^2 - 1} + \arcsin(1/t). \end{cases}$

18. $\begin{cases} x = 1/\ln t, \\ y = \ln \dfrac{1 + \sqrt{1 - t^2}}{t}. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x = \arcsin \sqrt{t}, \\ y = \sqrt{1 + \sqrt{t}}. \end{cases}$

20. $\begin{cases} x = (\arcsin t)^2, \\ y = t/\sqrt{1 - t^2}. \end{cases}$

21. $\begin{cases} x = t\sqrt{t^2 + 1}, \\ y = \ln \dfrac{1 + \sqrt{1 + t^2}}{t}. \end{cases}$

22. $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t, \\ y = \ln \dfrac{\sqrt{1 + t^2}}{t + 1}. \end{cases}$

23. $\begin{cases} x = \ln(1 - t^2), \\ y = \arcsin \sqrt{1 - t^2}. \end{cases}$

24. $\begin{cases} x = \operatorname{arctg}((t + 1)/(t - 1)), \\ y = \arcsin \sqrt{1 - t^2}. \end{cases}$

25. $\begin{cases} x = \ln \sqrt{(1 - \sin t)/(1 + \sin t)}, \\ y = (1/2)\operatorname{tg}^2 t + \ln \cos t. \end{cases}$

26. $\begin{cases} x = \sqrt{t - t^2} - \operatorname{arctg} \sqrt{\dfrac{1 - t}{t}}, \\ y = \sqrt{t} - \sqrt{1 - t} \arcsin \sqrt{t}. \end{cases}$

27. $\begin{cases} x = \ln \operatorname{tg} t, \\ y = 1/\sin^2 t. \end{cases}$

28. $\begin{cases} x = \dfrac{t^2 \ln t}{1 - t^2} + \ln \sqrt{1 - t^2}, \\ y = \dfrac{t}{\sqrt{1 - t^2}} \arcsin t + \ln \sqrt{1 - t^2}. \end{cases}$

29. $\begin{cases} x = e^{\sec^2 t}, \\ y = \operatorname{tg} t \ln \cos t + \operatorname{tg} t - t. \end{cases}$

30. $\begin{cases} x = \dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}} \arcsin t + \ln \sqrt{1-t^2}, \\ y = \dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}. \end{cases}$

Задача 6. Вычислить приближенно с помощью дифференциала.

1. $y = \sqrt[3]{x}$, x = 7,76. **2.** $y = \sqrt[3]{x^3 + 7x}$, x = 1,012.

3. $y = (x + \sqrt{5 - x^2}) / 2$, x = 0,98. **4.** $y = \sqrt[3]{x}$, x = 27,54.

5. $y = \arcsin x$, x = 0,08. **6.** $y = \sqrt[3]{x^2 + 2x + 5}$, x = 0,97.

7. $y = \sqrt[3]{x}$, x = 26,46. **8.** $y = \sqrt{x^2 + x + 3}$, x = 1,97.

9. $y = x^{11}$, x = 1,021. **10.** $y = \sqrt[3]{x}$, x = 1,21.

11. $y = x^{21}$, x = 0,998. **12.** $y = \sqrt[3]{x^2}$, x = 1,03.

13. $y = x^6$, x = 2,01. **14.** $y = \sqrt[3]{x}$, x = 8,24.

15. $y = x^7$, x = 1,996. **16.** $y = \sqrt[3]{x}$, x = 7,64.

17. $y = \sqrt{4x - 1}$, x = 2,56. **18.** $y = 1/\sqrt{2x^2 + x + 1}$, x = 1,016.

19. $y=\sqrt[3]{x}$, $x = 8{,}36$.

20. $y=1/\sqrt{x}$, $x = 4{,}16$.

21. $y = x^7$, $x = 2{,}002$.

22. $y=\sqrt{4x-3}$, $x = 1{,}78$.

23. $y=\sqrt{x^3}$, $x = 0{,}98$.

24. $y = x^5$, $x = 2{,}997$.

25. $y=\sqrt[5]{x^2}$, $x = 1{,}03$.

