НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНЖЕНЕРНЫЙ ИНСТИТУТ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. РЯДЫ

Учебно-методическое пособие

Допущено Министерством сельского хозяйства Российской федерации в качестве учебного пособия для студентов высших аграрных учебных заведений, обучающихся по инженерным специальностям

Издание второе, стереотипное

Новосибирск 2017

Кафедра высшей математики

УДК 517.2

ББК 22.161.1

Д 50

Составители: Р.Т. Бильданов, М.В. Грунина, В.Н. Бабин

Рецензенты: С.П.Глушков, д-р тех. наук, проф.,
М.С.Соппа, д-р физ.-мат. наук, проф.

Дифференциальные уравнения. Ряды.: учеб.-метод. пособие / сост.: Р.Т.Бильданов, М.В.Грунина, В.Н.Бабин; Новосиб. гос. аграр. ун-т. Инженер. инс-т. – Новосибирск, 2017 – 102 с.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов, всех форм обучения по направлениям подготовки, реализуемым в ФГБОУ ВО Новосибирский ГАУ

Введение

Еще в предыстории дифференциального и интегрального исчисления встречались – как их тогда называли – «обратные задачи на касательные», т. е. задачи, в которых ищут кривые по заданному свойству касательных к ним. Об этих задачах упоминается в известной переписке Ньютона с Лейбницем; там впервые Лейбниц применил термин «дифференциальные уравнения».

Вторая основная проблема, выдвинутая Ньютоном в его «Методе флюксий»: *по данному уравнению, содержащему флюксии, найти соотношение между флюэнтами*, и есть общая задача интегрирования *обыкновенного дифференциального уравнения*. Ньютон, как правило, решал ее с помощью степенных рядов, не стремясь представить решение в виде «конечного» аналитического выражения. Много занимались дифференциальными уравнениями Лейбниц и братья Бернулли. Именно им принадлежат первые систематические попытки решения некоторых типов уравнений первого порядка путем *сведения к квадратурам*.

Лишь в XVIII в. теория дифференциальных уравнений развилась настолько, что ее стали рассматривать как самостоятельную научную дисциплину. Большую роль в этом сыграли многочисленные и разнообразные труды Эйлера. Именно Эйлер ввел понятия «полного» (общего) и «частного» решения обыкновенного дифференциального уравнения; много занимался решениями, не содержащимися в полном интеграле (особыми решениями). Он широко развил метод *интегрирующего множителя* не только для уравнений первого, но и высшего порядка.

Работы Эйлера, вместе с работами Клеро, Лагранжа и других математиков XVIII в., далеко продвинули формальную теорию обыкновенных дифференциальных уравнений.

В XX в. проявилось определенное влияние на теорию дифференциальных уравнений (особенно в частных производных) со стороны молодых аналитических дисциплин – *теории функций веществен-*

ной переменной и *функционального анализа*. Это влияние не только отразилось на общих точках зрения и подходе к основным понятиям теории дифференциальных уравнений, но и привело к важным конкретным результатам в этой теории.

Параллельно с созданием в XVII в. дифференциального и интегрального исчисления в математическую практику вошли и бесконечные ряды, которые широко использовал Ньютон для решения уравнений, как алгебраических, так и дифференциальных. Лейбниц, независимо от Ньютона, пришел к некоторым из тех результатов, которыми Ньютон владел раньше.

Бесконечными рядами занимались оба сподвижника Лейбница – братья Бернулли, особенно старший, Якоб: совокупность его работ по рядам (1689 – 1704) дает изложение всего, что было известно в этой области в его время. В частности, сначала Иоганн, а затем Якоб дали доказательство того, что «сумма бесконечного гармонического ряда бесконечна».

В 1715 г. вышла в свет небольшая книга Тейлора «Метод разностей, прямой и обратный». Неясность изложения имела следствием то, что она не сразу получила распространение. Значение формулы Тейлора было выявлено лишь в обширном «Трактате о флюксиях» Маклорена, вышедшем в 1742 г.

С 1730 г. началась блестящая серия работ Эйлера по бесконечным рядам. Им посвящены многочисленные статьи, которые на протяжении более полувека публиковались в трудах Петербургской академии наук. Эйлер рассматривал ряды с комплексными членами; сопоставление рядов для $\sin x$, $\cos x$ и $\exp x$ привело его к знаменитым формулам, связывающим эти функции – их в свое время Лагранж назвал «одним из самых прекрасных аналитических открытий, сделанных в этом веке».

В сочинении «Теория аналитических функций» (1797 г.) Лагранж сделал попытку освободить дифференциальное исчисление «от рассмотрения бесконечно малых или исчезающих величин, пределов или флюксий» и свести его к «алгебраическому анализу конечных величин». Сходимость ряда Лагранж, подобно Эйлеру и другим современникам, понимал как стремление к нулю общего члена. В начале XIX века французский математик Фурье в своем знаменитом сочинении «Аналитическая теория теплоты» (1811 г.) дал правильное определение сходимости ряда и его суммы, замечая при этом, что для сходимости ряда вовсе не достаточно, чтобы члены ряда «непрерывно уменьшались» до нуля.

Лишь в XIX в. ряды стали предметом изучения сами по себе, критический пересмотр анализа на первых же порах коснулся именно их. Современное определение понятия суммы ряда и его сходимости или расходимости, основанное на понятии предела, окончательно установилось после работ Больцано (1817 г.) и Коши (1821 г.). В предисловии к «Алгебраическому анализу» Коши прямо говорит, что «расходящийся ряд не имеет суммы». Кроме того, оба ученых установили в общей форме условие, необходимое и достаточное для сходимости ряда. По отношению к функциональным рядам Коши попытался доказать непрерывность суммы сходящегося ряда непрерывных функций (1821 г.) и право интегрировать подобный ряд почленно (1823 г.), понятием равномерной сходимости Коши не владел.

Постепенно создавалось убеждение, что на бесконечные функциональные ряды нельзя безоговорочно распространять привычные для конечных сумм правила. Решающую роль здесь сыграло изучение характера сходимости функциональных рядов и введение понятия равномерной сходимости. Это понятие впервые появилось в 1841 г. в работе Вейерштрасса. В печати различение равномерной и неравномерной сходимости было проведено Зейделем в 1848 г. и Стоксом в 1849 г.

Глава 1. Дифференциальные уравнения

§1. Основные понятия

Дифференциальным уравнением называется уравнение, содержащее произвольные производные неизвестной функции (или нескольких неизвестных функций). Вместо производных могут входить дифференциалы.

Если неизвестные функции зависят от одного аргумента, то дифференциальное уравнение называется **обыкновенным**; если от нескольких, то уравнение называется **дифференциальным уравнением с частными производными**. Рассмотрим обыкновенные дифференциальные уравнения.

Общий вид дифференциального уравнения с одной неизвестной функцией таков: $\Phi(x, y, y', y'', \dots, y^{(k)}) = 0$.

Порядком дифференциального уравнения называется порядок наивысшей из производных, входящих в это уравнение. Например, уравнение $\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} = x^2$ – второго порядка, $y''' = \cos x$ – третьего порядка, $y' + xy = \frac{1}{\cos^2 x}$ – уравнение первого порядка.

Основной задачей теории дифференциальных уравнений является нахождение всех решений данного дифференциального уравнения. В простейших случаях эта задача сводится к вычислению интеграла.

Решением дифференциального уравнения называется функция $y = f(x)$, при подстановке которой исходное дифференциальное уравнение обращается в тождество. (Если такая функция задана неявно, то она называется **интегралом дифференциального уравнения**).

Функция $y = 3e^{-x^2}$ является решением дифференциального уравнения $y' + 2xy = 0$, т.к. уравнение обращается в тождество после подстановки $y = 3e^{-x^2}$. Вместе с тем уравнение $y = 3e^{-x^2}$ является интегралом данного уравнения. Уравнения $\ln y + x^2 = 3$, $\ln y + x^2 = 5$ и т.д. являются интегралами данного дифференциального уравнения, а функции $y = e^{3-x^2}$, $y = e^{-x^2}$, $y = 0$ и т.д. – его решениями.

§2. Уравнения первого порядка. Частное и общее решение

Общий вид **дифференциального уравнения первого порядка** таков: $\Phi(x, y, y') = 0$.

Уравнение, **разрешенное относительно** y', имеет вид $y' = f(x, y)$.

При этом предполагается, что функция $f(x, y)$ однозначно определена и непрерывна в некоторой области.

Дифференциальное уравнение первого порядка $y' = f(x, y)$ имеет бесчисленное множество решений. Линия, изображающая какой-либо интеграл дифференциального уравнения, называется **интегральной кривой**. Как правило, через данную точку (x_0, y_0) рассматриваемой области проходит **единственная интегральная кривая.** Соответствующее ей решение дифференциального уравнения называется **частным решением**. Совокупность всех частных решений называется **общим решением**. Общее решение дифференциального уравнения обычно представляют в виде некоторой функции $y = \varphi(x, C)$, где C – произвольная постоянная (константа).

Из общего решения можно получить любое частное решение при соответствующе выбранном значении C. Числа x_0, y_0 называются **начальными условиями**.

§3. Уравнения с разделяющимися переменными

Уравнения с разделяющимися переменными могут быть записаны в виде $y' = f(x)g(y)$ или $M(x)N(y)dx + P(x)Q(y)dy = 0$.

Чтобы решить такое уравнение, надо обе его части умножить или разделить на такое выражение, чтобы в одну часть уравнения входил только x, а в другую – только y. Затем проинтегрировать обе части.

При делении обеих частей уравнения на выражение, содержащее неизвестные x и y, могут быть потеряны решения, обращающие это выражение в нуль.

Пример. Найти решение уравнения $xy' + \ln x = 1$, удовлетворяющее начальным условиям $y(e) = \frac{1}{2}$.

Решение. Выразим из уравнения y':

$$xy' + \ln x = 1; \quad y' = \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}.$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными.

Учитывая то, что $y' = \frac{dy}{dx}$, получаем следующее уравнение:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}, \quad dy = \left(\frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}\right)dx.$$

Переменные разделены. Интегрируем обе части уравнения:

$$\int dy = \int\left(\frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}\right)dx; \quad y = \ln x - \frac{1}{2}\ln^2 x + C.$$

Чтобы найти решение уравнения, удовлетворяющее начальным условиям, подставим $x_0 = e$ и $y_0 = \frac{1}{2}$ в решение и найдем значение константы C:

$$\frac{1}{2} = \ln e - \frac{1}{2}\ln^2 e + C; \quad \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} = C.$$ Отсюда $C = 0$.

Следовательно, $y=\ln x-\frac{1}{2}\ln^2 x$ – требуемое частное решение.

Пример. Решить уравнение $\frac{y}{x^2}dy-(1-y)dx=0$.

Решение. Данное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Умножим обе части уравнения на выражение $\frac{x^2}{1-y}$:

$$\frac{x^2}{1-y}\cdot\frac{y}{x^2}dy-\frac{x^2}{1-y}\cdot(1-y)dx=0;\quad \frac{y}{1-y}dy=x^2dx.$$

Переменные разделены. Интегрируем обе части:

$$\int\frac{y}{1-y}dy=\int x^2dx;\ \ -y-\ln|1-y|=\frac{x^3}{3}+C$$ – общий интеграл.

При умножении на $\frac{1}{1-y}$ могло быть потеряно решение

$1-y=0$, т.е. $y=1$.

Подставляя $y=1$ и $dy=0$ в исходное уравнение, получаем тождество. Следовательно, $y=1$ – решение уравнения.

Ответ: $-y-\ln|1-y|=\frac{x^3}{3}+C$, $y=1$.

Пример. Если температура воздуха равна 10°C и тело в течение 30 минут охлаждается с 80 до 30°C, то через сколько минут его температура понизится до 20°C? (По закону Ньютона скорость охлаждения тела пропорциональна разности между температурой тела и температурой окружающей среды).

Решение. Введём обозначения: T – температура, t – время, k – коэффициент пропорциональности, тогда $\frac{dT}{dt}$ – скорость охлаждения.

В силу закона Ньютона: $\frac{dT}{dt}=k(T-10)$ – дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными. Решаем его: $\frac{dT}{(T-10)} = kdt$, $\ln|T-10| = kt + \ln C$. Если t = 0, то T = 80°C. Из этих условий найдём C: $\ln 70 = \ln C$, C = 70.

Если t = 30, то T = 30°C. Найдём k: $\ln 20 = k \cdot 30 + \ln 70$, $k = -\frac{1}{30}\ln 3{,}5$. Итак, закон охлаждения тела имеет вид $T - 10 = 70e^{-\frac{1}{30}t\ln 3{,}5}$ или $T = 10 + 70 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^{t/30}$. При T = 20° имеем $10 = 70 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^{t/30}$, $\frac{1}{7} = \left(\frac{2}{7}\right)^{t/30}$, $t/30 = \ln_{2/7}\left(1/7\right)$, $t = 30\frac{\ln 7}{\ln 3{,}5} \approx 47$ минут.

Ответ: примерно 47 минут.

§4. Однородные уравнения

Однородные уравнения могут быть представлены в виде $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ или $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$, где отношение $\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$ можно представить как функцию отношения $\frac{y}{x}$.

Любое однородное уравнение подстановкой $y = tx$ (откуда $y' = t'x + t,\ dy = tdx + xdt$) приводится к уравнению с разделяющимися переменными (см. §3).

Пример. Решить уравнение $x^2 y' = y(x + y)$.

Решение. Выразим из уравнения y': $y' = \frac{y}{x^2}(x + y)$, $y' = \frac{y}{x}\left(\frac{x+y}{x}\right)$, $y' = \frac{y}{x}(1 + \frac{y}{x})$. Получили однородное уравнение. Делаем замену $t=\dfrac{y}{x}$, $y=tx$, $y'=t'x+t$: $t'x+t=t(1+t)$, $t'x=t^2$, $xdt=t^2dx$ – уравнение с разделяющимися переменными. Решаем его: $\dfrac{dt}{t^2}=\dfrac{dx}{x}$, $\int\dfrac{dt}{t^2}=\int\dfrac{dx}{x}$, $-\dfrac{1}{t}=\ln|x|+C$. Возвращаясь к старой переменной y, получаем: $-\dfrac{x}{y}=\ln|x|+C$.

Пример. Решить уравнение $(x^2-2xy)dy+y^2dx=0$.

Решение. Рассмотрим отношение

$\dfrac{y^2}{x^2-2xy}=\dfrac{y^2}{x^2\left(1-\dfrac{2xy}{x^2}\right)}=\dfrac{\left(y/x\right)^2}{1-2\left(\dfrac{y}{x}\right)}$. Так как оно представимо в виде функции аргумента $\dfrac{y}{x}$, то данное уравнение является однородным. Вводим новую переменную $t=\dfrac{y}{x}$, $y=tx$, $dy=tdx+xdt$:

$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{y^2}{x^2-2xy}$, $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{y^2}{x^2-2xy}$, $\dfrac{tdx+xdt}{dx}=-\dfrac{t^2}{1-2t}$,

$xdt=\left(-\dfrac{t^2}{1-2t}-t\right)dx$ – уравнение с разделяющимися переменными. $\int\dfrac{1-2t}{t(t-1)}dt=\int\dfrac{dx}{x}$, $-\ln|t|-\ln|t-1|=\ln|x|+C$. Пользуясь свойствами логарифма, это выражение можно преобразовать: $\ln|t(t-1)|=-\ln C_1|x|$. (Мы ввели новую константу C_1, связанную со старой следующим образом: $C=\ln C_1$). Потенцируя обе части полученного выражения (потенцирование – действие, обратное логарифмированию), получаем интеграл уравнения $t(t-1)=\dfrac{1}{C_1x}$. Возвращаемся к переменной *y*: $\dfrac{y}{x}(\dfrac{y}{x}-1)=\dfrac{1}{C_1x}$, $y(y-x)=C_2x$, где $C_2=\dfrac{1}{C_1}$.

Ответ: $y(y-x)=C_2x.$

§5. Дифференциальные уравнения, приводимые к однородным

Уравнения вида $y'=f\left(\dfrac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$ при $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$ приводятся к однородным подстановкой $x=u+m$, $y=v+n$, где (m, n) – точка пересечения прямых $a_1x+b_1y+c_1=0$ и $a_2x+b_2y+c_2=0$. Если же $a_1b_2-a_2b_1=0$, то подстановка $a_1x+b_1y=t$ позволяет разделить переменные.

Пример. Решить уравнение $y'=2\left(\dfrac{y+1}{x+y-2}\right)^2$.

Решение. Находим точку пересечения прямых $\begin{cases} y+1=0 \\ x+y-2=0. \end{cases}$

Получаем точку (3, –1). Введём замену $x-3=t$, $y+1=z$, получим однородное уравнение $\dfrac{dz}{dt}=2\dfrac{z^2}{(t+z)^2}$. Пусть $z=tu$, $dz=tdu+udt$, тогда

$$\frac{tdu+udt}{dt}=2\frac{t^2u^2}{(t+tu)^2},\ \ tdu=\left(2\frac{u^2}{(1+u)^2}-u\right)dt,\ \ tdu=-\frac{u(1+u^2)}{(1+u)^2}dt,$$

$$\frac{(1+u)^2}{u(1+u^2)}du=-\frac{dt}{t}.$$

Интегрируем:

$$\int \frac{(1+u)^2}{u(1+u^2)}du = \int \frac{du}{u} + \int \frac{2du}{1+u^2} = \ln|u| + 2\operatorname{arctg} u + C.$$

$-\int \frac{dt}{t} = -\ln|t| + C.$ Итак, $\ln|u| + 2\operatorname{arctg} u = -\ln|t| + C,\quad ut = C_1 e^{-2\operatorname{arctg} u}$, где $C = \ln C_1$. Возвращаясь к старым переменным, получаем решение исходного уравнения: $y+1 = C_1 e^{-2\operatorname{arctg}\frac{y+1}{x-3}}$.

Пример. Решить уравнение $(x+y+2)dx + (2x+2y-1)dy = 0$.

Решение. Поскольку прямые $x+y+2=0$ и $2x+2y-1=0$ параллельны, то подстановкой $t = x+y,\quad dy = dt - dx$ переменные разделяются: $(t+2)dx + (2t-1)(dt-dx) = 0,\quad (3-t)dx + (2t-1)dt = 0$. Разделяем переменные: $dx = \frac{1-2t}{3-t}dt$. Интегрируем: $\int dx = \int \frac{1-2t}{3-t}dt$, $x = 2t + 5\ln|3-t| + C$. Возвращаемся к старым переменным ($t = x+y$), получаем окончательный ответ: $x + 2y + 5\ln|3-x-y| + C = 0$.

§6. Линейные уравнения первого порядка

Уравнение вида $y' + a(x)y = b(x)$ называется **линейным.** Существует несколько методов решения этого уравнения.

Метод вариации произвольной постоянной (метод Лагранжа). Рассмотрим однородное уравнение $y' + a(x)y = 0$. Оно решается путём разделения переменных (см. §3). Для того чтобы найти решения исходного уравнения, надо в общем решении заменить произвольную постоянную C на неизвестную функцию $C(x)$. Затем выражение, полученное для y, подставить в исходное линейное уравнение и найти функцию $C(x)$.

Метод Бернулли. Решение линейного уравнения ищем в виде $y = u(x)v(x)$. Тогда исходное уравнение примет вид $\frac{du}{dx}v + u\frac{dv}{dx} + a(x)uv = b(x)$. В качестве $v(x)$ выбираем одно из частных решений уравнения $\frac{dv}{dx} + a(x)v = 0$. Тогда $u(x)$ находим из уравнения $\frac{du}{dx}v = b(x)$. Перемножая $u(x)$ и $v(x)$, получим решение линейного уравнения.

Пример. Решить уравнение $xy' + y = \cos x$.

Решение. Разделим обе части уравнения на x: $y' + \frac{y}{x} = \frac{\cos x}{x}$. Получили линейное уравнение.

Решаем уравнение: $y' + \frac{y}{x} = 0$.

Разделяем переменные: $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$; $\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$.

Интегрируем обе части: $\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x}$; $\ln|y| = -\ln|x| + C$.