26. $y = x^4$, $x = 3{,}998$.

27. $y=\sqrt{1+x}$, $x = 0{,}01$.

28. $y=\sqrt[3]{3x+1}$, $x = 0{,}01$.

29. $y=\sqrt[4]{2x-1}$, $x = 1{,}02$.

30. $y=\sqrt{x^2+5}$, $x = 1{,}97$.

Задача 7. Составить уравнение нормали (в вариантах 1–12) или уравнение касательной (в вариантах 13–31) к данной кривой в точке с абсциссой x_0.

1. $y = (4x - x^2)/4$, $x_0 = 2$.

2. $y = 2x^2 + 3x-1$, $x_0 = -2$.

3. $y = x - x^3$, $x_0 = -1$.

4. $y=x^2+8\sqrt{x}-32$, $x_0 = 4$.

5. $y=x+\sqrt{x^3}$, $x_0 = 1$.

6. $y=\sqrt[3]{x^2}-20$, $x_0 = -8$.

7. $y=\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$, $x_0 = 4$.

8. $y=8\sqrt[4]{x}-70$, $x_0 = 16$.

9. $y = 2x^2 - 3x + 1$, $x_0 = 1$.

10. $y = (x^2-3x+6)/x^2$, $x_0 = 3$.

11. $y=\sqrt{x}-3\cdot\sqrt[3]{x}$, $x_0 = 64$.

12. $y = (x^3+2)(x^3-2)$, $x_0 = 2$.

13. $y = 2x^2 + 3$, $x_0 = -1$.

14. $y=\dfrac{x^{29}+6}{x^4+1}$, $x_0 = 1$.

15. $y = 2x + 1/x$, $x_0 = 1$.

16. $y=-2(x^8+2)\big/(3(x^4+1))$, $x_0 = 1$.

17. $y=\dfrac{x^5+1}{x^4+1}$, $x_0 = 1$.

18. $y=\dfrac{x^{16}+9}{1-5x^2}$, $x_0 = 1$.

19. $y=3(\sqrt[3]{x}-2\sqrt{x})$, $x_0 = 1$.

20. $y = 1/(3x + 2)$, $x_0 = 2$.

21. $y = x/(x^2 + 1)$, $x_0 = -2$.

22. $y = (x^2-3x+3)/3$, $x_0 = 3$.

23. $y = 2x/(x^2 + 1)$, $x_0 = 1$.

24. $y = -2(\sqrt[3]{x} + 3\sqrt{x})$, $x_0 = 1$.

25. $y = \dfrac{1+3x^2}{3+x^2}$, $x_0 = 1$.

26. $y = 14\sqrt{x} - 15 \cdot \sqrt[3]{x} + 2$, $x_0 = 1$.

27. $y = 3 \cdot \sqrt[4]{x} - \sqrt{x}$, $x_0 = 1$.

28. $y = (3x - x^3)/3$, $x_0 = 1$.

29. $y = x^2/10 + 3$, $x_0 = 2$.

30. $y = (x^2-2x-3)/4$, $x_0 = 4$.

Задача 8. Провести полное исследование функций и построить их графики.

1. $y = (x^3 + 4)\big/x^2$.

2. $y = (x^2 - x + 1)\big/(x-1)$.

3. $y = 2\big/(x^2 + 2x)$.

4. $y = 4x^2\big/(3 + x^2)$.

5. $y = 12x\big/(9 + x^2)$.

6. $y = (x^2 - 3x + 3)\big/(x-1)$.

7. $y = (4 - x^3)\big/x^2$.

8. $y = (x^2 - 4x + 1)\big/(x-4)$.

9. $y = (2x^3 + 1)\big/x^2$.

10. $y = (x-1)^2\big/x^2$.

11. $y = x^2\big/(x-1)^2$.

12. $y = (1 + 1/x)^2$.

13. $y = (12 - 3x^2)\big/(x^2 + 12)$.

14. $y = (9 + 6x - 3x^2)\big/(x^2 - 2x + 13)$.

15. $y = -8x\big/(x^2 + 4)$.

16. $y = ((x-1)/(x+1))^2$.

17. $y = (3x^4 + 1)\big/x^3$.

18. $y = 4x\big/(x+1)^2$.

19. $y = 8(x-1)\big/(x+1)^2$.

20. $y = (1 - 2x^3)\big/x^2$.

21. $y = 4\big/(x^2 + 2x - 3)$.

22. $y = 4\big/(3 + 2x - x^2)$.

23. $y = (x^2 + 2x - 7)\big/(x^2 + 2x - 3)$.

24. $y = 1\big/(x^4 - 1)$.

25. $y=-(x/(x+2))^2$.

26. $y=(x^3-32)\big/x^2$.

27. $y=4(x+1)^2\big/(x^2+2x+4)$.

28. $y=(3x-2)\big/x^3$.

29. $y=(x^2-6x+9)\big/(x-1)^2$.

30. $y=(x^3-27x+54)\big/x^3$.

Задача 9. Провести полное исследование функций и построить их графики.

1. $y=(2x+3)e^{-2(x+1)}$.

2. $y=\dfrac{e^{2(x+1)}}{2(x+1)}$.

3. $y=3\ln\dfrac{x}{x-3}-1$.

4. $y=(3-x)e^{x-2}$.

5. $y=\dfrac{e^{2-x}}{2-x}$.

6. $y=\ln\dfrac{x}{x+2}+1$.

7. $y=(x-2)e^{3-x}$.

8. $y=\dfrac{e^{2(x-1)}}{2(x-1)}$.

9. $y=3-3\ln\dfrac{x}{x+4}$.

10. $y=-(2x+1)e^{2(x+1)}$.

11. $y=\dfrac{e^{2(x+2)}}{2(x+2)}$.

12. $y=\ln\dfrac{x}{x-2}-2$.

13. $y=(2x+5)e^{-2(x+2)}$.

14. $y=\dfrac{e^{3-x}}{3-x}$.

15. $y=2\ln\dfrac{x}{x+1}-1$.

16. $y=(4-x)e^{x-3}$.

17. $y=-\dfrac{e^{-2(x+2)}}{2(x+2)}$.

18. $y=2\ln\dfrac{x+3}{x}-3$.

19. $y=(2x-1)e^{2(1-x)}$.

20. $y=-\dfrac{e^{-(x+2)}}{x+2}$.

21. $y=2\ln\dfrac{x}{x-4}-3$.

22. $y=-(x+1)e^{(x+2)}$.

23. $y=\dfrac{e^{x+3}}{x+3}$.

24. $y=\ln\dfrac{x}{x+5}-1$.

25. $y=-(2x+3)e^{2(x+2)}$.

26. $y=-\dfrac{e^{-2(x-1)}}{2(x-1)}$.

27. $y=\ln\dfrac{x-5}{x}+2$.

28. $y=(x+4)e^{-(x+3)}$.

29. $y=\dfrac{e^{x-3}}{x-3}$.

30. $y=\ln\dfrac{x+6}{x}-1$.

Индивидуальное задание №3

Задача 1. Найти и построить область определения функции.

1. $z = \sqrt[4]{\lg(4-2x-y)}$.

2. $z = \arcsin(5x-2y)$.

3. $z = \arccos\dfrac{y^2}{x}$.

4. $z = \sqrt{\sqrt{y}-x+2}$.

5. $z = \sqrt{\lg x + \lg y}$.

6. $z = \ln(y - \lg x)$.

7. $z = \arcsin(4 - x^2 - y^2)$.

8. $z = \ln\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$.

9. $z = y\arccos x$.

10. $z = \ln(x^2 - y^2)$.

11. $z = \sqrt{x^2+y^2-2x+4y+2}$.

12. $z = \ln(x^2 - 4y)$.

13. $z = \ln\left(\dfrac{y^2}{9} - x^2 - 1\right)$.

14. $z = \ln\dfrac{x}{y}$.

15. $z = \ln(1-\sqrt{x-y})$.