Пользуясь свойствами логарифма, получаем $y = \frac{C_1}{x}$. (Мы ввели новую константу C_1, связанную со старой следующим образом: $C = \ln C_1$). Считая C_1 функцией от x, подставляем в полученное линейное уравнение $y = \frac{C_1}{x}$ и $y' = \frac{C_1' x - C_1}{x^2}$: $\frac{C_1' x - C_1}{x^2} + \frac{C_1}{x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{\cos x}{x}$,

$\frac{C_1'}{x} - \frac{C_1}{x^2} + \frac{C_1}{x^2} = \frac{\cos x}{x}$.

Отсюда находим $C_1' = \cos x$, $C_1 = \sin x + B$, где B – константа.

Ответ: $y = \frac{\sin x + B}{x}$ – решение уравнения.

§7. Уравнение Бернулли

Уравнение вида $y' + a(x)y = b(x)y^n$, ($n \neq 1$, $n \neq 0$, $n \in R$) называется **уравнением Бернулли**. Чтобы решить такое уравнение, надо обе его части разделить на y^n и сделать замену $z = \frac{1}{y^{n-1}}$. После замены получим линейное уравнение (см. §6). Часто решение уравнения Бернулли удобней искать в виде $y = uv$, не приводя его к линейному уравнению.

Пример. Решить уравнение $y' + 2xy = 2x^3y^3$.

Решение. Данное уравнение является уравнением Бернулли. Разделим обе части уравнения на y^3: $\frac{y'}{y^3} + \frac{2xy}{y^3} = \frac{2x^3y^3}{y^3}$,

$$\frac{y'}{y^3} + \frac{2x}{y^2} = 2x^3. \quad (1)$$

Делаем замену $z = \frac{1}{y^2}$, $z' = -\frac{2}{y^3}y'$.

Отсюда находим $y' = -\frac{1}{2}z'y^3$.

Подставляем в уравнение (1): $-\frac{1}{2}\frac{z'y^3}{y^3} + 2xz = 2x^3$,

$$-\frac{1}{2}z' + 2xz = 2x^3 \quad (2)$$

линейное уравнение (см. §6).

Решаем уравнение $-\frac{1}{2}z' + 2xz = 0$.

Разделяем переменные $-\frac{1}{2}\frac{dz}{dx} = -2xz;\ \frac{dz}{z} = 4xdx$.

Интегрируем обе части уравнения: $\int\frac{dz}{z} = \int 4xdx;$ $\ln|z| = 2x^2 + C$.

Потенцируем обе части полученного выражения: $z = C_1 e^{2x^2}$, где $C_1 = e^{C}$.

Считая C_1 функцией от x, подставляем в линейное уравнение (2) $z = C_1 e^{2x^2}$ и $z' = C_1' e^{2x^2} + 4xC_1 e^{2x^2}$:

$$-\frac{1}{2}C_1' e^{2x^2} - 2xC_1 e^{2x^2} + 2xC_1 e^{2x^2} = 2x^3.$$

Выражаем C'_1: $C_1' = -4x^3 e^{-2x^2}$.

Интегрируя, находим $C_1 = x^2 e^{-2x^2} + \frac{1}{2}e^{-2x^2} + A$, где A – константа.

Решение уравнения (2):

$$z = (x^2 e^{-2x^2} + \frac{1}{2}e^{-2x^2} + A)e^{2x^2}, \quad z = x^2 + \frac{1}{2} + Ae^{2x^2}.$$

Возвращаемся к переменной y:

$\frac{1}{y^2} = x^2 + \frac{1}{2} + Ae^{2x^2}$ – общий интеграл уравнения.

Пример. Решить уравнение $x\frac{dy}{dx} + y = y^2 \ln x$.

Решение. Это уравнение Бернулли. Его можно решать с помощью замены $z = \frac{1}{y}$, которая приведёт исходное уравнение к линейному. Но в данном случае уравнение проще решить методом Бернулли: будем искать решения уравнения в виде произведения двух функций:

$y = uv$, $y' = u'v + uv'$. Тогда $xu'v + xuv' + uv = u^2 v^2 \ln x$, $xu'v + u(xv' + v) = u^2 v^2 \ln x$. Функцию *v(x)* найдём как частное решение уравнения $xv' + v = 0$, $\dfrac{dv}{v} = -\dfrac{dx}{x}$, $v = \dfrac{1}{x}$.

Тогда $xu' \dfrac{1}{x} = u^2 \dfrac{1}{x^2} \ln x$, $u' = \dfrac{u^2}{x^2} \ln x$, разделяем переменные: $\dfrac{du}{u^2} = \dfrac{\ln x}{x^2} dx$.

Интегрируем: $\displaystyle\int \frac{du}{u^2} = \int \frac{\ln x}{x^2} dx$, $-\dfrac{1}{u} = -\dfrac{\ln x}{x} - \dfrac{1}{x} - C$,

$u = \dfrac{x}{\ln x + Cx + 1}$. Таким образом, $y = uv = \dfrac{x}{\ln x + Cx + 1} \cdot \dfrac{1}{x}$.

Ответ: $y = \dfrac{1}{\ln x + Cx + 1}$.

§8. Теорема о существовании и единственности решения дифференциального уравнения первого порядка

Теорема. Пусть задано дифференциальное уравнение первого порядка $y' = f(x, y)$ с начальным условием $y(x_0) = y_0$.

Пусть в замкнутой области $|x - x_0| \le a$, $|y - y_0| \le b$ функции f и f'_y непрерывны. Тогда на некотором отрезке $x_0 - d \le x \le x_0 + d$ существует единственное решение уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$.

§9. Поле направлений дифференциального уравнения

Пусть задано дифференциальное уравнение первого порядка $y' = f(x, y)$.

Производная y' есть угловой коэффициент касательной к интегральной кривой. Поэтому, даже не решая уравнения, можно построить касательную к интегральной линии в данной точке (x_0, y_0). Множество таких касательных, соответствующих всевозможным точкам рассматриваемой области, называется **полем направлений** дифференциального уравнения.

Задача интегрирования данного дифференциального уравнения геометрически формулируется так: найти линии, у которых направление касательной всюду совпадает с направлением поля.

Построение поля направлений уравнения $y' = f(x, y)$ облегчается, если предварительно начертить **линии равного наклона (изоклины). Изоклиной** называется линия, вдоль которой функция $f(x, y)$ имеет постоянное значение. Во всех точках какой-либо изоклины направление поля – одно и то же.

§10. Приближенное интегрирование уравнений первого порядка по методу Эйлера

Пусть дано уравнение $y' = f(x, y)$ с начальными условиями $y(x_0) = y_0$. Требуется найти его решение в некотором промежутке (x_0, x_n). Делим этот промежуток на n частей (равных или неравных) последовательными точками $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$.

На участке (x_0, x_1) получаем $y = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0)$, т.е. заменяем участок интегральной линии на отрезок касательной.

В точке $x = x_1$ получаем приближенное значение искомого решения $y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0)$.

На участке (x_1, x_2) полагаем $y = y_1 + f(x_1, y_1)(x - x_1)$.

Продолжая процесс, получаем последовательные приближенные значения

$$y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)(x - x_1),$$
$$y_3 = y_2 + f(x_2, y_2)(x - x_2),$$
....
$$y_n = y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1})(x - x_{n-1}).$$

Этим методом можно достичь любой требуемой точности. Но из-за больших вычислений метод Эйлера применяется лишь для грубых приближений.

§11. Уравнения второго порядка

Общий вид дифференциального уравнения второго порядка таков:

$$\Phi(x, y, y', y'') = 0.$$

Уравнение, **разрешенное относительно** y'', имеет вид $y'' = f(x, y, y')$.

Обычно задание **начальных условий** $x = x_0$, $y = y_0$, $y' = y'_0$ (или $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$) определяет единственное решение уравнения.

Решение уравнения $y'' = f(x, y, y')$, соответствующее заданным начальным значениям, называется **частным**.

Совокупность всех частных решений называется **общим решением**. Общее решение стараются представить в виде некоторой функции
$y = \varphi(x, C_1, C_2)$ (C_1 и C_2 – константы), которая дала бы любое частное решение (при соответствующем выборе значений C_1 и C_2).

§12. Уравнения, допускающие понижение порядка

Иногда дифференциальное уравнение второго или более высокого порядка допускает понижение порядка. Наиболее распространены два случая.

Случай 1. Уравнение не содержит y. Тогда порядок уравнения можно понизить, взяв за новую неизвестную функцию y', т.е. сделать замену $z = y'$. Уравнение примет вид $\Phi(x, z, z') = 0$.

Случай 2. Уравнение не содержит x. Порядок уравнения понижается с помощью подстановки $y' = P(y)$. В этом случае $y'' = P'(y)P(y)$. Уравнение примет вид $\Phi(y, p, p'p) = 0$.

Пример. Решить задачу Коши $y'' + 2y' = e^x (y')^2$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 1$.

Решение. Уравнение не содержит искомой функции, поэтому с помощью подстановки $y' = p(x)$, $y'' = p'(x)$ можно понизить порядок уравнения: $p' + 2p = e^x p^2$ – уравнение Бернулли, его решение будем искать в виде $p = uv$: $u'v + uv' + 2uv = e^x u^2 v^2$.

Решаем два уравнения:

I. $v' + 2v = 0$, $\dfrac{dv}{v} = -2dx$, $\ln v = -2x$, $v = e^{-2x}$;

II. $u'e^{-2x} = e^x u^2 e^{-4x}$, $u' = u^2 e^{-x}$, $\dfrac{du}{u^2} = e^{-x}dx$, $-\dfrac{1}{u} = -e^{-x} - C$, $u = \dfrac{1}{C + e^{-x}}$.

Итак, $p = uv = \dfrac{1}{C + e^{-x}} e^{-2x} = \dfrac{1}{Ce^{2x} + e^x}$.

Используя начальные условия, найдём константу C. Поскольку $p = y'$, то $p(0) = y'(0) = 1$. Подставим в полученное решение: $1 = \dfrac{1}{Ce^{2\cdot 0} + e^0} = \dfrac{1}{C + 1}$. Следовательно, $C = 0$. Итак, $y' = p = \dfrac{1}{e^x} = e^{-x}$.

Решаем полученное уравнение: $dy = e^{-x}dx$, $y = -e^{-x} + A$. Подставляем начальные условия: $-1 = -e^{-0} + A$,

–1 = –1 + A. Следовательно, A = 0. Итак, частное решение исходного уравнения $y=-e^{-x}$.

Пример. Решить задачу Коши $yy''-(y')^2=y^2\ln y$, $y(0)=y'(0)=1$.

Решение. Уравнение не содержит в явном виде независимую переменную x. С помощью подстановки $y'=p(y)$, $y''=p'p$ понизим порядок уравнения: $yp'p-p^2=y^2\ln y$, $yp'-p=\frac{1}{p}y^2\ln y$ – уравнение Бернулли. Ищем решение этого уравнения в виде $p=uv$.

$$yu'v+yuv'-uv=\frac{y^2\ln y}{uv},\ yu'v+u(yv'-v)=\frac{y^2\ln y}{uv}.$$

Решаем два уравнения:

I. $yv'-v=0$, $\frac{dv}{v}=\frac{dy}{y}$, $\ln|v|=\ln|y|$, $v=y$;

II. $yu'y=\frac{y^2\ln y}{uy}$, $y^2u'=\frac{y\ln y}{u}$, $udu=\frac{\ln y}{y}dy$, $\frac{u^2}{2}=\frac{\ln^2 y}{2}+\frac{C}{2}$,

$u=\sqrt{\ln^2 y+C}$.

Итак, $p=uv=y\sqrt{\ln^2 y+C}$.

Найдём константу C, подставляя начальные условия: $p(1)=y'(0)=1$, $y(0)=1$: $1=1\sqrt{\ln^2 1+C}$, C = 1.

Итак, $y'=y\sqrt{\ln^2 y+1}$, $\frac{dy}{y\sqrt{\ln^2 y+1}}=dx$,

$$x+\ln A=\int\frac{dy}{y\sqrt{\ln^2+1}}=\int\frac{d\ln y}{\sqrt{\ln^2+1}}=\ln|\ln y+\sqrt{\ln^2 y+1}|,$$

$\ln y+\sqrt{\ln^2 y+1}=Ae^x$.

Подставляем начальные условия $y(0) = 1$, находим константу A: $\ln 1 + \sqrt{\ln^2 1 + 1} = Ae^0$, $A = 1$.

Итак, $\ln y + \sqrt{\ln^2 y + 1} = e^x$, или $1 + \ln^2 y = e^{2x} - 2e^x \ln y + \ln^2 y$,

или $2e^x \ln y = e^{2x} - 1$, или $\ln y = \dfrac{e^{2x} - 1}{2e^x}$, $y = e^{\frac{e^{2x}-1}{2e^x}}$.

Ответ: $y = e^{\frac{e^{2x}-1}{2e^x}}$.

§13. Линейные однородные уравнения второго порядка

Линейным однородным уравнением второго порядка называется уравнение вида $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$,

(1)

где функции $P(x)$ и $Q(x)$ не зависят от y.

Теорема 1. Если функция $\varphi(x)$ является решением уравнения (1), то функция $C\varphi(x)$ (C – постоянная) – также решение.

Теорема 2. Если функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ являются решениями уравнения (1), то функция $\varphi_1(x) + \varphi_2(x)$ – также решение.

Следствие. Если функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ являются решениями уравнения (1), то функция $C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x)$ (C_1 и C_2 – константы) – тоже решение.

Функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ **линейно независимы**, если соотношение $a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x) = 0$ возможно лишь тогда, когда обе постоянные a_1, a_2 равны нулю.

Если $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ линейно независимы и являются решениями уравнения (1), то функция $y = C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x)$ даёт общее решение.

§14. Линейные однородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Уравнение вида $ay'' + by' + cy = 0$, где a, b, c – константы, называется **линейным однородным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами**.

Чтобы решить такое уравнение, надо составить **характеристическое уравнение** $ak^2 + bk + c = 0$ и найти его корни k_1 и k_2.

Возможны три случая.

Случай 1. Характеристическое уравнение имеет два действительных корня k_1 и k_2 (если дискриминант $D = b^2 - 4ac > 0$). Тогда общее решение имеет вид: $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$, где C_1 и C_2 – произвольные константы.

Случай 2. Характеристическое уравнение имеет два равных действительных корня $k = k_1 = k_2$ (если дискриминант $D = b^2 - 4ac = 0$). Тогда общее решение имеет вид: $y = C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx}$, C_1 и C_2 – произвольные константы.

Случай 3. Характеристическое уравнение имеет пару комплексно-сопряжённых корней $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$, где i – мнимая единица (если дискриминант $D = b^2 - 4ac < 0$). Общее решение в этом случае можно записать в виде: $y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$, где C_1 и C_2 – произвольные константы.

Сведём все три случая в таблицу:

Дискриминант	Корни характеристического уравнения	Вид общего решения
$D > 0$	$k_1 \neq k_2$ действительные	$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$
$D = 0$	$k_1 = k_2 = k$	$y = C_1 e^{kx} + x C_2 e^{kx}$
$D < 0$	$k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$	$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

Пример. Найти общее решение уравнения $y'' - 2y' + y = 0$.

Решение. Данное уравнение является линейным однородным уравнением второго порядка.

Составляем характеристическое уравнение:

$k^2 - 2k + 1 = 0$. Решаем его: $D = 4 - 4 = 0$, $k = 2/2 = 1$, так как $D = 0$, то общее решение имеет вид: $\overline{y} = C_1 e^x + C_2 x e^x$.

Пример. Найти общее решение уравнения $y'' - y' - 2y = 0$.

Решение. Составляем характеристическое уравнение:

$k^2 - k - 2 = 0$. Решаем его: $D = 1 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 9$, $k_1 = \dfrac{1+3}{2} = 2$, $k_2 = \dfrac{1-3}{2} = -1$. Так как $D > 0$, то общее решение имеет вид: $\overline{y} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}$.

Пример. Найти общее решение уравнения $5y'' - 6y' + 5y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение $5k^2 - 6k + 5 = 0$.

Решаем его: $D = 36 - 100 = -64$. Так как $D < 0$, то решением будет пара комплексно-сопряжённых корней:

$k_1 = \dfrac{6 + \sqrt{-64}}{10}$, $k_2 = \dfrac{6 - \sqrt{-64}}{10}$, $(\sqrt{-64} = \sqrt{64 \cdot (-1)} = 8\sqrt{-1} = 8i)$, т.е. корни характеристического уравнения $k_{1,2} = \dfrac{3}{5} \pm \dfrac{4}{5} i$. В нашем случае $\alpha = \dfrac{3}{5}$, $\beta = \dfrac{4}{5}$.

Тогда общее решение однородного уравнения

$$\overline{y} = e^{\frac{3}{5}x} \left(C_1 \cos\frac{4}{5}x + C_2 \sin\frac{4}{5}x\right).$$

§15. Линейные неоднородные уравнения второго порядка

Линейным неоднородным уравнением второго порядка называется уравнение вида $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x),$

(1)

где функции $P(x)$, $Q(x)$, $f(x)$ не зависят от y.

Теорема наложения. Если $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ являются решениями уравнения (1) для различных правых частей $f_1(x)$ и $f_2(x)$, то их сумма $y = \varphi_1(x) + \varphi_2(x)$ будет решением такого же уравнения с правой частью $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$.

Следствие. Для получения общего решения неоднородного уравнения следует к какому-либо его частному решению y^* прибавить общее решение $\overline{y}$ соответствующего однородного уравнения, т.е. $y = y^* + \overline{y}$ – общее решение уравнения (1).

§16. Метод вариации постоянных

Рассмотрим линейное уравнение второго порядка:

$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x).$

Пусть $y = C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x)$ – общее решение соответствующего однородного уравнения. Ищем общее решение уравнения, считая C_1 и C_2 неизвестными функциями от x.

Вводим новое условие $C_1'\varphi_1(x) + C_2'\varphi_2(x) = 0,$ получаем, подставляя y в исходное уравнение: $C_1'\varphi_1'(x) + C_2'\varphi_2'(x) = f(x).$

Решая систему линейных уравнений, найдем C_1' и C_2' и далее, интегрируя, C_1 и C_2. Метод вариации постоянных позволяет решать линейные уравнения любого порядка.

Пример. Найти общее решение дифференциального уравнения методом вариации произвольных постоянных $y'' + 4y = \dfrac{1}{\cos 2x}$.

Решение. Характеристическое уравнение $k^2 + 4 = 0$ имеет корни $k_{1,2} = \pm 2i$, поэтому общее решение однородного уравнения $\overline{y} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$. Частное решение исходного уравнения методом неопределённых коэффициентов искать нельзя (функция $f(x)$ имеет другой вид), поэтому используем метод вариации произвольных постоянных. Будем искать решение уравнения в виде $y = C_1(x)\cos 2x + C_2(x)\sin 2x$, где функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ нужно найти из системы уравнений $\begin{cases} C_1'(x)\cos 2x + C_2'(x)\sin 2x = 0 \\ C_1'(x)(\cos 2x)' + C_2'(x)(\sin 2x)' = \dfrac{1}{\cos 2x} \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C_1'(x)\cos 2x + C_2'(x)\sin 2x = 0 \\ -2C_1'(x)\sin 2x + 2C_2'(x)\cos 2x = \dfrac{1}{\cos 2x} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C_1' = -\dfrac{\sin 2x}{2\cos 2x} \\ C_2'(x) = 1/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1(x) = -\dfrac{1}{2}\int \operatorname{tg} 2x dx = \dfrac{1}{4}\ln|\cos 2x| + A \\ C_2(x) = x/2 + B \end{cases}$$

Таким образом, общее решение исходного уравнения $y = \dfrac{1}{4}\cos 2x \ln|\cos 2x| + A\cos 2x + \dfrac{1}{2}x\sin 2x + B\sin 2x.$

§17. Правила нахождения частного решения неоднородного уравнения второй степени

Чтобы найти общее решение **линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами** $ay'' + by' + cy = f(x),$ нужно к его частному решению y^* прибавить общее решение $\overline{y}$ однородного уравнения (см. §15).

Для правых частей $f(x)$, имеющих вид $P_n(x)e^{\alpha x}$, где $P_n(x)$ – многочлен степени n, или $e^{\alpha x}(M\cos\beta x + N\sin\beta x)$ для нахождения y^* нужно помнить следующие правила.

Правило 1. y^* «похожа» на правую часть $f(x)$.

Правило 2. y^* ищем в общем виде.

Правило 3. Помнить о связи с корнями характеристического уравнения.

Подробно это описано в таблице:

Связь с корнями характеристического уравнения	Вид $f(x)$	Вид y^*
а) $k_1 \neq \alpha,\ k_2 \neq \alpha$ б) $k_1 = \alpha,\ k_2 \neq \alpha$ в) $k_1 = k_2 = \alpha$	$P_n(x)e^{\alpha x}$,	$y^* = Q_n(x)\,e^{\alpha x}$ $y^* = xQ_n(x)\,e^{\alpha x}$ $y^* = x^2Q_n(x)\,e^{\alpha x}$
а) $k_{1,2} \neq \alpha \pm i\beta$ б) $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$	$e^{\alpha x}(M\cos\beta x + N\sin\beta x)$	$y^* = e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$ $y^* = x\,e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$

Замечания: 1) $Q_n(x)$ многочлен степени n в общем виде, например, $Q_0(x) = A$, $Q_1(x) = Ax + B$, $Q_2(x) = Ax^2 + Bx + C$ и т.д.;

2) α может быть равно нулю.

Пример. Найти частное решение уравнения $y'' - y' = 2(1 - x)$, удовлетворяющее начальным условиям: $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

Решение. Найдём общее решение данного неоднородного уравнения $y = y^* + \bar{y}$. Сначала найдем общее решение однородного уравнения $\bar{y}$. Составляем и решаем характеристическое уравнение:

$k^2 - k = 0$, $k_1 = 0$, $k_2 = 1$;

$\bar{y} = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_1x} = C_1 + C_2e^x$ (т.к. $e^{0x} = e^0 = 1$).

Подберем частное решение неоднородного уравнения y^*. Правую часть уравнения можно записать в виде $f(x) = e^{0x}2(1–x) = e^{\alpha x}P(x)$. В нашем случае $\alpha = 0$ и $P(x) = 2 – 2x$ – многочлен первой степени.

Так как α = 0 является корнем характеристического уравнения, то:

$$y* = x(Ax+B)e^{0x} = Ax^2 + Bx.$$

Найдём $(y*)'$, $(y*)''$ и подставим в исходное уравнение

$$(y*)' = 2Ax + B,$$
$$(y*)'' = 2A,$$
$$2A - 2Ax - B = 2 - 2x.$$

Получаем систему уравнений:

$$\begin{matrix} x^0: \\ x\ : \end{matrix}\begin{cases} 2A - B = 2, \\ -2A = -2. \end{cases}$$

Отсюда $A = 1$, $B = 0$. Следовательно, $y* = x^2$ и $y = C_1 + C_2e^x + x^2$. Используя начальные условия, находим C_1 и C_2:

$$y(0) = C_1 + C_2e^0 + 0^2 = C_1 + C_2 = 1,$$

$$y'(0) = C_2e^0 + 2\cdot 0 = C_2 = 1.$$

Отсюда $C_2 = 1$ и $C_1 = 0$.

Ответ: $y = e^x + x^2$ – искомое частное решение.

Пример. Найти частное решение уравнения $y'' + y' - 2y = \cos x - 3\sin x$ при начальных условиях $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

Решение. Характеристическое уравнение $k^2 + k - 2 = 0$ имеет корни
$k_1 = 1$, $k_2 = -2$, поэтому общее решение однородного уравнения $\overline{y} = C_1e^x + C_2e^{-2x}$. Правую часть уравнения можно записать в виде $f(x) = e^{0x}(\cos x - 3\sin x)$. Отсюда α = 0, β = 1, частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде $y* = A\cos x + B\sin x$. Итак

$$\left.\begin{array}{l|l|} y* = A\cos x + B\sin x & \times(-2) \\ (y*)' = -A\sin x + B\cos x & \times 1 \\ (y*)'' = -A\cos x - B\sin x & \times 1 \end{array}\right. +$$

Получаем систему

$$\begin{matrix}\cos x: \\ \sin x:\end{matrix}\begin{cases}-2A+B-A=1 \\ -2B-A-B=-3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}A=0 \\ B=1\end{cases}$$

Следовательно, частное решение неоднородного уравнения $y* = \sin x$ и общее решение данного уравнения $y = \overline{y} + y* = C_1e^x + C_2e^{-2x} + \sin x$, $y' = C_1e^x - 2C_2e^{-2x} + \cos x$. Найдём C_1 и C_2, используя начальные условия: $\begin{cases}1 = C_1e^0 + C_2e^{-2\cdot 0} + \sin 0 \\ 2 = C_1e^0 - 2C_2e^{-2\cdot 0} + \cos 0\end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases}1 = C_1 + C_2 \\ 2 = C_1 - 2C_2 + 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}C_2 = 0 \\ C_1 = 1\end{cases}$$

Итак, $y = e^x + \sin x$ – частное решение исходного уравнения.

Глава 2. Ряды

§1. Числовые ряды. Основные понятия

Выражение вида $a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$, где числа $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ образуют бесконечную последовательность, называется **числовым рядом**; суммы $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$, $S_3 = a_1 + a_2 + a_3$, ..., $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$ называются **частичными суммами** ряда, а член a_n – **общим членом** ряда.

Если последовательность частичных сумм $S_1, S_2, ..., S_n$ имеет конечный предел (при $n \to \infty$) $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, то ряд называется **сходящимся**, а число S – **суммой ряда**. Обозначается $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S$. Если конечного предела не существует, то ряд называется **расходящимся.** В этом случае величина S_n может неограниченно возрастать ($\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$) или быть колеблющейся.

Остатком или **остаточным членом** сходящегося ряда $a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$ называется разность между его суммой S и частичной суммой S_n; он обозначается через R_n: $R_n = S - S_n = a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_{n+m} + ...$

Пример. Найти сумму ряда $\frac{3}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{15} + \frac{1}{45} + \frac{1}{135} + \frac{1}{405} + ...$

Решение. Ряд составлен из членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии и поэтому сходится. Здесь $a = \frac{3}{5}$, $q = \frac{1}{3}$. Следовательно, $S = \frac{a}{1-q} = \frac{3/5}{1 - 1/3} = 0,9$.

Пример. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{3}{n^2+n-2}$.

Решение. Представим общий член ряда $a_n=\dfrac{3}{n^2+n-2}=\dfrac{3}{(n-1)(n+2)}$ в виде суммы простейших дробей: $\dfrac{3}{(n-1)(n+2)}=\dfrac{A}{n-1}+\dfrac{B}{n+2}$. Умножив на знаменатель левой части, получим тождество $3\equiv A(n+2)+B(n-1)$.

$$\begin{matrix}\text{При } n=-2 \\ \text{При } n=1\end{matrix}\begin{cases}3=-3B\\ 3=3A,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}B=-1\\ A=1\end{cases}$$

Итак, общий член ряда $a_n=\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n+2}$. Отсюда $a_2=1-\dfrac{1}{4}$,

$a_3=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{5}$, $a_4=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{6}$, $a_5=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{7}$, $a_6=\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{8}$, ... $a_{n-2}=\dfrac{1}{n-3}-\dfrac{1}{n}$,

$a_{n-1}=\dfrac{1}{n-2}-\dfrac{1}{n+1}$, $a_n=\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n+2}$, $a_{n+1}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+3}$,

$$S_{n+1}=1-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{5}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}+\frac{1}{4}-\frac{1}{7}+\frac{1}{5}-\frac{1}{8}+\frac{1}{6}-\frac{1}{9}+\ ...$$

$$...+\frac{1}{n-3}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+3}=$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}.$$

Итак,

$$\lim_{n\to\infty}S_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{11}{6}.$$

Следовательно, ряд сходится и имеет сумму $11/6$.

§2. Основные свойства числовых рядов

Теорема 1. Отбрасывание конечного числа начальных членов ряда или присоединение в начале его нескольких новых членов не отражается на сходимости или расходимости ряда.

Теорема 2. Если члены сходящегося ряда умножить на один и тот же множитель C, то его сходимость не нарушится, а сумма умножится на C.

Теорема 3. Сходящиеся ряды можно почленно складывать и вычитать: из сходимости рядов

$a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$ с суммой S_1

и $b_1 + b_2 + ... + b_n + ...$ с суммой S_2

следует, что ряд $(a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + ... + (a_n \pm b_n) + ...$ сходится и его сумма равна $S_1 \pm S_2$.

§3. Необходимое условие сходимости ряда

Для сходимости числового ряда необходимо, чтобы общий член ряда при $n \to \infty$ стремился к нулю: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Этот признак не является **достаточным**. Например, в **гармоническом ряде** $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}+...$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, но $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, т.е. условие выполнено, но ряд расходится.

§4. Признаки сходимости знакоположительных рядов

Знакоположительным рядом называется ряд, все члены которого положительны.

Признак сравнения 1. Если для двух знакоположительных рядов

(A): $a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$ и

(B): $b_1 + b_2 + ... + b_n + ...$,

верно, что начиная с некоторого n, $a_n \geq b_n$, то из сходимости ряда (A) следует сходимость ряда (B), а из расходимости ряда (B) следует расходимость ряда (A).

Признак сравнения 2. Если для двух знакоположительных рядов

(A): $a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$ и

(B): $b_1 + b_2 + ... + b_n + ...$

верно, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = C \neq 0,$ то ряды (A) и (B) сходятся или расходятся одновременно.

Признак Даламбера. Если для ряда $a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = p$, то ряд сходится при $p < 1$ и расходится при $p > 1$. При $p = 1$ признак ответа не дает: ряд может сходиться или расходиться.

Пример. Доказать сходимость числового ряда

$$\frac{1}{3} + \frac{4}{9} + ... + \frac{n^2}{3^n} + ...$$

Решение. Используем признак Даламбера:

$$p = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{3^{n+1}} : \frac{n^2}{3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{3} < 1.$$

Так как полученное значение предела $p = \dfrac{1}{3} < 1$, то данный ряд сходится.

Радикальный признак Коши. Если для ряда $a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$ $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = p$, то ряд сходится при $p < 1$ и расходится при $p > 1$. При $p = 1$ признак ответа не дает.

Пример. Доказать сходимость ряда

$$\arcsin 1+\arcsin^2\frac{1}{2}+\ldots+\arcsin^n\frac{1}{n}+\ldots$$

Решение. Так как общий член ряда $a_n=\arcsin^n\frac{1}{n}$ представляет собой n-ю степень, то удобно использовать признак Коши:

$$p=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\arcsin^n\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\arcsin\frac{1}{n}=\arcsin 0=0<1.$$

Так как $p = 0 < 1$, то ряд сходится.

Интегральный признак Коши. Ряд с общим членом $a_n = f(n)$ сходится, если $f(x)$ – непрерывная монотонно убывающая функция и несобственный интеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$ сходится; ряд с общим членом $f(n)$ расходится, если этот интеграл расходится.

Пример. Исследовать сходимость числового ряда

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{n\sqrt{n}}+\ldots$$

Решение. В данном случае признак Даламбера и признак Коши не дают ответа о сходимости ряда, т.к. $\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\sqrt{n+1}}{n\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n\sqrt{n}}}=1$.

Используем интегральный признак Коши: ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$ сходится или расходится одновременно с интегралом

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x}}=\int_1^{\infty}x^{-3/2}dx=\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{2}{\sqrt{x}}\right]_1^b=0+2=2\,.$$

Так как интеграл сходится, то и ряд сходится.

§5. Знакопеременные ряды

Одновременно с рядом (А) $a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$, члены которого имеют неодинаковые знаки (такой ряд называется **знакопеременным**), удобно рассматривать ряд (В) $|a_1|+|a_2|+...+|a_n|+...$, составленный из абсолютных величин (модулей) членов ряда (А). Если ряд (В) сходится, то и ряд (А) сходится, в этом случае ряд (А) называется **абсолютно сходящимся**. Если ряд (В) расходится, то ряд (А) может как расходиться, так и сходиться. В случае, если при расходимости ряда (В) ряд (А) сходится, ряд (А) называется **условно сходящимся**.

§6. Знакочередующиеся ряды

Ряд $a_1 - a_2 + a_3 - ... + (-1)^{n+1}a_n + ...$, где a_i – положительные числа, называется **знакочередующимся**.

Признак Лейбница. Для сходимости знакочередующегося ряда достаточно выполнения двух условий:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$,

2) $a_1 > a_2 > ... > a_n > ....$

Остаток знакочередующегося ряда $R_n = S - S_n$ имеет знак первого отброшенного члена и будет меньше его по абсолютной величине: $|R_n| < |a_n|$.

§7. Функциональные ряды

Ряд, составленный из функций одной и той же переменной x:

$f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x) + ... = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, называется **функциональным**.

Все те значения $x = a$, которые входят в область задания всех функций $f_n(x)$ и для которых числовые ряды $f_1(a) + f_2(a) + ... + f_n(a) + ...$ сходятся (т.е. для которых существует конечный предел частичных сумм $S_n(a)$:

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n(a) = S(a)$), образуют **область сходимости** функционального ряда. Функция $S(x)$ называется **суммой ряда**.

Если в ряде $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ отбросить первые m членов, то получится ряд $R_m(x) = S(x) - S_m(x) = f_{m+1}(x) + f_{m+2}(x) + \ldots = \sum\limits_{n=m+1}^{\infty} f_n(x)$, называемый **остатком ряда**.

§8. Равномерная сходимость ряда

Функциональный ряд называется **равномерно сходящимся** в данной области, если существует число N, общее для всех значений x, входящих в область сходимости, такое, что $|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$, при $n > N$, для любого сколь угодно малого положительного ε. Иначе говоря, ряд называется **равномерно сходящимся**, если остаток ряда $R_n(x)$, начиная с некоторого N, общего для всех значений x, остается по абсолютному значению меньшим любого заранее данного положительного числа ε: $|R_n(x)| < \varepsilon$ при $n > N$.

Функциональный ряд **сходится** в данной области **неравномерно**, если каково бы ни было n, найдется в области сходимости такое число x, что
$|S(x) - S_n(x)| > \varepsilon$.

Признак Вейерштрасса равномерной сходимости рядов

Ряд $f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots$ равномерно сходится в данной области, если существует такой сходящийся числовой ряд
$c_1 + c_2 + \ldots + c_n + \ldots$, что для всех значений x, лежащих в этой области, выполняется неравенство $|f_n(x)| \le c_n$.

В этом случае ряд $c_1 + c_2 + \ldots + c_n + \ldots$ называется **мажорантой** ряда $f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots$.

Свойства равномерно сходящихся рядов

Теорема 1. Если $f_1(x)$, $f_2(x)$,..., $f_n(x)$,... – непрерывные функции в некоторой области их задания и ряд $f_1(x) + f_2(x) +...+ f_n(x) +...$ равномерно сходится в этой области, то его сумма $S(x)$ – функция также непрерывная в этой области.

Теорема 2. Равномерно сходящийся ряд можно почленно интегрировать в данной области, и сумма интегралов от членов ряда равна интегралу от суммы данного ряда:

$$\int_a^x f_1(x)dx + \int_a^x f_2(x)dx + ... + \int_a^x f_n(x)dx + ... = \int_a^x S(x)dx .$$

Теорема 3. Если функциональный ряд $f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x) +...$ сходится в некоторой области и производные его членов непрерывны в этой области, то ряд можно почленно дифференцировать при условии, что полученный ряд $f_1'(x) + f_2'(x) +...+ f_n'(x)+...$ будет равномерно сходящимся в данном промежутке. Сумма производных от членов ряда будет равна производной от суммы ряда.

§9. Степенные ряды

Степенным рядом называется функциональный ряд вида

(A) $a_0 + a_1x + a_2x^2 +...+ a_nx^n +...$ или

(B) $a_0 + a_1(x – a) + a_2(x – a)^2 +...+ a_n(x – a)^n +...$,

где $a_0, a_1, a_2 \ldots$ – постоянные коэффициенты.

Ряд (A) абсолютно сходится для всех значений x, меньших по абсолютной величине некоторого числа ρ ($|x| < \rho$), называемого **радиусом сходимости** степенного ряда.

Ряд (B) абсолютно сходится для всех значений x, удовлетворяющих неравенству $|x – a| < \rho$ (ρ – радиус сходимости). Радиус сходи-

мости может быть определен по формулам $\frac{1}{\rho}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$;
$\frac{1}{\rho}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$.

Теорема Абеля. Если ряд (A) сходится при $x=x_0\neq 0$, то он сходится **равномерно** внутри интервала $(-|x_0|;|x_0|)$.

Свойства степенных рядов

Теорема 1. Сумма $S(x)$ степенного ряда (A) непрерывна в интервале сходимости $(-\rho;\rho)$.

Теорема 2. Степенной ряд внутри интервала сходимости можно почленно дифференцировать

$$S'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\ldots+na_nx^{n-1}+\ldots \text{ при } x\in(-\rho;\rho).$$

Теорема 3. Степенной ряд можно почленно интегрировать на любом отрезке, лежащем внутри интервала сходимости:

$$\int_a^x S(x)dx=\int_a^x a_0dx+\int_a^x a_1xdx+\ldots+\int_a^x a_nx^ndx+\ldots, \text{ при } -\rho<a<x<\rho.$$

Пример. Написать первые четыре члена ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 10^{n-1}}$, найти интервал сходимости ряда и исследовать его сходимость на концах интервала.

Решение. Подставляя в общий член ряда последовательно n = 1,2,3,4,..., запишем данный ряд в виде $x+\frac{x^2}{20}+\frac{x^3}{300}+\frac{x^4}{4000}+...$

Найдем радиус сходимости степенного ряда по формуле:

$$\frac{1}{\rho}=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot 10^{n-1}}{(n+1)\cdot 10^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{10}\cdot\frac{n}{n+1}=\frac{1}{10}.$$

Следовательно, ρ = 10 и интервал сходимости $-10<x<10$.

Исследуем сходимость ряда на концах полученного интервала.

При x = –10 получаем $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 10}{n}$ – знакочередующийся ряд. Для исследования его сходимости используем признак Лейбница:

1) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{10}{n} = 0;$

2) $10 > \frac{10}{2} > ... > \frac{10}{n} > \frac{10}{n+1} > ...$

Оба условия выполнены. Следовательно, данный ряд сходится. Значит, x = –10 принадлежит интервалу сходимости.

При x = 10 ряд принимает вид $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10}{n}$. Исследуем сходимость этого ряда с помощью признака сравнения (см. §4): т.к. $\frac{10}{n} > \frac{1}{n}$ и известно, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится, то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10}{n}$ тоже расходится. Значит, x = 10 не принадлежит интервалу сходимости.

Таким образом, $-10 \le x < 10$ – область сходимости данного ряда.

§10. Ряд Тейлора

Всякая непрерывная функция $y = f(x)$ раскладывается по формуле Тейлора в точке x_0:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + ...$$

Теорема. Функция $y = f(x)$ разлагается в ряд Тейлора в точке x_0 тогда и только тогда, когда она определена в этой точке, непрерывна в некоторой её окрестности и остаточный член в формуле Тейлора

$R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$, где $\xi \in (x_0; x)$, стремится к нулю при $n \to \infty$ $\left(\lim\limits_{x\to\infty} R_n(x) = 0\right)$.

Разложить функцию *f*(*x*) в степенной ряд, расположенный по степеням $(x - x_0)$, это значит составить ряд вида $a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2 + ... + a_n(x - a)^n + ...$, у которого радиус сходимости не равен нулю, а сумма тождественно равна данной функции всюду внутри области сходимости.

Теорема. Если функция $f(x)$ разлагается в степенной ряд, то разложение единственно, и степенной ряд совпадает с рядом Тейлора.