16. $z = \sqrt[4]{1-2y-x}$.

17. $z = \lg(x^2+y^2-9)$.

18. $z = \sqrt{x^2+y}$.

19. $z = \sqrt{4-(x-y)^2}$.

20. $z = \sqrt{1-x^4} - \sqrt[4]{1-y^2}$.

21. $z = \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x-y}} - \dfrac{x^2-y^2}{\sqrt{x+y}}$.

22. $z = \arcsin\dfrac{x^2+y^2}{4}$.

23. $z = \sqrt{\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} - 1}$.

24. $z = \sqrt{2x - \sqrt{y+1}}$.

25. $z = \lg(y - \cos x)$.

26. $z = \ln\sin x - 2\sqrt{y}$.

27. $z=\arcsin\dfrac{x^2}{y}.$

28. $z=\sqrt{\ln(2-x-y)}.$

29. $z=\ln\dfrac{x^2+y^2}{x-y}.$

30. $z=\ln\sin x-\sqrt{y}.$

Задача 2. Вычислить частные производные z'_x и z'_y сложной функции в данной точке.

1. $z=u+\sqrt{v},\ \ u=x^2y,\ \ v=x^y$ при $x=e,\quad y=2.$

2. $z=\operatorname{tg}u+\dfrac{1}{v},\quad u=x^y,\quad v=x^2y$ при $x=\sqrt{\pi},\quad y=2.$

3. $z=\operatorname{arctg}u-\dfrac{1}{v},\quad u=x^2+y^2,\quad v=xy$ при $x=1,\quad y=1.$

4. $z=\dfrac{1}{v}-\sin u,\quad u=x^2+y^2,\quad v=\sqrt{xy}$ при $x=y=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}.$

5. $z=u\ln v,\quad u=x^2-y^2,\quad v=xy$ при $x=2,\quad y=1.$

6. $z=\cos u-\dfrac{1}{v},\quad u=\dfrac{1}{y},\quad v=\sqrt{xy}$ при $x=\dfrac{\pi}{2},\quad y=\dfrac{2}{\pi}.$

7. $z=e^u\sqrt{v},\quad u=x^2y,\quad v=x^2-y^2$ при $x=1,\quad y=0.$

8. $z=e^uv,\quad u=\dfrac{x}{y},\quad v=\ln xy$ при $x=2,\quad y=1.$

9. $z=e^v\operatorname{tg}u,\quad u=\dfrac{1}{x},\quad v=\dfrac{y}{x}$ при $x=\dfrac{1}{\pi},\quad y=0.$

10. $z=5\operatorname{arctg}u+v,\quad u=y\sqrt{x},\quad v=y+\sqrt{x}$ при $x=1,\quad y=4.$

11. $z = u^v, \quad u = x^2 + y^2, \quad v = x^2 - y^2$ при $x = y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}.$

12. $z = v\sqrt{u} + u, \quad u = x^2, \quad v = \sin y$ при $x = 3, \quad y = \dfrac{\pi}{2}.$

13. $z = \arcsin u - v, \quad u = \dfrac{x}{y}, \quad v = \ln y$ при $x = 0, \quad y = 1.$

14. $z = \ln u + v, \quad u = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad v = \dfrac{1}{y}$ при $x = y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}.$

15. $z = v \operatorname{arctg} u, \quad u = \dfrac{1}{\sqrt{xy}}, \quad v = e^y$ при $x = 1, \quad y = 1.$

16. $z = uv + v^2, \quad u = \sin y, \quad v = x + y$ при $x = 0, \quad y = \dfrac{\pi}{2}.$

17. $z = \operatorname{arctg} v + \dfrac{1}{u}, \quad u = \cos x, \quad v = \dfrac{x}{y}$ при $x = \pi, \quad y = 1.$

18. $z = uv, \quad u = xy, \quad v = \sqrt{y^2 - x^2}$ при $x = 1, \quad y = \sqrt{2}.$

19. $z = \sqrt{u} \operatorname{arctg} v, \quad u = x^2, \quad v = \dfrac{y}{x}$ при $x = 1, \quad y = 1.$