Ряд Маклорена – разложение функции $f(x)$ по степеням x – частный случай ряда Тейлора при $x_0 = 0$:

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + ...$$

§11. Разложение в степенной ряд элементарных функций

$$(1 \pm x)^m = 1 \pm mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 \pm \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + ...$$

$$... + (\pm 1)^n \frac{m(m-1)(m-2)...(m-n+1)}{n!}x^n + ...,$$

область сходимости $|x| < 1$.

$\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - ... + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + ...$, область сходимости $|x| < \infty$.

$\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - ... + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + ...$, область сходимости $|x| < \infty$.

$e^x = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + ... + \dfrac{x^n}{n!} + ...$, область сходимости $|x| < \infty$.

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^n\frac{x^n}{n}+\ldots,$$

область сходимости $-1 < x \le 1$.

$$\operatorname{arctg} x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots,$$ область сходимости $|x| < 1$.

§12. Приложение степенных рядов к приближенным вычислениям

1) Вычисление значений функций

Пример. Вычислить $\sqrt[3]{1,06}$ с точностью до 0,0001.

Решение. Воспользуемся разложением $(1 + x)^m$ в ряд, полагая $x = 0,06$, $m = 1/3$. Имеем $\sqrt[3]{1,06}=(1+0,06)^{1/3}=$

$$=1+\frac{1}{3}0,06+\frac{1/3\left(1/3-1\right)}{2!}0,06^2+\frac{1/3\left(1/3-1\right)\left(1/3-2\right)}{3!}0,06^3\ldots=$$

$= 1 + 0,02 – 0,0018 + 0,000133 + ...$

Четвёртый и последующие члены отбрасываем, т.к. четвёртый член меньше 0,0001. Итак, $\sqrt[3]{1,06}\approx 1,0182$.

2) Вычисление пределов

Пример. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{e^x-1-x}$.

Решение. Заменим $\cos x$ и e^x их разложениями в степенные ряды, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{e^x-1-x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots\right)}{\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots\right)-1-x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}+\ldots}{\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots}=$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{2!} - \frac{x^2}{4!} + \ldots}{\frac{1}{2!} + \frac{x}{3!} + \frac{x^2}{4!} + \ldots} = 1.$$

Пример. Найти $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$.

Решение.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{x - \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots \right)}{x^3} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{3} - \frac{x^2}{5} + \frac{x^4}{7} - \ldots \right) = \frac{1}{3}.$$

3) Вычисление определенных интегралов.

Если подынтегральная функция $f(x)$ может быть представлена в интервале интегрирования $[a, b]$ равномерно сходящимся рядом

$f(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \ldots + \varphi_n(x) + \ldots,$

то определенный интеграл может быть представлен в виде сходящегося числового ряда

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \varphi_1(x)dx + \int_a^b \varphi_2(x)dx + \ldots + \int_a^b \varphi_n(x)dx + \ldots$$

В случае легко интегрируемых функций $\varphi_i(x)$ (например, при разложении $f(x)$ в степенной ряд, равномерно сходящийся в интервале $[a, b]$) интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ может быть вычислен с любой степенью точности.

Пример. Вычислить $\int\limits_0^{0,5} e^{-x^2} dx$ с точностью до 0,0001.

Решение. Разложим подынтегральную функцию в степенной ряд. Для этого заменим x на $(-x^2)$ в разложении функции e^x:

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \ldots$$

Тогда

$$\int_0^{0,5} e^{-x^2}dx = \int_0^{0,5}\left(1-x^2+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^8}{4!}-...\right)dx =$$

$$=\left[x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5\cdot 2!}-\frac{x^7}{7\cdot 3!}+\frac{x^9}{9\cdot 4!}-...\right]_0^{0,5} =$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^3\cdot 3}+\frac{1}{2^5\cdot 5\cdot 2!}-\frac{1}{2^7\cdot 7\cdot 3!}+\frac{1}{2^9\cdot 9\cdot 4!}-...=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{24}+\frac{1}{320}-\frac{1}{5276}+\frac{1}{110592}-...$$

По признаку Лейбница (см. §6) полученный знакочередующийся ряд сходится, и для достижения нужной точности можно ограничиться первыми четырьмя членами разложения: $\int_0^{0,5} e^{-x^2}dx \approx \frac{1}{2}-\frac{1}{24}+\frac{1}{320}-\frac{1}{5276}=0,4613$.

4) Интегрирование дифференциальных уравнений.

Решение уравнения $y' = f(x, y)$ при начальных условиях $x = x_0$, $y = y_0$ можно искать в виде ряда, расположенного по степеням $(x - x_0)$, т.е. в виде

$$y = y_0 + C_1(x - x_0) + C_2(x - x_0)^2 +...+ C_n(x - x_0)^n +....$$

Множители $C_1, C_2, ..., C_n, ...$ находим по методу неопределённых коэффициентов.

Пример. Найти четыре первых (отличных от нуля) члена разложения решения уравнения $y' = x^2y + y^3$, $y(0) = 1$.

Решение. Дифференцируя уравнение $y' = x^2y + y^3$, получим $y'' = 2xy + x^2y' + 3y^2y'$, $y''' = 2y + 2xy' + 2xy' + x^2y'' + 6y(y')^2 + 3y^2y''$.

При $x = 0$ получаем:

$y(0)=1$, $y'(0)=1$, $y''(0)=3$, $y'''(0)=17$.

Решение имеет вид

$$y = y(0)+\frac{y'(0)}{1!}x+\frac{y''(0)}{2!}x^2+\frac{y'''(0)}{3!}x^3+\ldots,$$

$$y=1+x+\frac{3}{2!}x^2+\frac{17}{3!}x^3+\ldots$$

Ответ: $y=1+x+1{,}5x^2+\dfrac{17}{6}x^3+\ldots$

§13. Ряды Фурье

Теорема Дирихле. Если $f(x)$ – периодическая функция с $T = 2l$, кусочно-гладкая на $(-l;\ l)$ (на этом интервале $f(x)$ и $f'(x)$ имеют не более конечного числа точек разрыва первого рода), то **ряд Фурье** для $f(x)$ имеет вид:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}, \qquad (1)$$

где $a_0=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)dx$; $a_n=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx$;

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx;\ n=1,\ 2,\ 3\ldots \qquad (2)$$

сходится к $f(x)$, если x – точка непрерывности $f(x)$

и к $\dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$, если x – точка разрыва $f(x)$, где $f(x-0)$ и $f(x+0)$ – соответственно левый и правый пределы $f(x)$ в точке x:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}=$$
$$=\begin{cases} f(x),\ \text{если } x-\text{точка непрерывности } f(x),\\ \dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2},\ x-\text{точка разрыва } f(x), \end{cases}$$

a_0, a_n, b_n - называются **коэффициентами Фурье**.

Функция $F(x)$, совпадающая с $f(x)$ в $(-l;\ l)$ и удовлетворяющая условию $(\forall x)\, F(x+2l) = F(x)$, называется **периодическим продолжением** $f(x)$ на всю ось *Ox*.

В ряд Фурье можно разложить и непериодическую кусочно-гладкую функцию, заданную лишь в интервале $(-l;\ l)$, вычисляя коэффициенты a_0, a_n, b_n по формулам (2). Полученный ряд будет сходиться на всей числовой оси, а его суммой будет $F(x)$ – периодическое продолжение $f(x)$ на ось *Ox*.

При вычислении коэффициентов Фурье в формулах (2) интервал интегрирования $(-l;\ l)$ можно заменить любым интервалом $(a;\ a+2l)$ длины $2l$.

Неполные ряды Фурье

Если $f(x)$ – четная функция, то

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx; \quad a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx; \quad b_n = 0\,. \tag{3}$$

Ряд Фурье примет вид: $\dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos\dfrac{n\pi x}{l}$.

Если $f(x)$ – нечетная функция, то

$$a_0 = a_n = 0; \quad b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx \tag{4}$$

и ряд Фурье принимает вид $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin\dfrac{n\pi x}{l}$.

Функцию $f(x)$, кусочно-гладкую в интервале $(0;\ l)$, можно разложить в ряд Фурье только по косинусам или по синусам. Для этого достаточно продолжить $f(x)$ четным или, соответственно, нечетным образом на интервал $(-l;\ 0)$ и для полученной на $(-l;\ l)$ функции составить ряд Фурье. Коэффициенты Фурье будут при этом вычисляться по формулам соответственно (3) или (4).

Ряды Фурье в комплексной форме

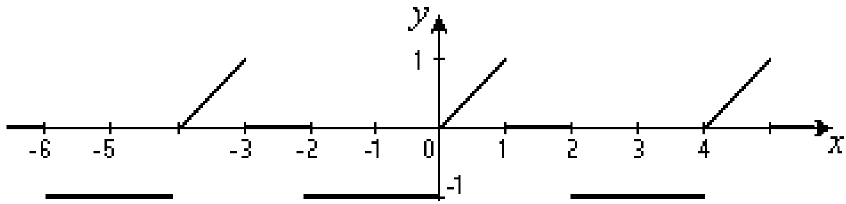
Комплексная форма ряда Фурье для $f(x)$, периодической с $T = 2l$, а также для $f(x)$, заданной на $(-l;\ l)$, имеет вид

$$\frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi x}{l}}, \quad c_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x) e^{-i\frac{n\pi x}{l}}\,dx.$$

Связь между a_0, a_n, b_n и c_n следующая:

$$c_0 = a_0;\ c_n = a_n - ib_n;\ a_n = \operatorname{Re} c_n;\ b_n = -\operatorname{Im} c_n.$$

Пример. Разложить в ряд Фурье функцию, график которой представлен на рисунке.



Решение. Функция является периодической с периодом $4 = 2l$. Следовательно, $l = 2$. При нахождении ряда Фурье значения функции в конечном числе точек можно выбирать произвольно (в данном случае речь идет о точках разрыва). Зададим по рисунку

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -2 \le x < 0, \\ x, & 0 \le x < 1, \\ 0, & 1 \le x < 2. \end{cases}$$

$$a_0=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)dx=\frac{1}{2}\int_{-2}^{0}(-1)dx+\frac{1}{2}\int_{0}^{1} xdx=-\frac{1}{2}x\Big|_{-2}^{0}+\frac{1}{2}\frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{1}=-1+\frac{1}{4}=-\frac{3}{4},$$

$$a_k=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\cos\frac{\pi kx}{2}dx=\frac{1}{2}\int_{-2}^{0}(-1)\cos\frac{\pi kx}{2}dx+\frac{1}{2}\int_{0}^{1} x\cos\frac{\pi kx}{2}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{2}{\pi k}\sin\frac{\pi kx}{2}\Big(_{-2}^{0}\right)+\frac{1}{2}\left(x\frac{2}{\pi k}\sin\frac{\pi kx}{2}\Big(_{0}^{1}-\frac{2}{\pi k}\int_{0}^{1}\sin\frac{\pi kx}{2}dx\right)=$$

$$=-\frac{1}{\pi k}\left(\sin 0+\sin\pi k\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\pi k}\sin\frac{\pi k}{2}\right)-\frac{1}{\pi k}\int_{0}^{1}\sin\frac{\pi kx}{2}dx=\frac{1}{\pi k}\sin\frac{\pi k}{2}+$$

$$+\frac{2}{\pi^2k^2}\cos\frac{\pi kx}{2}\Big|_{0}^{1}=\frac{1}{\pi k}\sin\frac{\pi k}{2}+\frac{2}{\pi^2k^2}\left(\cos\frac{\pi k}{2}-1\right),$$

$$b_k=\frac{1}{2}\int_{-2}^{0}(-1)\sin\frac{\pi kx}{2}dx+\frac{1}{2}\int_{0}^{1} x\sin\frac{\pi kx}{2}dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\pi k}\cos\frac{\pi kx}{2}\Big|_{-2}^{0}+$$

$$+\frac{1}{2}\left(-\frac{2x}{\pi k}\cos\frac{\pi kx}{2}\Big|_{0}^{1}+\frac{2}{\pi k}\int_{0}^{1}\cos\frac{\pi kx}{2}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi k}(1-\cos\pi k)+\frac{1}{\pi k}(-\cos\frac{\pi k}{2})+\frac{1}{\pi k}\frac{2}{\pi k}\left(\sin\frac{\pi kx}{2}\right)\Big|_{0}^{1}=$$

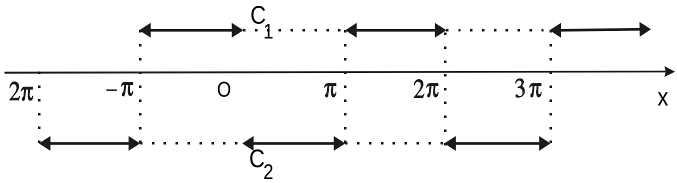
$$=\frac{1}{\pi k}(1-(-1)^k)-\frac{1}{\pi k}\cos\frac{\pi k}{2}+\frac{2}{\pi^2k^2}\sin\frac{\pi k}{2}.$$

Ответ. $f(x)\sim-\frac{3}{8}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\pi k}\sin\frac{\pi k}{2}+\frac{2}{\pi^2k^2}\left(\cos\frac{\pi k}{2}-1\right)\right)\cos\frac{\pi kx}{2}+$ $+\left(\frac{1}{\pi k}(1-(-1)^k)-\frac{1}{\pi k}\cos\frac{\pi k}{2}+\frac{2}{\pi^2k^2}\sin\frac{\pi k}{2}\right)\sin\frac{\pi kx}{2}$. В точках непрерывности функции $f(x)$ может быть поставлен знак равенства, что следует из теоремы Дирихле.

Пример. Разложить в ряд Фурье периодическую (с периодом $T = 2\pi$) функцию $f(x)$, определенную равенствами:

$$f(x) = \begin{cases} C_1, -\pi < x < 0, \\ C_2, 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Решение. Начертим график заданной функции:



$f(x)$ является кусочно-гладкой на $(-\pi;\ \pi)$, периодической с

$T = 2l = 2\pi$. Ряд Фурье будет иметь вид: $\dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$;

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} C_1 dx + \int_{0}^{\pi} C_2 dx\right) = C_1 + C_2$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} C_1 \cos nx dx + \int_{0}^{\pi} C_2 \cos nx dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{C_1}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{C_2}{n}\sin nx\Big|_{0}^{\pi}\right) = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} C_1 \sin nx dx + \int_{0}^{\pi} C_2 \sin nx dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{C_1}{n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{0} - \frac{C_2}{n}\cos nx\Big|_{0}^{\pi}\right) = -\frac{1}{n\pi}\left(C_1 - C_1\cos n\pi + C_2\cos n\pi - C_2\right) =$$

$$= \frac{1}{n\pi}\left((C_2 - C_1) - (C_2 - C_1)(-1)^n\right) = \frac{C_2 - C_1}{n\pi}(1 - (-1)^n) .$$

Запишем ряд Фурье:

$$\frac{C_1+C_2}{2}+\frac{C_2-C_1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n}\sin nx=\begin{cases}C_1, -\pi<x<0\\ C_2, 0<x<\pi\\ \dfrac{C_1+C_2}{2}, x=0; \pm\pi\end{cases}$$

(сумма ряда записана в соответствии с теоремой Дирихле: в точках непрерывности $f(x)$ ряд Фурье сходится к $f(x)$, а в точках разрыва $f(x)$ – к среднему арифметическому односторонних пределов $f(x)$ в этих точках).

Пример. Разложить 2π – периодическую функцию $f(x)$, заданную на интервале $(-\pi; \pi)$ формулой $f(x)=\pi^2-x^2$, в ряд Фурье.

Решение. Функция $f(x)$ является четной. Следовательно, в ее разложении в ряд Фурье $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$ все коэффициенты $b_k = 0$. Вычислим коэффициенты a_k, $k = 0, 1, 2, ...$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\pi^2-x^2\right)dx = \frac{2}{\pi}\left(\pi^2 x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{4\pi^2}{3},\ a_k =$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\pi^2-x^2\right)\cos kxdx.$$

Воспользуемся таблицей неопределенных интегралов:

$$\int x^2\cos bxdx = \frac{2x\cos bx}{b^2} + \frac{b^2x^2-2}{b^3}\sin bx.$$

Отсюда

$$a_k = \frac{2}{\pi}\left(\left(\frac{\pi^2}{k}\sin kx\right)\Bigg|_0^{\pi} - \left(\frac{2x\cos kx}{k^2}+\frac{k^2x^2-2}{k^3}\sin kx\right)\Bigg|_0^{\pi}\right)=$$

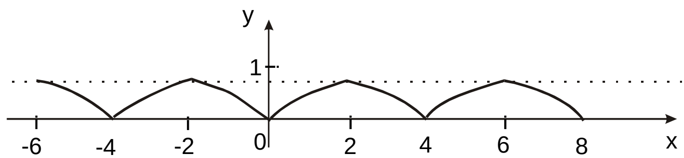
=(заметим, что $\sin k\pi = 0$, $\cos k\pi = (-1)^k$) =

$$= -\frac{2}{\pi}\frac{\cos k\pi}{k^2}\cdot 2\pi = (-1)^{k+1}\frac{4}{k^2} \quad (k\neq 0).$$

Ответ. $f(x) = \dfrac{2\pi^2}{3} + 4\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k+1}}{k^2}\cos kx.$

Пример. Разложить в ряд Фурье по косинусам $f(x)=\sin\dfrac{x}{2}$ на отрезке [0; 2].

Решение. Продолжим $f(x)$ четным образом на [–2; 0], а затем построим периодическое продолжение функции, заданной на [–2; 2] на всю ось Ox:



Получим непрерывную на $(-\infty;+\infty)$ функцию; l = 2.

Ряд Фурье имеет вид: $\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos\dfrac{n\pi x}{2}$;

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx = \frac{2}{2}\int_0^2 \sin\frac{x}{2}dx = 2\cos\frac{x}{2}\Big|_0^2 = 2(\cos 1 - 1);$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx = \frac{2}{2}\int_0^2 \sin\frac{x}{2}\cos\frac{n\pi x}{2}dx =$$

$$= \left(-\frac{\cos\frac{1+n\pi}{2}x}{2\cdot\frac{1+\pi n}{2}} - \frac{\cos\frac{1-\pi n}{2}x}{\frac{2(1-\pi n)}{2}}\right)\Bigg|_0^2 =$$

$$= -\frac{\cos(1+n\pi)}{1+n\pi} - \frac{\cos(1-n\pi)}{1-n\pi} + \frac{1}{1+n\pi} + \frac{1}{1-n\pi} =$$

$$= -\frac{\cos 1\cdot(-1)^n}{1+n\pi} - \frac{\cos 1\cdot(-1)^n}{1-n\pi} + \frac{1}{1+n\pi} + \frac{1}{1-n\pi} = \frac{2-2(-1)^n\cos 1}{1-n^2\pi^2}.$$

Ответ. Ряд Фурье:

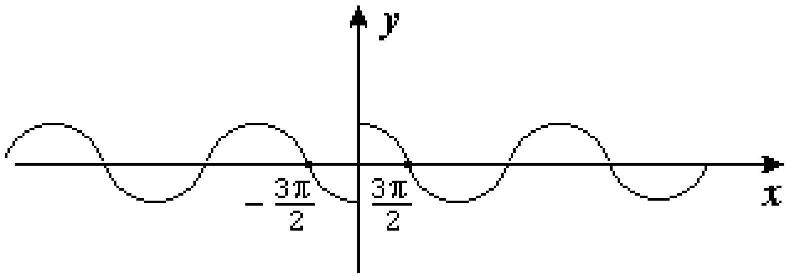
$$\cos 1 - 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n\cos 1}{1-n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2} = \sin\frac{x}{2},\ 0 \le x \le 2.$$

Пример. Разложить периодическую с периодом 6 функцию $f(x)$, заданную на интервале $(-3;\,3]$ формулой $f(x) = \operatorname{sign} x\cdot\cos\frac{x}{3}$, в ряд Фурье.

Решение. Произведение четной функции $\cos\frac{x}{3}$ на нечетную функцию

$$\operatorname{sign} x = (\text{ “знак переменной } x\text{” }) = \begin{cases} -1, & x<0, \\ 0, & x=0, \\ 1, & x>0 \end{cases}$$

является нечетной функцией.



.