20. $z = v\sqrt{u}, \quad u = \ln x, \quad v = \dfrac{y}{x}$ при $x = e, \quad y = 1.$

21. $z = u \ln v, \quad u = \sqrt{xy}, \quad v = \dfrac{y}{x}$ при $x = 1, \quad y = 2.$

22. $z = \dfrac{u}{v}, \quad u = x^y, \quad v = xy$ при $x = e, \quad y = 1.$

23. $z = e^v \sin u, \quad u = \dfrac{1}{x}, \quad v = y$ при $x = \dfrac{2}{\pi}, \quad y = 1.$

24. $z = \operatorname{arctg} u + \dfrac{1}{v}, \quad u = x^2 - y^2, \quad v = \sqrt{xy}$ при $x = 2, \quad y = 1.$

25. $z = u^v, \quad u = x^2 + y^2, \quad v = xy$ при $x = 1, \quad y = 2.$

26. $z = e^u \operatorname{tg} v, \quad u = x^2 + y^2, \quad v = x^2 - y^2$ при

$x = \sqrt{\pi}, \quad y = 0.$

27. $z = \sin u - \dfrac{1}{v}, \quad u = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}, \quad v = \sqrt{x + y}$ при

$x = \dfrac{4}{\pi}, \quad y = \dfrac{2}{\pi}.$

28. $z = \operatorname{tg}^2 u - v, \quad u = x^2 + y^2, \quad v = \sqrt{xy}$ при $x = 1, \quad y = 1.$

29. $z = \operatorname{ctg} u - v, \quad u = x^y, \quad v = \dfrac{y}{x^2}$ при $x = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}, \quad y = 2.$

30. $z = u + \sqrt{v}, \quad u = x^2 y^3, \quad v = x^y$ при $x = e^2, \quad y = 1.$

Задача 3. Найти полный дифференциал неявно заданной функции.

1. $2z - x^2 + y^2 = \sqrt{z}.$

2. $e^z + \sqrt{x^2 + y^2} = 0.$

3. $\ln z - 2x^2 y + 10x = 6.$

4. $\operatorname{arctg} z = \operatorname{arctg}(xy - 1).$

5. $x^z = y^2 + 1.$

6. $z^2 + y^2 + x^2 = 12zxy.$

7. $\sin(x^2 + y^2) - z = z^{x+y}.$

8. $\ln(1 + z^2) = z - x - y.$

9. $z^3 = z + y^2 - x^2.$

10. $\dfrac{zx + y}{zy + x} = 1.$

11. $2^z = 3^x + 4^y - 5.$

12. $\ln\dfrac{x+z}{y+z} = 1.$

13. $\sqrt{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} z} = y.$

14. $(x+z)(y+z) = z+2.$

15. $\operatorname{tg} z = \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^2 y.$

16. $z^x = z^y + 2.$

17. $\sqrt{\dfrac{1-xz}{1-yz}} = \sqrt[4]{x^2+y^2}.$

18. $(x+y)^z = z^{x+y}.$

19. $\cos(z^2 - x) + \cos(z^2 - y) = 1.$

20. $e^{\frac{z}{x+y}} = z^2 + 1.$

21. $\operatorname{tg}\dfrac{z}{x} + \operatorname{tg}\dfrac{z}{y} = x + y.$

22. $\ln(x^2 - y^2)^z = z^4 - x^2 - y^2.$

23. $\sin^z x = \sin^z y - 1.$

24. $\operatorname{arctg}(x^2 + y^2) = \ln(z^2 + 1).$

25. $\sqrt{(1 - x^2 - y^2)(1 - z^2)} = 1.$

26. $\ln(z - \sqrt{x^2 + y^2}) = \dfrac{x^2 - y^2}{z}.$

27. $3x^2y^2 + 2z^2xy - 2zx^3 + 4zy^3 = 0.$

28. $e^z - xyz = 0.$

29. $z^3 + 3xyz = 27.$

30. $x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z - 5 = 0.$

Задача 4. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к указанной поверхности в данной на ней точке.