Поэтому в ее представлении рядом Фурье $a_k = 0$ для всех k:

$$b_k = \frac{2}{3}\int_0^3 \cos\frac{x}{3}\cdot\sin\frac{\pi\cdot kx}{3}\,dx = \frac{1}{3}\int_0^3\left[\sin\left(\frac{\pi\cdot kx}{3}+\frac{x}{3}\right)+\sin\left(\frac{\pi\cdot kx}{3}-\frac{x}{3}\right)\right]dx =$$

$$= -\left[\frac{1}{\pi\cdot k+1}\cos\frac{(\pi k+1)x}{3} - \frac{1}{\pi\cdot k-1}\cos\frac{(\pi k-1)x}{3}\right]\Bigg|_0^3 =$$

$$=\frac{2\pi k}{\pi^2k^2-1}-\frac{2\pi k(-1)^k}{\pi^2k^2-1}\cos 1=\frac{2\pi k}{\pi^2k^2-1}(1-(-1)^k).$$

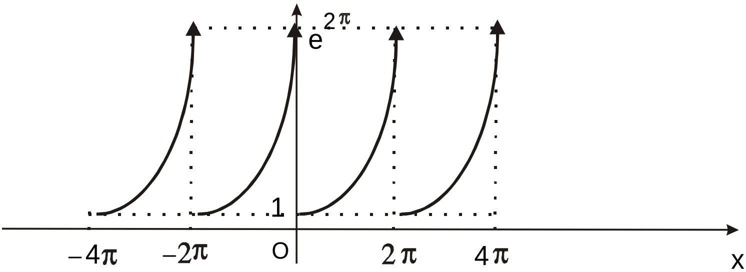
Окончательно получаем на интервале (–3; 3]:

$$\operatorname{sign} x\cdot\cos\frac{x}{3}=2\pi\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k(1-(-1)^k)}{\pi^2k^2-1}\cdot\sin\frac{\pi kx}{3}=4\pi\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-1)}{\pi^2(2k-1)^2-1}\sin\frac{\pi kx}{3}.$$

Ответ. $f(x) = 4\pi\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-1)}{\pi^2(2k-1)^2-1}\sin\frac{\pi kx}{3}$ на $(-\infty,\ \infty)$ в точках непрерывности функции.

Пример. Представить рядом Фурье в комплексной форме периодическую функцию $f(x)$ $(T=2\pi)$, определенную для $0\le x<2\pi$ равенством $f(x)=e^x$.

Решение. Построим график данной функции.



Функция является кусочно-гладкой на $[0;\ 2\pi]$, следовательно, ее можно разложить в ряд Фурье, который будет иметь вид: $\frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{\infty}c_ne^{inx}$.

$$c_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-inx}dx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi}f(x)e^{-inx}dx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi}e^xe^{-inx}dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi}e^{x(1-in)}dx=\frac{1}{\pi(1-in)}e^{x(1-in)}\Big|_0^{2\pi}=\frac{1}{\pi(1-in)}\left(e^{2\pi-i2\pi n}-1\right)=\frac{e^{2\pi}-1}{\pi(1-in)}.$$

Ряд Фурье: $\dfrac{e^{2\pi}-1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{\infty}\dfrac{1}{1-in}e^{inx}=\begin{cases} e^{x},\ 0<x<2\pi, \\ \dfrac{e^{2\pi}+1}{2},\ x=0;2\pi. \end{cases}$

Пример. Разложить периодическую с периодом $T=6$ функцию $f(x)$, равную $\cos\dfrac{x}{4}$ при $x\in(-3;3]$ в ряд Фурье в комплексной форме.

Решение. В комплексной форме ряд Фурье функции $f(x)$ периода T=2l имеет вид:

$$f(x)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}C_k\,e^{\frac{i\cdot\pi\cdot kx}{l}},\quad \text{где}\quad C_k=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(x)\,e^{-\frac{i\cdot\pi\cdot xk}{l}}dx.$$

Используя формулу $\cos\dfrac{x}{4}=\dfrac{e^{ix/4}+e^{-ix/4}}{2}$, вычислим

$$C_k=\frac{1}{6}\int_{-3}^{3}\frac{e^{\frac{ix}{4}}+e^{-\frac{ix}{4}}}{2}\cdot e^{\frac{-i\cdot\pi\cdot kx}{3}}dx=\frac{1}{12}\left[\frac{e^{ix(\frac{1}{4}-\frac{k\cdot\pi}{3})}}{i(\frac{1}{4}-\frac{k\cdot\pi}{3})}-\frac{e^{-ix(\frac{1}{4}+\frac{k\cdot\pi}{3})}}{i(\frac{i}{4}+\frac{k\cdot\pi}{3})}\right]\Bigg|_{-3}^{3}=$$

= (подставляем пределы интегрирования, используем формулу $\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}=\sin x$, приводим комплексные выражения к алгебраической форме) $=\dfrac{(-1)^k 12\sin\frac{3}{4}}{9-16k^2\pi^2}$.

Ответ. $f(x)=12\sin\dfrac{3}{4}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{k+1}}{16k^2\pi^2-9}e^{\frac{ik\pi x}{3}}$ в точках непрерывности функции.

Задачи для самостоятельного решения

1. Разложить в ряд Фурье на $(0;2\pi)$ функцию: $f(x)=\dfrac{\pi-x}{2}$.

2. Разложить в ряд Фурье периодическую $(T = 2\pi)$ функцию $f(x)$, определенную на $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ равенствами

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}. \end{cases}$$

3. Разложить в ряд Фурье на $(-\pi, \pi)$ $f(x) = x\cos x$.

4. Разложить в интервале $(0;\pi)$ по синусам $f(x) = \frac{\pi}{4}$. Полученное разложение использовать для суммирования числовых рядов:

а) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$;

б) $1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \ldots$

5. Дана функция $f(x) = x^2$. Разложить ее в ряд Фурье: а) в $(-\pi;\ \pi)$; б) в $(0;\ 2\pi)$; в) в $(0;\ \pi)$ по синусам, г) в интервале $(0;\ \pi)$ так, чтобы сумма ряда тождественно равнялась нулю для всех $x \in (-\pi;\ 0)$.

6. Разложить в ряд Фурье $f(x) = |x|$ на [-1;1].

7. Разложить в ряд Фурье $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1 \\ 1, & 1 < x < 2 \\ 3 - x, & 2 \le x \le 3 \end{cases}$ на [0; 3].

8. Разложить в ряд Фурье по косинусам $f(x) = \sin\frac{x}{2}$ на [0; 2].

9. Доказать справедливость равенства

$$|\cos x| = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2 - 1}\cos 2nx.$$

10. Представить рядом Фурье в комплексной форме периодическую функцию $f(x)$ $(T = 2\pi)$, определенную для $0 \le x \le 2\pi$ равенством $f(x)=e^x$. Воспользовавшись полученным рядом Фурье в комплексной форме, записать в действительной форме ряд Фурье этой функции.

11. Разложить в ряд Фурье $f(x)$ (с периодом 2π) в комплексной форме: $f(x)=\begin{cases}0, -\pi<x<0,\\ e^{-x}, 0<x<\pi.\end{cases}$

12. Разложить в ряд Фурье $f(x)=\operatorname{ch}x$ на $[-\pi;\pi]$.

13. Разложить в ряд Фурье $f(x)=\operatorname{sh}x$ на $(-\pi;\pi)$.

Индивидуальное задание №1

Дифференциальные уравнения

Задача 1. Найти общий интеграл дифференциального уравнения. Ответ представить в виде $\psi(x, y) = C$.

1. $4xdx - 3ydy = 3x^2ydy - 2xy^2dx.$

2. $x\sqrt{1+y^2} + yy'\sqrt{1+x^2} = 0.$

3. $\sqrt{4+y^2}dx - ydy = x^2ydy.$

4. $\sqrt{3+y^2}dx - ydy = x^2ydy.$

5. $6xdx - 6ydy = 2x^2ydy - 3xy^2dx.$

6. $x\sqrt{3+y^2}dx + y\sqrt{2+x^2}dy = 0.$

7. $(e^{2x} + 5)dy + ye^{2x}dx = 0.$

8. $yy'\sqrt{\dfrac{1-x^2}{1-y^2}} + 1 = 0.$

9. $6xdx - 6ydy = 3x^2ydy - 2xy^2dx.$

10. $x\sqrt{5+y^2}dx + y\sqrt{4+x^2}dy = 0.$

11. $y(4+e^x)dy - e^xdx = 0.$

12. $\sqrt{4-x^2}y' + xy^2 + x = 0.$

13. $2xdx - 2ydy = x^2ydy - 2xy^2dx.$

14. $x\sqrt{4+y^2}dx + y\sqrt{1+x^2}dy = 0.$

15. $y(8+e^x)dy - ye^xdx = 0.$

16. $\sqrt{5+y^2} + yy'\sqrt{1-x^2} = 0.$

17. $6xdx - ydy = x^2ydy - 3xy^2dx.$

18. $y\ln y + xy' = 0.$

19. $6xdx - ydy = x^2ydy - 3xy^2dx.$

20. $\sqrt{1-x^2}y' + xy^2 + x = 0.$

21. $6xdx - 2ydy = 2x^2ydy - 3xy^2dx.$

22. $y(1+\ln y) + xy' = 0.$

23. $(8+e^x)yy' = e^x.$

24. $\sqrt{3+y^2} + yy'\sqrt{1-x^2} = 0.$

25. $xdx - ydy = x^2ydy - xy^2dx.$

26. $\sqrt{5+y^2}dx + 4(x^2y + y)dy = 0.$

27. $(1+e^x)yy' = e^x.$

28. $\sqrt{2+y^2}dx + 3(x^2y + y)dy = 0.$

29. $\sqrt{2-x^2}y' + 2xy^2 + 2x = 0.$

30. $20xdx - 3ydy = 3x^2ydy - 5xy^2dx.$

31. $20xdx - 3ydy = 3x^2ydy - 5xy^2dx.$

Задача 2. Найти общий интеграл дифференциального уравнения.

1. $y' = \frac{y^2}{x^2} + 4\frac{y}{x} + 2.$

2. $xy' = \frac{3y^3 + 2yx^2}{2y^2 + x^2}.$

3. $y' = \frac{x+y}{x-y}.$

4. $xy' = \sqrt{y^2 + x^2} + y.$

5. $2y' = \frac{y^2}{x^2} + 6\frac{y}{x} + 3.$

6. $xy' = \frac{3y^3 + 4yx^2}{2y^2 + 2x^2}.$

7. $y' = \frac{x+2y}{2x-y}.$

8. $xy' = 2\sqrt{y^2 + x^2} + y.$

9. $3y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 4.$

10. $xy' = \frac{3y^3 + 6yx^2}{2y^2 + 3x^2}.$

11. $y' = \frac{x^2 + xy - y^2}{x^2 - 2xy}.$

12. $xy' = 2\sqrt{y^2 + 2x^2} + y.$

13. $y' = \frac{y^2}{x^2} + 6\frac{y}{x} + 6.$

14. $xy' = \frac{3y^3 + 8yx^2}{2y^2 + 4x^2}.$

15. $y' = \frac{x^2 + 2xy - y^2}{2x^2 - 2xy}.$

16. $xy' = 3\sqrt{y^2 + x^2} + y.$

17. $2y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 8.$

18. $xy' = \frac{3y^3 + 10yx^2}{2y^2 + 5x^2}.$

19. $y' = \frac{x^2 + 3xy - y^2}{3x^2 - 2xy}.$

20. $xy' = 3\sqrt{y^2 + 2x^2} + y.$

21. $y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 12.$

22. $xy' = \frac{3y^3 + 12yx^2}{2y^2 + 6x^2}.$

23. $y' = \frac{x^2 + xy - 3y^2}{x^2 - 4xy}.$

24. $xy' = 2\sqrt{y^2 + 3x^2} + y.$

25. $y' = \frac{y^2}{x^2} + 10\frac{y}{x} + 5.$

26. $xy' = \frac{3y^3 + 14yx^2}{2y^2 + 7x^2}.$

27. $y' = \frac{x^2 + xy - 5y^2}{x^2 - 6xy}.$

28. $xy' = 4\sqrt{y^2 + x^2} + y.$

29. $y' = \frac{y^2}{x^2} + 10\frac{y}{x} + 10.$

30. $xy' = 4\sqrt{y^2 + 2x^2} + y.$

31. $y' = \frac{x^2 + xy - 5y^2}{2x^2 - 6xy}.$

Задача 3. Найти общий интеграл дифференциального уравнения.

1. $y' = \frac{x + 2y - 3}{2x - 2}.$

2. $y' = \frac{x + y - 2}{2x - 2}.$

3. $y' = \frac{3y - x - 4}{3x + 3}.$

4. $y' = \frac{2y - 2}{x + y - 2}.$

5. $y' = \frac{x + y - 2}{3x - y - 2}.$

6. $y' = \frac{2x + y - 3}{x - 1}.$

7. $y' = \frac{x + 7y - 8}{9x - y - 8}.$

8. $y' = \frac{x + 3y + 4}{3x - 6}.$

9. $y' = \frac{3y + 3}{2x + y - 1}.$

10. $y' = \frac{x + 2y - 3}{4x - y - 3}.$

11. $y' = \frac{x - 2y + 3}{-2x - 2}.$

12. $y' = \frac{x + 8y - 9}{10x - y - 9}.$

13. $y' = \frac{2x + 3y - 5}{5x - 5}.$

14. $y' = \frac{4y - 8}{3x + 2y - 7}.$

15. $y' = \frac{x + 3y - 4}{5x - y - 4}.$

16. $y' = \frac{y - 2x + 3}{x - 1}.$

17. $y' = \dfrac{x+2y-3}{x-1}.$

18. $y' = \dfrac{3x+2y-1}{x+1}.$

19. $y' = \dfrac{5y+5}{4x+3y-1}.$

20. $y' = \dfrac{x+4y-5}{6x-y-5}.$

21. $y' = \dfrac{x+y+2}{x+1}.$

22. $y' = \dfrac{2x+y-3}{4x-4}.$

23. $y' = \dfrac{2x+y-3}{2x-2}.$

24. $y' = \dfrac{y}{2x+2y-2}.$

25. $y' = \dfrac{x+5y-6}{7x-y-6}.$

26. $y' = \dfrac{x+y-4}{x-2}.$

27. $y' = \dfrac{2x+y-1}{2x-2}.$

28. $y' = \dfrac{3y-2x+1}{3x+3}.$

29. $y' = \dfrac{6y-6}{5x+4y-9}.$

30. $y' = \dfrac{x+6y-7}{8x-y-7}.$

31. $y' = \dfrac{y+2}{2x+y-4}.$

Задача 4. Найти решение задачи Коши

1. $y' - \dfrac{y}{x} = x^2, \quad y(1) = 0.$

2. $y' - y\operatorname{ctg} x = 2x\sin x, \quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0.$

3. $y' + y\cos x = \dfrac{1}{2}\sin 2x, \quad y(0) = 0.$

4. $y' - y\operatorname{tg} x = \cos^2 x, \quad y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{2}.$

5. $y' - \dfrac{y}{x+2} = x^2 + 2x, \quad y(-1) = \dfrac{3}{2}.$

6. $y' - \dfrac{1}{x+1}y = e^x(x+1), \quad y(0) = 1.$

7. $y' - \dfrac{y}{x} = x\sin x, \quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1.$

8. $y' + \dfrac{y}{x} = \sin x, \quad y(\pi) = \dfrac{1}{\pi}.$

9. $y' - \dfrac{y}{2x} = x^2, \quad y(1) = 1.$

10. $y' - \dfrac{2x}{1+x^2}y = \dfrac{2x^2}{1+x^2}, \quad y(0) = \dfrac{2}{3}.$

11. $y' - \frac{2x-5}{x^2}y = 5, \quad y(2) = 4.$

12. $y' + \frac{y}{x} = \frac{x+11}{x}e^x, \quad y(1) = e.$

13. $y' - \frac{y}{x} = \frac{-2\ln x}{x}, \quad y(1) = 1.$

14. $y' - \frac{y}{x} = -\frac{12}{x^3}, \quad y(1) = 4.$

15. $y' - \frac{2y}{x} = x^3, \quad y(1) = -\frac{5}{6}.$

16. $y' + \frac{y}{x} = 3x, \quad y(1) = 1.$

17. $y' - \frac{2xy}{1+x^2} = 1 + x^2, \quad y(1) = 3.$

18. $y' + \frac{1-2x}{x^2}y = 1, \quad y(1) = 1.$

19. $y' + \frac{3y}{x} = \frac{2}{x^3}, \quad y(1) = 1.$

20. $y' + 2xy = -2x^3, \quad y(1) = e^{-1}.$

21. $y' + \frac{xy}{2(1-x^2)} = \frac{x}{2}, \quad y(0) = 1.$

22. $y' + xy = -x^3, \quad y(0) = 3.$

23. $y' - \frac{2}{x+1}y = e^x(x+1)^2, \quad y(0) = 1.$

24. $y' + 2xy = xe^{-x^2}\sin x, \quad y(0) = 1.$

25. $y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3, \quad y(0) = \frac{1}{2}.$

26. $y' - y\cos x = -\sin 2x, \quad y(0) = 3.$

27. $y' - 4xy = -4x^3, \quad y(0) = -\frac{1}{2}.$

28. $y' - \frac{y}{x} = \frac{-\ln x}{x}, \quad y(1) = 1.$

29. $y' - 3x^2y = \frac{x^2(1+x^3)}{3}, \quad y(0) = 0.$

30. $y' - y\cos x = \sin 2x, \quad y(0) = -1.$

31. $y' - \frac{y}{x} = -\frac{2}{x^2}, \quad y(1) = 1.$

Задача 5. Решить задачу Коши.

1. $y^2dx + (x + e^{\frac{2}{y}})dy = 0, \quad y(e) = 2.$

2. $(y^4e^y + 2x)y' = y, \quad y(0) = 1.$

3. $y^2dx + (xy - 1)dy = 0, \quad y(1) = e.$

4. $2(4y^2 + 4y - x)y' = 1, \quad y(0) = 0.$

5. $(\cos 2y\cos^2 y - x)y' = \sin y\cos y, \quad y\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{3}.$

6. $(x\cos^2 y - y^2)y' = y\cos^2 y, \quad y(\pi) = \frac{\pi}{4}.$

7. $e^{y^2}(dx - 2xydy) = ydy, \quad y(0) = 0.$

8. $(104y^3 - x)y' = 4y, \quad y(8) = 1.$

9. $dx + (xy - y^3)dy = 0, \quad y(-1) = 0.$

10. $(3y\cos 2y - 2y^2\sin 2y - 2x)y' = y, \quad y(16) = \frac{\pi}{4}.$

11. $8(4y^3 + xy - y)y' = 1, \quad y(0) = 0.$

12. $(2\ln y - \ln^2 y)dy = ydx - xdy.$

13. $2(x + y^4)y' = y, \quad y(-2) = -1.$

14. $y^3(y-1)dx + 3xy^2(y-1)dy = (y+2)dy, \quad y\left(\frac{1}{4}\right) = 2.$

15. $2y^2dx + x(1 + e^{\frac{1}{y}})dy = 0, \quad y(e) = 1.$

16. $(xy + \sqrt{y})dy + y^2dx = 0, \quad y\left(-\frac{1}{2}\right) = 4.$

17. $\sin 2ydx = (\sin^2 2y - 2\sin^2 y + 2x)dy, \quad y\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{4}.$

18. $(y^2 + 2y - x)y' = 1, \quad y(2) = 0.$

19. $2y\sqrt{y}dx - (6x\sqrt{y} + 7)dy = 0, \quad y(-4) = 1.$

20. $dx = (\sin y + 3\cos y + 3x)dy, \quad y(e^{\frac{\pi}{2}}) = \frac{\pi}{2}.$

21. $2(\cos^2 y\cos 2y - x)y' = \sin 2y, \quad y\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{5\pi}{4}.$

22. $\operatorname{ch} ydx = (1 + \operatorname{sh} y)dy, \quad y(1) = \ln 2.$

23. $(13y^3 - x)y' = 4y, \quad y(5) = 1.$

24. $y^2(y^2+4)dx + 2xy(y^2+4)dy = 2dy, \quad y\left(\frac{\pi}{8}\right) = 2.$

25. $(x + \ln^2 y - \ln y)y' = \frac{y}{2}, \quad y(2) = 1.$

26. $(2xy + \sqrt{y})dy + 2y^2dx = 0, \quad y\left(-\frac{1}{2}\right) = 1.$

27. $ydx + (2x - 2\sin^2 y - y\sin 2y)dy = 0, \quad y\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\pi}{4}.$

28. $2(y^3 - y + xy)dy = dx, \quad y(-2) = 0.$

29. $(2y + x\,\mathrm{tg}\,y - y^2\,\mathrm{tg}\,y)dy = dx, \quad y(0) = \pi.$

30. $4y^2dx + (e^{\frac{1}{2y}} + x)dy = 0, \quad y(e) = \frac{1}{2}.$

31. $dx + (2x + \sin 2y - 2\cos^2 y)dy = 0, \quad y(-1) = 0.$

Задача 6. Найти решение задачи Коши.