1. $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 8z - 1 = 0,\ \ M_0(1, 2, 2).$

2. $x^2 + y^2 - x + 2y + 4z - 13 = 0,\ \ M_0(2, 1, 2).$

3. $x^2 + 2y^2 - 3z^2 + xy + yz - 2xz + 16 = 0,\ \ M_0(1, 2, 3).$

4. $z - y - \ln\dfrac{x}{z} = 0,\ \ M_0(1, 1, 1).$

5. $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{z^2}{8}=0,\ \ M_0(4, 3, 4).$

6. $x^2y^2+2x+z^3-16=0,\ \ M_0(2, 1, 2).$

7. $z-\sin\dfrac{y}{xz}=0,\ \ M_0(2, \pi, 1).$

8. $z-\operatorname{arctg}\dfrac{x+z}{y}=0,\ \ M_0\left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{4}\right).$

9. $x-\ln(y^2+z^2)=0,\ \ M_0(0, 0, 1).$

10. $y-x\operatorname{tg}\dfrac{z}{2}=0,\ \ M_0\left(2, 2, \dfrac{\pi}{2}\right).$

11. $(8-z^2)x^2-4y^2=0,\ \ M_0(2, 2, 2).$

12. $x^2-6x+9y^2+z^2+4z+9=0,\ \ M_0(3, 0, -4).$

13. $x^2z+y^2z-4=0,\ \ M_0(1, 0, -1).$

14. $x+y+\ln(z^2+y^2)=0,\ \ M_0(-1, 1, 0).$

15. $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{z^2}{16}-1=0,\ \ M_0(2, 3, 4).$

16. $x^2+y^2-y+2x+4z-13=0,\ \ M_0(1, 2, 2).$

17. $z-x-\ln\dfrac{y}{z}=0,\ \ M_0(1, 1, 1).$

18. $x^2+y^2+z^2-2z=0,\ \ M_0\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}, 1\right).$

19. $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{18}+\dfrac{z^2}{9}=0,\ \ M_0(4, 6, 3).$

20. $z-\operatorname{arctg}\dfrac{y+z}{x}=0,\ \ M_0\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right).$

21. $x^2y^2+z^3+2y-16=0,\ \ M_0(1,2,2).$

22. $x-y+\ln(y^2+z^2)=0,\ \ M_0(1,1,0).$

23. $x-y\operatorname{tg}\dfrac{z}{3}=0,\ \ M_0\left(3,3,\dfrac{3\pi}{4}\right).$

24. $9x^2+y^2+z^2-6y+4z+9=0,\ \ M_0(0,3,-4).$

25. $x^2+2y^2-x+4y-z^2-5z-12=0,\ \ M_0(2,2,1).$

26. $x^2+y^2+z^2-x-3z+1=0,\ \ M_0(1,2,1).$

27. $x^2+y^2-5z^2-xy+2yz+xz+4=0,\ \ M_0(0,1,-1).$

28. $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}-2z^2=0,\ \ M_0(4,3,1).$

29. $\lg(x^2+y^2+z^2)-2x+4y+1=0,\ \ M_0(1,0,3).$

30. $z^2+x^2(y^2-z)+y^2(x^2-z)-2=0,\ \ M_0(1,1,0).$

Задача 5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=f(x,y)$ в области D.