1. $y' + xy = (1+x)e^{-x}y^2, \quad y(0) = 1.$

2. $xy' + y = 2y^2\ln x, \quad y(1) = \frac{1}{2}.$

3. $2(xy' + y) = xy^2, \quad y(1) = 2.$

4. $y' + 4x^3y = 4(1+x^3)e^{-4x}y^2, \quad y(0) = 1.$

5. $xy' - y = -y^2(\ln x + 2)\ln x, \quad y(1) = 1.$

6. $2(y' + xy) = (1+x)e^{-x}y^2, \quad y(0) = 2.$

7. $3(xy' + y) = y^2\ln x, \quad y(1) = 3.$

8. $2y' + y\cos x = y^{-1}\cos x(1+\sin x), \quad y(0) = 1.$

9. $y' + 4x^3y = 4(1-x^3)e^{4x}y^2, \quad y(0) = -1.$

10. $3y' + 2xy = 2xe^{-2x^2} y^{-2}, \quad y(0) = -1.$

11. $2xy' - 3y = -(5x^2 + 3)y^3, \quad y(1) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}.$

12. $3xy' + 5y = (4x - 5)y^4, \quad y(1) = 1.$

13. $2y' + 3y\cos x = e^{2x}(2 + 3\cos x)y^{-1}, \quad y(0) = 1.$

14. $3(xy' + y) = xy^2, \quad y(1) = 3.$

15. $y' - y = 2xy^2, \quad y(0) = \dfrac{1}{2}.$

16. $2xy' - 3y = -(20x^2 + 12)y^3, \quad y(1) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}.$

17. $y' + 2xy = 2x^3 y^3, \quad y(0) = \sqrt{2}.$

18. $xy' + y = y^2 \ln x, \quad y(1) = 1.$

19. $2y' + 3y\cos x = e^{2x}(8 + 12\cos x)y^{-1}, \quad y(0) = 1.$

20. $4y' + x^3 y = (x^3 + 8)e^{-2x} y^2, \quad y(0) = 1.$

21. $8xy' - 12y = -(5x^2 + 3)y^3, \quad y(1) = \sqrt{2}.$

22. $2(y' + y) = xy^2, \quad y(0) = 2.$

23. $y' + xy = (x - 1)e^x y^2, \quad y(0) = 1.$

24. $2y' - 3y\cos x = -e^{-2x}(2 + 3\cos x)y^{-1}, \quad y(0) = 1.$

25. $y' - y = xy^2, \quad y(0) = 1.$

26. $2(xy' + y) = y^2 \ln x, \quad y(1) = 2.$

27. $y' + y = xy^2, \quad y(0) = 1.$

28. $y' + 2y \operatorname{cth} x = y^2 \operatorname{ch} x, \quad y(1) = \dfrac{1}{\operatorname{sh} 1}.$

29. $2(y' + xy) = (x - 1)e^x y^2, \quad y(0) = 2.$

30. $y' - y \operatorname{tg} x = -\dfrac{2}{3} y^4 \sin x, \quad y(0) = 1.$

31. $y' + y = xy^2, \quad y(1) = 1.$

Задача 7. Найти общее решение дифференциального уравнения.

1. $y''' x \ln x = y''.$

2. $xy''' + y'' = 1.$

3. $2xy''' = y''.$

4. $xy''' + y'' = x + 1.$

5. $y'' \operatorname{tg} x - y' + \dfrac{1}{\sin x} = 0.$

6. $x^2 y'' + xy' = 1.$

7. $y''' \operatorname{ctg} 2x + 2y'' = 0.$

8. $x^3 y''' + x^2 y'' = 1.$

9. $y''' \operatorname{tg} 2x = 2y''.$

10. $y''' \operatorname{cth} 2x = y''.$

11. $x^4 y'' + x^3 y' = 1.$

12. $xy''' + 2y'' = 0.$

13. $(1 + x^2) y'' + 2xy' = x^3.$

14. $x^5 y'' + x^4 y' = 1.$

15. $xy''' - y'' + \dfrac{11}{x} = 0.$

16. $xy''' + y'' + x = 0.$

17. $y^{(4)} \operatorname{th} x = y'''.$

18. $xy''' + y'' = \sqrt{x}.$

19. $y''' \operatorname{tg} x = y'' + 1.$

20. $y''' \operatorname{tg} 5x = 5y''.$

21. $y''' \operatorname{th} 7x = 7y''.$

22. $x^3 y'' + x^2 y' = \sqrt{x}.$

23. $y'' \operatorname{cth} 2x - y' + \dfrac{1}{\operatorname{ch} x} = 0.$

24. $(x + 1) y''' + y'' = x + 1.$

25. $(1 + \sin x) y''' = y'' \cos x.$

26. $xy''' + y'' = \dfrac{1}{\sqrt{x}}.$

27. $-xy''' + 2y'' = \dfrac{1}{x^2}.$

28. $y'' \operatorname{cth} 2x + y' = \operatorname{ch} x.$

29. $x^4 y'' + x^3 y' = 4.$

30. $y'' + \dfrac{2x}{x^2 + 1} y' = 2x.$

31. $(1 + x^2) y'' + 2xy' = 12x^3.$

Задача 8. Найти решение задачи Коши.

1. $4y^3y'' = y^4 - 1, \quad y(0) = \sqrt{2}, \quad y'(0) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}.$

2. $y'' = 128y^3, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 8.$

3. $y^3y'' + 64 = 0, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = 2.$

4. $y'' + 2\sin y\cos^3 y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$

5. $y'' = 32\sin^3 y\cos y, \quad y(1) = \dfrac{\pi}{2}, \quad y'(1) = 4.$

6. $y'' = 98y^3, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 7.$

7. $y^3y'' + 49 = 0, \quad y(3) = -7, \quad y'(3) = -1.$

8. $4y^3y'' = 16y^4 - 1, \quad y(0) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \quad y'(0) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}.$

9. $y'' + 8\sin y\cos^3 y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2.$

10. $y'' = 72y^3, \quad y(2) = 1, \quad y'(2) = 6.$

11. $y^3y'' + 36 = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 2.$

12. $y'' = 18\sin^3 y\cos y, \quad y(1) = \dfrac{\pi}{2}, \quad y'(1) = 3.$

13. $4y^3y'' = y^4 - 16, \quad y(0) = 2\sqrt{2}, \quad y'(0) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}.$

14. $y'' = 50y^3, \quad y(3) = 1, \quad y'(3) = 5.$

15. $y^3y'' + 25 = 0, \quad y(2) = -5, \quad y'(2) = -1.$

16. $y'' + 18\sin y\cos^3 y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 3.$

17. $y'' = 8\sin^3 y\cos y, \quad y(1) = \dfrac{\pi}{2}, \quad y'(1) = 2.$

18. $y'' = 32y^3, \quad y(4) = 1, \quad y'(4) = 4.$

19. $y^3 y'' + 16 = 0, \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = 2.$

20. $y'' + 32 \sin y \cos^3 y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 4.$

21. $y'' = 50 \sin^3 y \cos y, \quad y(1) = \dfrac{\pi}{2}, \quad y'(1) = 5.$

22. $y'' = 18 y^3, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 3.$

23. $y^3 y'' + 9 = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 3.$

24. $y^3 y'' = 4(y^4 - 1), \quad y(0) = \sqrt{2}, \quad y'(0) = \sqrt{2}.$

25. $y'' + 50 \sin y \cos^3 y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 5.$

26. $y'' = 8 y^3, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$

27. $y^3 y'' + 4 = 0, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = -2.$

28. $y'' = 2 \sin^3 y \cos y, \quad y(1) = \dfrac{\pi}{2}, \quad y'(1) = 1.$

29. $y^3 y'' = y^4 - 16, \quad y(0) = 2\sqrt{2}, \quad y'(0) = \sqrt{2}.$

30. $y'' = 2 y^3, \quad y(-1) = 1, \quad y'(-1) = 1.$

31. $y^3 y'' + 1 = 0, \quad y(1) = -1, \quad y'(1) = -1.$

Задача 9. Найти общее решение дифференциального уравнения.

1. $y''' + 3y'' + 2y' = 1 - x^2.$

2. $y''' - y'' = 6x^2 + 3x.$

3. $y''' - y' = x^2 + x.$

4. $y^{(4)} - 3y''' + 3y'' - y' = 2x.$

5. $y^{(4)} - y''' = 5(x+2)^2.$

6. $y^{(4)} - 2y''' + y'' = 2x(1-x).$

7. $y^{(4)} + 2y''' + y'' = x^2 + x - 1.$

8. $y^{(5)} - y^{(4)} = 2x + 3.$

9. $3y^{(4)} + y''' = 6x - 1.$

10. $y^{(4)} + 2y''' + y'' = 4x^2.$

11. $y''' + y'' = 5x^2 - 1.$

12. $y^{(4)} + 4y''' + 4y'' = x - x^2.$

13. $7y''' - y'' = 12x.$ **14.** $y''' + 3y'' + 2y' = 3x^2 + 2x.$

15. $y''' - y' = 3x^2 - 2x + 1.$ **16.** $y''' - y'' = 4x^2 - 3x + 2.$

17. $y^{(4)} - 3y''' + 3y'' - y' = x - 3.$ **18.** $y^{(4)} + 2y''' + y'' = 12x^2 - 6x.$

19. $y''' - 4y'' = 32 - 384x^2.$ **20.** $y^{(4)} + 2y''' + y'' = 2 - 3x^2.$

21. $y''' + y'' = 49 - 24x^2.$ **22.** $y''' - 2y'' = 3x^2 + x - 4.$

23. $y''' - 13y'' + 12y' = x - 1.$ **24.** $y^{(4)} + y''' = x.$

25. $y''' - y'' = 6x + 5.$ **26.** $y''' + 3y'' + 2y' = x^2 + 2x + 3.$

27. $y''' - 5y'' + 6y' = (x-1)^2.$ **28.** $y^{(4)} - 6y''' + 9y'' = 3x - 1.$

29. $y''' - 13y'' + 12y' = 18x^2 - 39.$ **30.** $y^{(4)} + y''' = 12x + 6.$

31. $y''' - 5y'' + 6y' = 6x^2 + 2x - 5.$

Задача 10. Найти общее решение дифференциального уравнения.

1. $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = (16 - 2x)e^{-x}.$ **2.** $y''' - 3y'' + 2y' = (1 - 2x)e^{x}.$

3. $y''' - y'' - y' + y = (3x + 7)e^{2x}.$ **4.** $y''' - 2y'' + y' = (2x + 5)e^{2x}.$

5. $y''' - 3y'' + 4y = (18x - 21)e^{-x}.$ **6.** $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = (2x - 5)e^{x}.$

7. $y''' - 4y'' + 4y' = (x - 1)e^{x}.$ **8.** $y''' + 2y'' + y' = (18x + 21)e^{2x}.$

9. $y''' + y'' - y' - y = (8 + 4x)e^{x}.$ **10.** $y''' - 3y'' + 2y = -4xe^{x}.$

11. $y''' - 3y'' + 2y = (4x + 9)e^{2x}.$ **12.** $y''' + 4y'' + 5y' + 2y = (12x + 16)e^{x}.$

13. $y''' - y'' - 2y' = (6x - 11)e^{-x}.$ **14.** $y''' + y'' - 2y' = (6x + 5)e^{x}.$

15. $y''' + 4y'' + 4y' = (9x + 15)e^{x}.$ **16.** $y''' - 3y'' - y' + 3y = (4 - 8x)e^{x}.$

17. $y''' - y'' - 4y' + 4y = (7 - 6x)e^{x}.$ **18.** $y''' + 3y'' + 2y' = (1 - 2x)e^{x}.$

19. $y''' - 5y'' + 7y' - 3y = (20 - 16x)e^{-x}.$ **20.** $y''' - 4y'' + 3y' = -4xe^{x}.$

21. $y''' - 5y'' + 3y' + 9y = (32x - 32)e^x$. **22.** $y''' - 6y'' + 9y' = 4xe^x$.

23. $y''' - 7y'' + 15y' - 9y = (8x - 12)e^x$. **24.** $y''' - y'' - 5y' - 3y = -(8x + 4)e^x$.

25. $y''' + 5y'' + 7y' + 3y = (16x + 20)e^x$. **26.** $y''' - 2y'' - 3y' = (8x - 14)e^{-x}$.

27. $y''' + 2y'' - 3y' = (8x + 6)e^x$. **28.** $y''' + 6y'' + 9y' = (16x + 24)e^x$.

29. $y''' - y'' - 9y' + 9y = (12 - 16x)e^x$. **30.** $y''' + 4y'' + 3y' = 4(1 - x)e^{-x}$.

31. $y''' + y'' - 6y' = (20x + 14)e^{2x}$.

Задача 11. Найти общее решение дифференциального уравнения.

1. $y'' + 2y' = 4e^x(\sin x + \cos x)$. **2.** $y'' - 4y' + 4y = -2e^{2x}\sin x$.

3. $y'' + 2y' = -2e^x(\sin x + \cos x)$. **4.** $y'' + y = 3\sin 7x + 2\cos 7x$.

5. $y'' + 2y' + 5y = -\sin 2x$. **6.** $y'' + 4y' + 8y = e^x(5\sin x - 3\cos x)$.

7. $y'' + 2y' = e^x(\sin x + \cos x)$. **8.** $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}\sin 3x$.

9. $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x}\cos 4x$. **10.** $y'' + y = -3\sin 3x + 2\cos 3x$.

11. $y'' + 2y' + 5y = -2\sin x$. **12.** $y'' - 4y' + 8y = e^x(-3\sin x + 4\cos x)$.

13. $y'' + 2y' = 10e^x(\sin x + \cos x)$. **14.** $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}\sin 5x$.

15. $y'' + y = 3\sin 5x + 2\cos 5x$. **16.** $y'' + 2y' + 5y = 17\sin 2x$.

17. $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x}\cos x$. **18.** $y'' - 4y' + 8y = e^x(3\sin x + 5\cos x)$.

19. $y'' + 2y' = 6e^x(\sin x + \cos x)$. **20.** $y'' - 4y' + 4y = -e^{2x}\sin 4x$.

21. $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x}\cos 5x$. **22.** $y'' + y = -3\sin 7x + 2\cos 7x$.

23. $y'' + 2y' + 5y = -2\cos x$. **24.** $y'' - 4y' + 8y = e^x(2\sin x - \cos x)$.

25. $y'' + 2y' = 3e^x(\sin x + \cos x)$. **26.** $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}\sin 4x$.

27. $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x}\cos 8x.$ **28.** $y'' + 2y' + 5y = 10\cos x.$

29. $y'' + y = 3\sin 4x + 2\cos 4x.$ **30.** $y'' - 4y' + 8y = e^{x}(-\sin x + 2\cos x).$

31. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}\sin 6x.$

Задача 12. Найти общее решение дифференциального уравнения.

1. $y'' - 2y' = \operatorname{ch} 2x.$

2. $y'' + y = 2e^{x} + 2\sin x - 6\cos x.$

3. $y''' - y' = 2e^{x} + \cos x.$

4. $y'' - 3y' = 2\operatorname{ch} 3x.$

5. $y'' + 4y = 4e^{2x} - 8\sin 2x + 32\cos 2x.$

6. $y''' - y' = 4e^{x} + 10\sin x + 6\cos x.$

7. $y'' - 4y' = 16\operatorname{ch} 4x.$

8. $y'' + 9y = 18e^{3x} - 18\sin 3x.$

9. $y''' - 4y' = 24e^{2x} + 8\sin 2x - 4\cos 2x.$

10. $y'' - 5y' = 50\operatorname{ch} 5x.$

11. $y'' + 16y = -16e^{4x} + 16\cos 4x.$

12. $y''' - 9y' = -9e^{3x} + 18\sin 3x - 9\cos 3x.$

13. $y'' - y' = 2\operatorname{ch} x.$

14. $y'' + 25y = 50e^{5x} - 10\sin 5x + 20\cos 5x.$

15. $y''' - 16y' = 48e^{4x} - 64\sin 4x + 64\cos 4x.$

16. $y'' + 2y' = 2\operatorname{sh} 2x.$

17. $y'' + 36y = 36e^{6x} + 24\sin 6x - 12\cos 6x.$

18. $y''' - 25y' = -50e^{5x} + 25(\sin 5x + \cos 5x).$

19. $y'' + 3y' = 2\operatorname{sh} 3x.$

20. $y'' + 49y = -98e^{7x} + 14\sin 7x + 7\cos 7x.$

21. $y'' - 36y' = 36e^{6x} - 72(\sin 6x + \cos 6x).$

22. $y'' + 4y' = 16\operatorname{sh} 4x.$

23. $y'' + 64y = -64e^{8x} + 16\sin 8x - 16\cos 8x.$

24. $y'' - 49y' = 14e^{7x} - 49(\sin 7x + \cos 7x).$

25. $y'' + 5y' = 50\operatorname{sh} 5x.$

26. $y'' + 81y = 162e^{9x} + 9\sin 9x + 3\cos 9x.$

27. $y''' - 64y' = -64e^{8x} + 128\cos 8x.$

28. $y'' + y' = 2\operatorname{sh} x.$

29. $y'' + 100y = -200e^{10x} + 20\sin 10x - 30\cos 10x.$

30. $y''' - 81y' = 162e^{9x} + 81\sin 9x.$

31. $y''' - 100y' = 20e^{10x} + 100\cos 10x.$

Задача 13. Найти решение задачи Коши.

1. $y'' + \pi^2 y' = \dfrac{\pi^2}{\cos \pi x}, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 0.$

2. $y'' + 3y' = \dfrac{9e^{3x}}{1 + e^{3x}}, \quad y(0) = \ln 4, \quad y'(0) = 3(1 - \ln 2).$

3. $y'' + 4y = 8\operatorname{ctg} 2x, \quad y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 5, \quad y'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 4.$

4. $y'' - 6y' + 8y = \dfrac{4}{1 + e^{-2x}}, \quad y(0) = 1 + 2\ln 2, \quad y'(0) = 6\ln 2.$

5. $y'' - 9y' + 18y = \dfrac{9e^{3x}}{1 + e^{-3x}}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$

6. $y'' + \pi^2 y = \dfrac{\pi^2}{\sin \pi x}$, $y\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1$, $y'\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\pi^2}{2}$.

7. $y'' + \dfrac{y}{\pi^2} = \dfrac{1}{\pi^2 \cos\left(\dfrac{x}{\pi}\right)}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$.

8. $y'' - 3y' = \dfrac{9e^{-3x}}{3 + e^{-3x}}$, $y(0) = 4\ln 4$, $y'(0) = 3(3\ln 4 - 1)$.

9. $y'' + y = 4\operatorname{ctg} x$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 4$, $y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 4$.

10. $y'' - 6y' + 8y = \dfrac{4}{2 + e^{-2x}}$, $y(0) = 1 + 3\ln 3$, $y'(0) = 10\ln 3$.

11. $y'' + 6y' + 8y = \dfrac{4e^{-2x}}{2 + e^{2x}}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

12. $y'' + 9y = \dfrac{9}{\sin 3x}$, $y\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 4$, $y'\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{3\pi}{2}$.