1. $z=x^2-2xy-y^2+4x+1,\ \ D:\{x+y+1=0,\ y=0,\ x=-3\}.$

2. $z=4x^2+9y^2-4x-6y+3,\ \ D:\{x=0,\ y=0,\ x+y=1\}.$

3. $z=5x^2-3xy+y^2+4,\ \ D:\{x=-1,\ y=-1,\ x+y=1\}.$

4. $z=10+2xy-x^2,\ \ D:\{y=4-x^2,\ y=0\}.$

5. $z=4x^2+y^2+4x+2y+6,\ \ D:\{x+y+2=0,\ y=0,\ x=0\}.$

6. $z = -x^2 + 2xy + y^2 - 4y,\ \ D:\{y = x+1,\ y = 0,\ x = 3\}.$

7. $z = 2xy,\ \ D:\{x^2 + y^2 \le 9\}.$

8. $z = 3 - 2x^2 - xy - y^2,\ \ D:\{x = 1,\ y = 0,\ y = x\}.$

9. $z = x^2 - xy + y^2,\ \ D:\{x^2 + y^2 \le 4\}.$

10. $z = x^2 + 3y^2 + x - y,\ \ D:\{x = 1,\ y = 1,\ x + y = 1\}.$

11. $z = -xy,\ \ D:\{x^2 + y^2 \le 16\}.$

12. $z = xy(4 - x - y),\ \ D:\{x = 1,\ y = 0,\ x + y = 6\}.$

13. $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x,\ \ D:\{x = 3,\ y = 0,\ y = x+1\}.$

14. $z = x^2 + 2xy - 10,\ \ D:\{y = x^2 - 4,\ y = 0\}.$

15. $z = x^2 + 2xy - y^2 + 2x + 2y,\ \ D:\{y = x + 2,\ y = 0,\ x = 2\}.$

16. $z = y^2 - 2xy - x^2 + 4y + 1,\ \ D:\{x + y + 2 = 0,\ y = 0,\ x = 0\}.$

17. $z = x^2 + xy - 2,\ \ D:\{y = 4x^2 - 4,\ y = 0\}.$

18. $z = 2x^2 + 2xy - y^2 / 2 - 4x,\ \ D:\{y = 2x,\ y = 2,\ x = 0\}.$

19. $z = x^2 + 2xy + 4x - y^2,\ \ D:\{x + y + 2 = 0,\ y = 0,\ x = 0\}.$

20. $z = y^2 + 2xy - x^2 - 4y,\ \ D:\{y = x + 1,\ y = 0,\ x = 3\}.$

21. $z = 4 - 2x^2 - y^2,\ \ D:\{x^2 + y^2 \le 1\}.$

22. $z = x^2 - 2y^2 - 4y + 2x,\ \ D:\{y = x - 1,\ y = 0,\ x = -2\}.$

23. $z = 2x^2 - 4y^2 + 1,\ \ D:\{x^2 + y^2 \le 1\}.$

24. $z = 8 - x^2 - 3y^2,\ \ D:\{x^2 + y^2 \le 4\}.$

25. $z = x^2 y - x + y^2,\ \ D:\{y = 1 - x^2,\ y = 0\}.$

26. $z = x^2 - y^2 + 4xy + 8y$, $D:\{x + y + 4 = 0,\ y = 0,\ x = 0\}$.

27. $z = x^2 + 2y^2 - 4xy - 3x - 2y + 1$, $D:\{y = x + 2,\ y = 0,\ x = 2\}$.

28. $z = x^2 - 4xy + 5$, $D:\{y = x^2 - 4,\ y = 1\}$.

29. $z = 2x^2 - y^2 - xy + x$, $D:\{y = x + 1,\ y = 10,\ x = 3\}$.

30. $z = 3xy(2 - x - y)$, $D:\{x = 2,\ y = -2,\ x + y = 1\}$.

Библиографический список

Высшая математика: Учебник / В.С. Шипачев. - М.: НИЦ ИНФРА-М, 2015. - 479 с.

Высшая математика: Учебник / Л.Т. Ячменёв. - М.: ИЦ РИОР: НИЦ Инфра-М, 2013. - 752 с.

Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. М.: Наука,.Т.1, - М.: Интеграл – Пресс, 2006

Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. М.: Наука,.Т.2 , - М.: Интеграл – Пресс, 2006

Составители:
Грунина Мария Викторовна
Бабин Владислав Николаевич
Бильданов Ринат Талгатович

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Учебно-методическое пособие

Издание второе, стереотипное

Редактор Н.К. Крупина

Подписано к печати «25» декабря 2017 г. Формат 60×84 1/16.
Объем 5,7 уч.-изд.л. Тираж 100 экз. Заказ № 1927