13. $y'' + 9y = \dfrac{9}{\cos 3x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

14. $y'' - y' = \dfrac{e^{-x}}{2 + e^{-x}}$, $y(0) = \ln 27$, $y'(0) = \ln 9 - 1$.

15. $y'' + 4y = 4\operatorname{ctg} 2x$, $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 3$, $y'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 2$.

16. $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{1}{3 + e^{-x}}$, $y(0) = 1 + 8\ln 2$, $y'(0) = 14\ln 2$.

17. $y'' - 6y' + 8y = \dfrac{4e^{2x}}{1 + e^{-2x}}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

18. $y'' + 16y = \dfrac{16}{\sin 4x}$, $y\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = 3$, $y'\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = 2\pi$.

19. $y'' + 16y = \dfrac{16}{\cos 4x}$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 0$.

20. $y'' - 2y' = \dfrac{4e^{-2x}}{1+e^{-2x}}, \quad y(0) = \ln 4, \quad y'(0) = \ln 4 - 2.$

21. $y'' + \dfrac{y}{4} = \dfrac{1}{4}\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}, \quad y(\pi) = 2, \quad y'(\pi) = \dfrac{1}{2}.$

22. $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{1}{2+e^{-x}}, \quad y(0) = 1 + 3\ln 3, \quad y'(0) = 5\ln 3.$

23. $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{e^{-x}}{2+e^{x}}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$

24. $y'' + 4y = \dfrac{4}{\sin 2x}, \quad y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 2, \quad y'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \pi.$

25. $y'' + 4y = \dfrac{4}{\cos 2x}, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0.$

26. $y'' + y' = \dfrac{e^{x}}{2+e^{x}}, \quad y(0) = \ln 27, \quad y'(0) = 1 - \ln 9.$

27. $y'' + y = 2\operatorname{ctg} x, \quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1, \quad y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 2.$

28. $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{1}{1+e^{-x}}, \quad y(0) = 1 + 2\ln 2, \quad y'(0) = 3\ln 2.$

29. $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{e^{x}}{1+e^{-x}}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$

30. $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}, \quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1, \quad y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi}{2}.$

31. $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$

Индивидуальное задание №2

Ряды

Задача 1. Найти сумму ряда.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{9n^2+12n-5}$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{24}{9n^2-12n-5}$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{9n^2+6n-8}$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{9n^2+21n-8}$.

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{4n^2+8n+3}$.

6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{14}{49n^2-28n-45}$.

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{9n^2+3n-2}$.

8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7}{49n^2-7n-12}$.

9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n-2}$.

10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{14}{49n^2-14n-48}$.

11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{36n^2-24n-5}$.

12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{14}{49n^2-84n-13}$.

13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{4n^2+4n-3}$.

14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7}{49n^2+35n-6}$.

15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{9n^2+3n-20}$.

16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{14}{49n^2-42n-40}$.

17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{16n^2-8n-15}$.

18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7}{49n^2-21n-10}$.

19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{25n^2+5n-6}$.

20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{4n^2-9}$.

21. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7}{49n^2-35n-6}$.

22. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{7}{n^2+n-2}$.

23. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{12}{36n^2+12n-35}$.

24. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7}{49n^2+21n-10}$.

25. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{9n^2-3n-2}$.

26. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{25n^2-5n-6}$.

27. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{16n^2+8n-15}$.

28. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{14}{49n^2-56n-33}$.

29. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{12}{36n^2-12n-35}$.

30. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7}{49n^2+7n-12}$.

Задача 2. Найти сумму ряда.

1. $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{4-5n}{n(n-1)(n-2)}$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+6}{(n+3)(n+2)n}$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n+3}{(n+3)(n+1)n}$.

4. $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{4n-2}{(n^2-1)(n-2)}$.

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+3)(n+1)n}$.

6. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3n-5}{(n^2-1)n}$.

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+3)(n+2)n}$.

8. $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(n^2-4)n}$.

9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-2}{(n+2)(n+1)n}$.

10. $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{n+2}{n(n-1)(n-2)}$.

11. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{5n-2}{n(n-1)(n+2)}$.

12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(n+1)(n+2)n}$.

13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+2}{(n+2)(n+1)n}$.

14. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n+5}{(n^2-1)(n+2)}$.

15. $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{8n-10}{(n-2)(n-1)(n+1)}$.

16. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3n-1}{(n^2-1)n}$.

17. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{n-4}{n(n-1)(n-2)}$.

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5n+9}{(n+1)(n+3)n}$.

19. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{5n-2}{n(n-1)(n+2)}$.

20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{(n+1)(n+2)n}$.

21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n+4}{(n+1)(n+2)n}$.

22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2-n}{(n+1)(n+2)n}$.

23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+6}{(n+2)(n+1)n}$.

24. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n-2}{n(n-1)(n+1)}$.

25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)n}$.

26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1-n}{(n+3)(n+1)n}$.

27. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{3n+1}{n(n-1)(n+1)}$.

28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4-n}{(n+1)(n+2)n}$.

29. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{4}{n(n-1)(n-2)}$.

30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3-n}{(n+1)(n+3)n}$.

Задача 3. Исследовать на сходимость.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^3\left(n\sqrt{n}\right)}{n\sqrt{n}}$.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2\frac{n\pi}{2}}{n\left(n+1\right)\left(n+2\right)}$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt[3]{n^7}}$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{n-\ln n}$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}\frac{1+(-1)^n}{2}\cdot n}{n^3+2}$.

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}\frac{n+1}{n}}{\sqrt[3]{n^3-3n}}$.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\arccos\frac{(-1)^n\cdot n}{n+1}}{n^2+2}$.

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot\cos^2 n}{n^3+5}$.

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2+3}{n^3\cdot\left(2+\sin\dfrac{n\pi}{2}\right)}$.

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt[4]{n^3}}\cdot\sin\left(\dfrac{2+(-1)^n}{6}\cdot\pi\right)$.

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln n}{n^3+n+1}$.

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1+\sin\dfrac{\pi n}{4}}{n^2}$.

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos^2\dfrac{n\pi}{3}}{3^n+2}$.

14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\left(2+\cos\dfrac{n\pi}{2}\right)\cdot\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^7+5}}$.

15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln n}{\sqrt{n^5+n}}$.

16. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{2\cos\dfrac{2\pi}{3n}}{\sqrt[4]{n^4-1}}$.

17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3+(-1)^n}{2^{n+2}}$.

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\operatorname{arctg}\left[2+(-1)^n\right]}{\ln(1+n)}$.

19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\operatorname{arctg}\left[2+(-1)^n\right]}{\sqrt{n(2+n^2)}}$.

20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\arcsin\dfrac{3+(-1)^n}{4}}{2^n+n}$.

21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n^3+2}}{n^2\cdot\sin^2 n}$.

22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\dfrac{n^2+5}{n^2+4}$.

23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^3-2}{n^6+\sin^2 2^n}$.

24. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt[5]{n-1}}\cdot\operatorname{tg}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}\cdot\operatorname{tg}\dfrac{1}{4\sqrt{n}}$.

26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}}$.

27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{1}{n^2}$.

29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$.

30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln n}{n\sqrt{n}}$.

Задача 4. Исследовать на сходимость.

1. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n+1}{2^n(n-1)!}$.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}(n^3+1)}{(n+1)!}$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{10^n\cdot 2\cdot n!}{(2n)!}$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+2)!}{(3n+5)^2\cdot 2^n}$.

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+5}{n!}\sin\frac{2}{3^n}$.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}\frac{5}{n}}{n!}$.

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{3^n\cdot n!}$.

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(2n)!}\cdot\operatorname{tg}\frac{1}{5^n}$.

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n^2-1)\cdot 6^n}{n!}$.

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(n+2)!}$.

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}$.

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7^{2n}}{(2n-1)!}$.

14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^3}{(3n)!}$.

15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{3^n\cdot(n+1)!}$.

16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^{n-1}}$.

17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(3^n+1)(2n)!}$.

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n!\sin\frac{\pi}{2^n}$.

19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{n^n}$.

20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n\cdot\sqrt[3]{n^2}}{(n+1)!}$.

21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot n!}{n^n}$.

22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n(n+1)!}{(2n)!}$.

23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(n+2)!}$.

24. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n+1)}{2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3n-1)}$.

25. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{7\cdot 9\cdot 11\cdot\ldots\cdot(2n+5)}{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n-2)}$.

26. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n!}{\sqrt{2^n+3}}$.

27. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n+2)!}{10^n n^2}$.

28. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{n-1}\sqrt{n^2+5}}{(n-1)!}$.

29. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!\sqrt[3]{n}}{3^n+2}$.

30. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n-2)}{2^{n+1}n!}$.

Задача 5. Исследовать на сходимость.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$.

2. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\left[1+\ln^2(n+1)\right]}$.

4. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln^2 n+2\ln n)}$.

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{e^{2n}-1}}$.

6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{e^{2n}+4}$.

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n^2+1)\cdot\sqrt{1+\ln^2(n^2+1)}}$.

8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{e^{n^3}}$.

9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\operatorname{arctg} n)^2}{1+n^2}$.

10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{e^{2n}}$.

11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{\operatorname{arctg} n}}{n^2+1}$.

12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{1+e^n}}$.

13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{e^{2n}}$.

14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(n^3+1)[1+\ln^2(n^3+1)]}$.

15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{e^{n^2}}$.

16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg} n}{1+n^2}$.

17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{e^n}$.

18. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}$.

19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(n^3+1)\ln^2(n^3+1)}$.

20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{e^n}$.

21. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n^2+1)\ln(n^2+1)}$.

22. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{e^{n^2}}$.

23. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln^2 n+\ln n)}$.

24. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{1/n}}{n^2}$.

25. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{1+4\ln^2 n}}$.

26. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n\ln\ln n}$.

27. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n\ln^2\ln n}$.

28. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n-5}{e^{3n}}$.

29. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$.

30. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg} 2n}{4n^2+1}$.

Задача 6. Исследовать на абсолютную или условную сходимость.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{\sqrt{n+2}}{n^3+6}$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+2}$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sqrt{n+1}}{n^2}$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 4n}{n^2+3n+2}$.

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$.

6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\ln(1+n)}$.

7. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$.

8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)(3/2)^n}$.

9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n+1}$.

10. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\cdot\ln n}$.

11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n^2}$.

12. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\ln(1+\frac{n}{3^n})$.

13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{n^2+n+1}$.

14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(10n-1)\ln(10n-1)}$.

15. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n+100}$.

16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 3n}{n^2+2n}$.

17. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\operatorname{tg}\frac{1}{n}$.

18. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sqrt{n+3}}{n^2+2}$.

19. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln^2 n}$.

20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+\sin^2 n}$.

21. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 3^n}{3^n}$.

22. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^3}{(n+1)!}$.

23. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+6}{n(n+2)(n+3)}$.

24. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)}$.

25. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot\sin n}{3^n}$.

26. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$.

27. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)^3}$.

28. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-\ln n}$.

29. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$.

30. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt[3]{n}}{n(\sqrt[3]{n}+1)}$.

Задача 7. Найти область сходимости.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+3}{(n+2)^2}\cdot(x+3)^n$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{(n+1)\cdot 5^n}$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{2n}}{n\cdot 9^n}.$

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{(n+1)^3}(x-2)^n.$

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x-2)^{2n}}{2n}.$

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^{2n+1}}{3n+8}.$

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{n}\cdot(x+1)^{2n}.$

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{(2n+1)\cdot 3^n}.$

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^{2n+1}}{(2n-1)\cdot 4^n}.$

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-4)^{2n-1}}{(2n^2-5n)\cdot 4^n}.$

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{(3n+1)\cdot 2^n}.$

12. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{3n}{(5n-8)^3}\cdot(x-2)^{3n}.$

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}tg\,\frac{1}{3^n}(x+5)^n.$

14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}(x-2)^n.$

15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{2^n(n^2+1)}(x+3)^n.$

16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(n^4+1)^2}\cdot(x-3)^n.$

17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^{n^2}}{n^n}.$

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{(n+1)!}\cdot(x+5)^{2n+1}.$

19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n-2}{(n+1)^2\cdot 2^{n+1}}(x-3)^n.$

20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{(n+4)\ln(n+4)}.$

21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}(x-2)^n.$

22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^3+1}\cdot(x-1)^n.$

23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-4)^{n^2}}{n^{n+1}}.$

24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n^4+1}(x-1)^n.$

25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{tg}\,\frac{1}{2^n}}{n(n+5)}(x+4)^n.$

26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{2n}}{n\cdot 9^n}.$

27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n^2+1}$.

28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt[3]{n+2}}{n+1}(x-2)^n$.

29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^5x^{2n}}{2n+1}$.

30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x-1)^n\sin^2\frac{1}{2n}$.

Задача 8. Найти область сходимости.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n(n+1)(x+3)^n}$.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)\cdot 3^n}{(n^2+5)(x-1)^n}$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^5+7}{n^3\cdot 2^n(x+3)^n}$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+3}{(n+1)^5\cdot x^{2n}}$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)\cdot 2^n}{(n^3-7n+1)(x+3)^n}$.

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n(n^6+1)}{3^n(x+1)^n}$.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+1}{3^n\cdot(x-2)^n}$.

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{x^n}$.

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n+5}{(5n+9)^5(x+2)^{2n}}$.

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{5^n(x+4)^n}$.

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{1}{2^n}}{(n^2+1)(x+3)^n}$.

12. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{n}}{(n^2+5n+1)(x+1)^n}$.

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{\sin\frac{1}{n}(x-4)^n}$.

14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{n}}{2^n(x+1)^n}$.

15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 9^n(x-1)^{2n}}$.

16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot\mathrm{tg}\,\frac{1}{4^n}}{\sqrt{n+1}(x-2)^{2n}}$.

17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^3+2}}{(n+1)(x+7)^n}$.

18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}\cdot\sin\frac{1}{9^n}}{\sqrt[3]{n}\,(x-5)^{2n}}$.

19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n^3-2)\cdot 3^n}{(5n+7)(x-3)^n}$.

20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[5]{n+7}\cdot\mathrm{tg}\,\frac{1}{5^n}}{\sqrt{n+1}(x+1)^n}$.

21. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)\ln(n+2)\cdot(x-3)^{2n}}$.

22. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\cdot 2^n\cdot(x+2)^n}$.

23. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n\cdot\ln n}{(n^2-1)(x+1)^n}$.

24. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{x^n}$.

25. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{3^n(x+3)^n}$.

26. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^{2n}(2n-1)!}$.

27. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{4^n(x+1)^{n+1}}$.

28. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{(x-2)^n}$.

29. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{x^{2n-1}(4n-3)^2}$.

30. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4}{4^n(x-2)^n(n^5+1)}$.

Задача 9. Указанную функцию разложить в ряд Маклорена, используя разложения в ряд функций e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^m$, указать область сходимости.

1. $y=\frac{1}{(x+1)^3}$.

2. $y=\ln\left(x^2-3x+2\right)$.

3. $y=x^2\cdot\ln\left(1+x^2\right)$.

4. $y=\ln\frac{1+2x}{1-x}$.

5. $y=\sin^2 x$.

6. $y=\sqrt{4-x^2}$.

7. $y=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x}, x\neq 0,\\ 1, \quad x=0.\end{cases}$

8. $y=\ln\dfrac{1+x^3}{1+x}.$

9. $y=\begin{cases}\dfrac{1-e^{-x^2}}{x^2}, x\neq 0,\\ 1, \quad x=0\end{cases}$

10. $y=x(e^x-1).$

11. $y=\cos^2 x.$

12. $y=x\ln(1+x^2).$

13. $y=2^x.$

14. $y=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$

15. $y=\sqrt[3]{27-x^3}.$

16. $y=(1+x)e^x.$

17. $y=\ln\left(1-x^2\right).$

18. $y=x\cdot\cos^2 x.$

19. $y=\dfrac{x^2+x+1}{(x-1)(x+2)}.$

20. $y=\begin{cases}\dfrac{x+\ln(1-x)}{x^2}, x\neq 0,\\ -\dfrac{1}{2}, \quad x=0.\end{cases}$

21. $y=x^2\cos x.$

22. $y=\begin{cases}\dfrac{e^{x^2}-1}{2x}, x\neq 0,\\ 0, \quad x=0.\end{cases}$

23. $y=x\cdot\cos x.$

24. $y=\ln(2+x).$

25. $y=(x-\operatorname{ctg} x)\sin x.$

26. $y=\dfrac{1-x}{e^{3x+1}}.$

27. $y=\sin^2 x\cdot\cos^2 x.$

28. $y=\arcsin x.$

29. $y=(1+x)\ln(1+x).$

30. $y=5^{x+2}.$

Задача 10. Вычислить приближенно с точностью до 10^{-4}.

1. $\ln 1{,}1$.

2. $\sqrt[4]{17}$.

3. $\cos 0{,}3$.

4. $\sin 0{,}4$.

5. $\sqrt[3]{30}$.

6. $\operatorname{arctg} 0{,}2$.

7. $\sqrt[3]{130}$.

8. $\sqrt[10]{1027}$.

9. $y = \sqrt[3]{520}$.

10. $\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$.

11. $\int_0^{1/5} \sqrt[3]{1+x^2}\,dx$.

12. $\int_0^1 \cos\sqrt{x}\,dx$.

13. $\int_0^{1/2} \cos\frac{x^2}{4}\,dx$.

14. $\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{x}\,dx$.

15. $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx$.

16. $\int_0^{1/4} \sqrt{1+x^3}\,dx$.

17. $\int_0^{1/4} e^{-x^2}\,dx$.

18. $\int_0^{1/10} \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx$.

19. $\int_0^{1/2} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx$.

20. $\int_0^1 \sin x^2\,dx$.

21. $\int_0^{1/3} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$.

22. $\int_0^1 \sqrt[3]{x}\cdot\cos x\,dx$.

23. $\int_0^{1/12} \frac{\sin x}{x}\,dx$.

24. $\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$.

25. $\int_0^{1/4} \ln(1+\sqrt{x})\,dx$.

26. $\int_0^{0{,}1} \cos 100x^2\,dx$.

27. $\int_0^{2{,}5} \frac{dx}{\sqrt[4]{625+x^4}}$.

28. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{8+x^3}}$.

29. $\int_0^{0{,}2} \frac{1-e^{-x}}{x}\,dx$.

30. $\int_0^{0{,}3} e^{-2x^2}\,dx$.

Задача 11. Вычислить предел, используя разложение функций в ряд Тейлора.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1-x^2}{x^4}$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-x^2}-\cos\left(\sqrt{2}x\right)}{x^4}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-x^2}-\cos^2 x}{x^4}$.

4. $\lim\limits_{n\to 0}\dfrac{2-\sin^2 x-2\cos x}{x^4}$.

5. $\lim\limits_{n\to 1}\dfrac{x\cdot e^{x-1}-x^2}{(x-1)^2}$.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cos x+x\sin x-2}{x^4}$.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-\sin x+\dfrac{x^2}{2}}{x^3}$.

8. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)-\ln(x-1)}{(x-2)^2}$.

9. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x\cdot\sin\left(x-2\right)-x^2+2x}{\left(x-2\right)^3}$.

10. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2xe^{x-1}-x^3-x}{(x-1)^3}$.

11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\cdot\ln(1+x)-2x^2+x^3}{x^4}$.

12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-x\sin x-1}{x^4}$.

13. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x\cdot e^{-(x+1)}-x^3-x}{(x+1)^3}$.

14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-\sin^2 x}{x^4}$.

15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x+\cos\sqrt{2}x-1}{x^6}$.

16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xe^{x}-\ln\left(1+x\right)}{x^2}$.

17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+x\right)+e^{-x}-1}{x^3}$.

18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{1+x^2}-\cos\sqrt{2}x}{x^4}$.

19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cos x+x^2-2}{x^4}$.

20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{1}{1+x}-1+x\right)$.

21. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)e^{x-1}-\ln x}{(x-1)^2}$.

22. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2xe^{x+2}-x^3-6x^2-10x}{\left(x+2\right)^3}$.

23. $\lim\limits_{n\to 0}\dfrac{x^2e^{-x^2}+\ln(1-x^2)}{x^4}$.

24. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-\ln(1+x)^2}{x^2}$.

25. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1-x\sin x}{x^4}$.

26. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\ln(\sqrt{1+x^2}-x)}{x^3}$.

27. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2(\operatorname{tg}x-\sin x)-x^3}{x^5}$.

28. $\lim\limits_{x\to \infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$.

29. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2 x\right)$.

30. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{\operatorname{ctg}x}{x}\right)$.

Задача 12. Получить решение дифференциального уравнения в виде степенного ряда или ряда Тейлора.

1. $y'=xy+1,\ \ y(0)=1.$

2. $y'=x-y^2,\ \ y(0)=0.$

3. $y'=y^3-x,\ \ y(0)=1.$

4. $y'=e^y+xy,\ \ y(0)=0.$

5. $y'=x+2y^2,\ \ y(0)=0.$

6. $y'=e^y-x^2y,\ \ y(0)=0.$

7. $y'=y+xe^y,\ \ y(0)=0.$

8. $y'=1+x-y^2,\ \ y(0)=1.$

9. $y'=x^2+y^2,\ \ y(1)=1.$

10. $y'=\sin y-\sin x,\ y(0)=0.$

11. $y'=x^2-y^2,\ \ y(0)=0.$

12. $y'=x+\dfrac{1}{y},\ \ y(0)=1.$

13. $y'=\sin(xy),\ \ y(0)=1.$

14. $y'=x^2+y^2,\ \ y(0)=1.$

15. $y'=xy^3-1,\ y(0)=0.$

16. $y'=1-xy,\ \ y(0)=0.$

17. $y'=x+x^2+y^2,\ \ y(0)=1.$

18. $y'=\dfrac{1-x^2}{y}+1,\ \ y(0)=1.$

19. $y'=2x+\cos y,\ \ y(0)=0.$

20. $y'=1+x+x^2-2y^2,$ $y(1)=1.$

21. $y'=x^2y+y^3,\ \ y(0)=1.$

22. $y'=y+3\sqrt[3]{y},\ \ y(0)=1.$

23. $y' = x^3 + y^2, \quad y(0) = 1/2.$

24. $y' = x^2 y^2 - 1, \; y(0) = 1.$

25. $y' = x^2 + xy + y^2, \quad y(0) = 1.$

26. $y' = y - \dfrac{2x}{y}, \; y(0) = 1.$

27. $y' = -\dfrac{y}{1+x}, \; y(0) = 2.$

28. $y' = x + y, \; y(1) = 1.$

29. $y' = 1 + x + \dfrac{y}{1-x^2}, \; y(0) = 1.$

30. $y' = 3x^2 y + x^5 + x^2, \; y(0) = 1.$

Задача 13. Получить решение дифференциального уравнения в виде степенного ряда или ряда Тейлора.

1. $y'' = xy, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$

2. $y'' = (2x-1)y - 1, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$

3. $y'' = -xy, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$

4. $y'' = yy' - x^2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$

5. $y'' + yx = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$

6. $y'' = x + y^2, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$

7. $y'' = x^2 y, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$

8. $y'' = x + e^y, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$

9. $y'' = -x^2 y, \quad y(0) = 1, \; y'(0) = 0.$

10. $xy'' + y \cdot \sin x = x, \; y(\pi) = 1, \; y'(\pi) = 0.$

11. $y'' = -x^2 y, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$

12. $xy'' + y' + xy = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$

13. $y'' = xy^2, \; y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$

14. $y'' = xy' + 2y, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$

15. $y'' = e^{xy}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$

16. $y'' = 2xy' + 4y, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$

17. $y'' = -y \cdot \cos x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$

18. $y'' = xy' - y^2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$

19. $y'' = x\sin(xy'), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$

20. $y'' = xy^2 - y', \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1.$

21. $xy'' + 2y' + xy = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$

22. $xy'' - xy' - y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$

23. $y'' = xy, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$

24. $y'' = x^2 y, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$

25. $y'' + xy' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$

26. $y''(x^2 + 1) - 2xy' = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3.$

27. $xy'' + x(y')^2 - y' = 0, \quad y(2) = 2, \quad y'(2) = 1.$

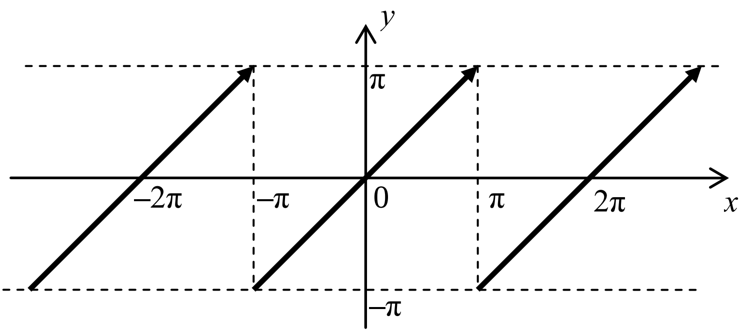
28. $y'' - \dfrac{y'}{x} - \dfrac{x^2}{y'} = 0, \quad y(2) = 0, \quad y'(2) = 4.$

29. $2y'' - 3y^2 = 0, \quad y(-2) = 1, \quad y'(-2) = -1.$

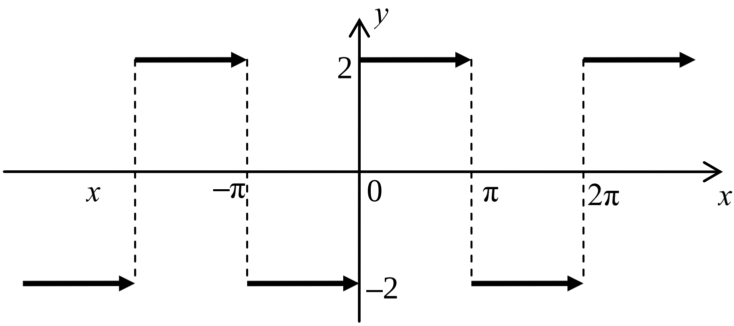
30. $y'' - e^{2y} = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$

Задача 14. Разложить заданную графиком периодическую функцию в ряд Фурье.

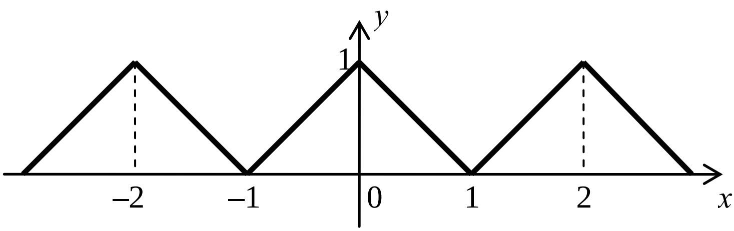
1.



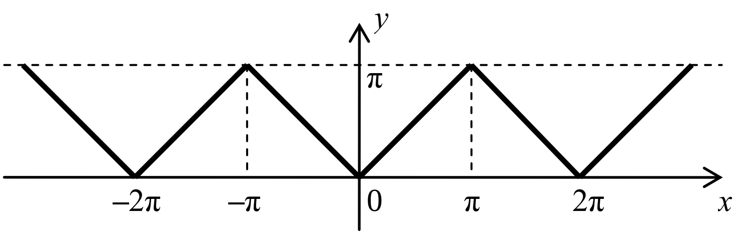
2.



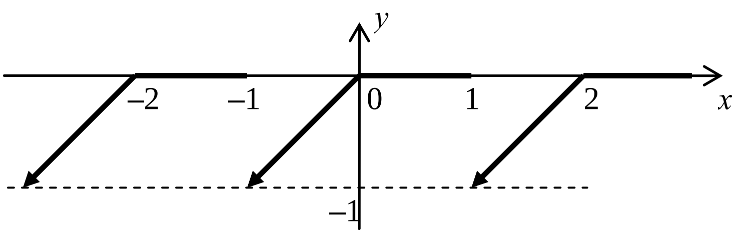
3.



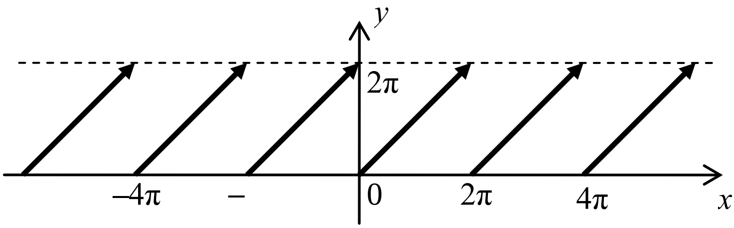
4.



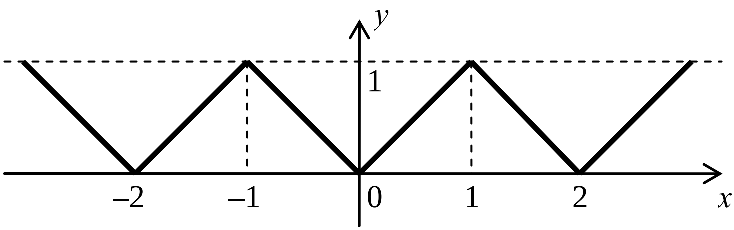
5.



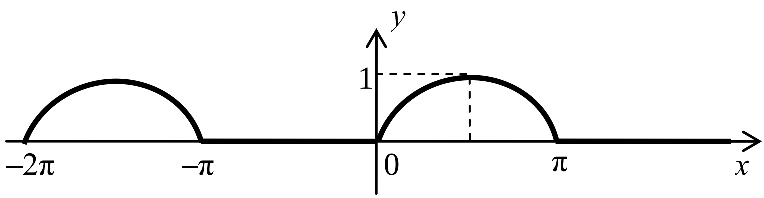
6.



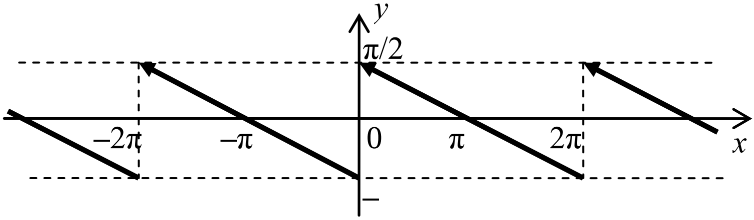
7.



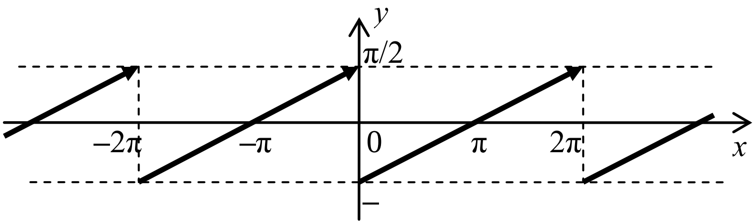
8.



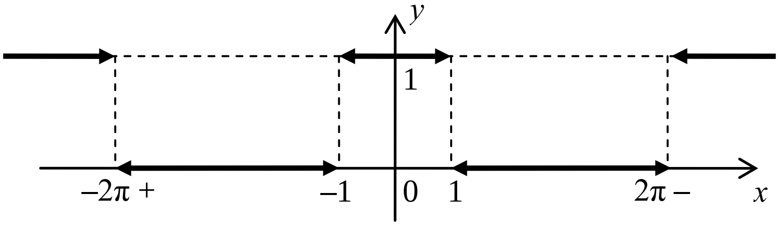
9.



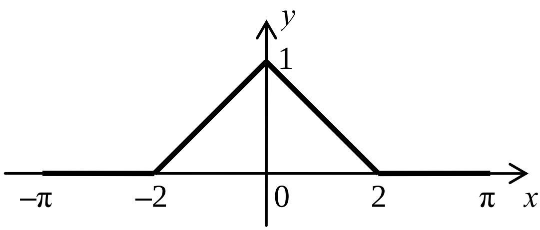
10.



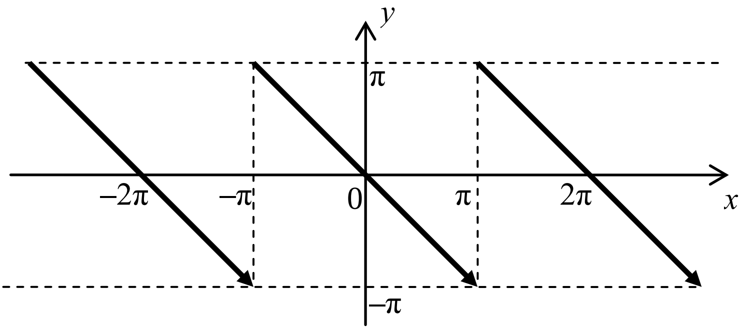
11.



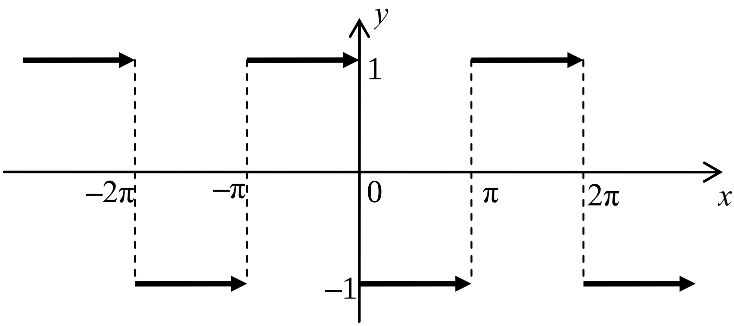
12.



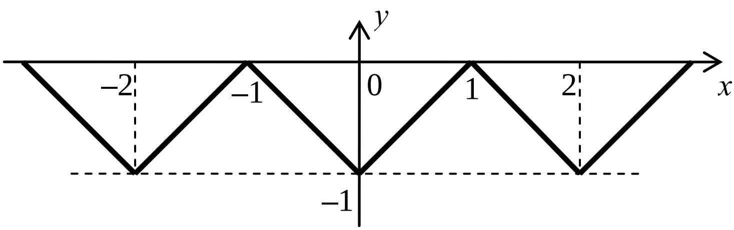
13.



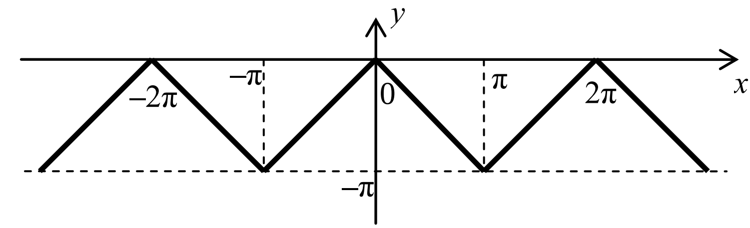
14.



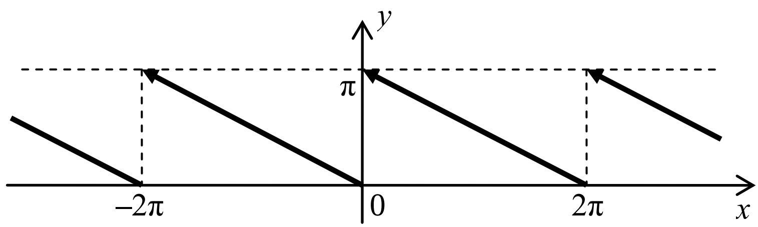
15.



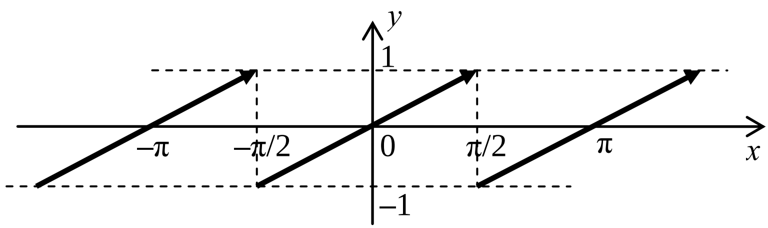
16.



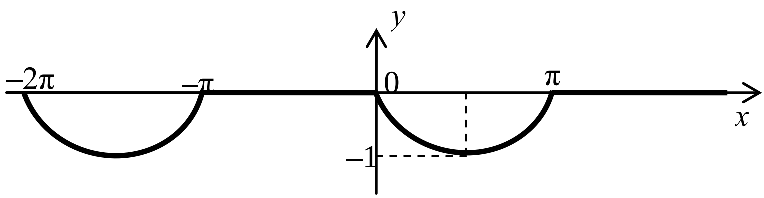
17.



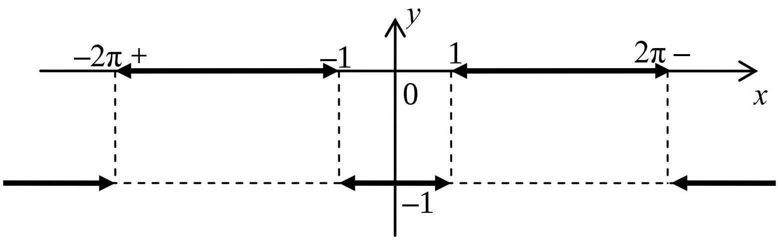
18.



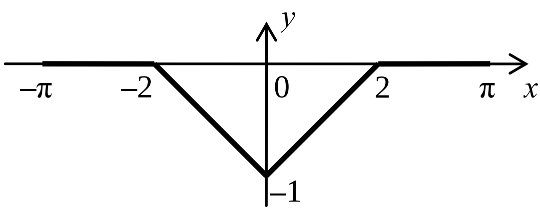
19.



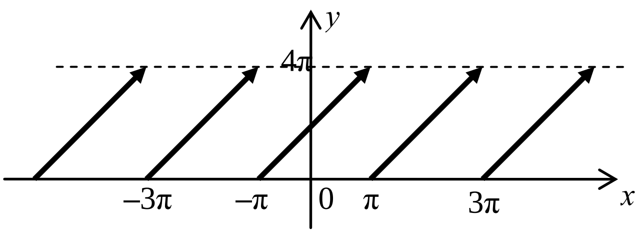
20.



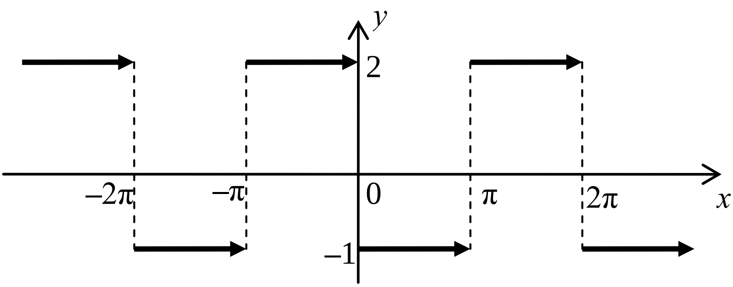
21.



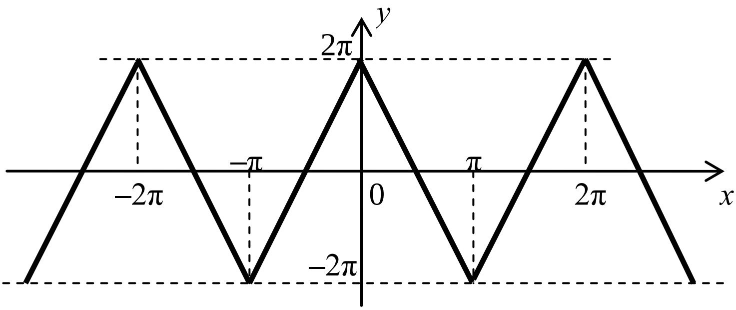
22.



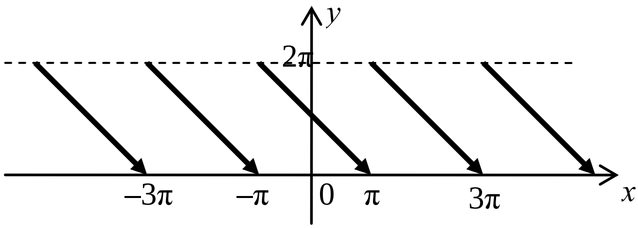
23.



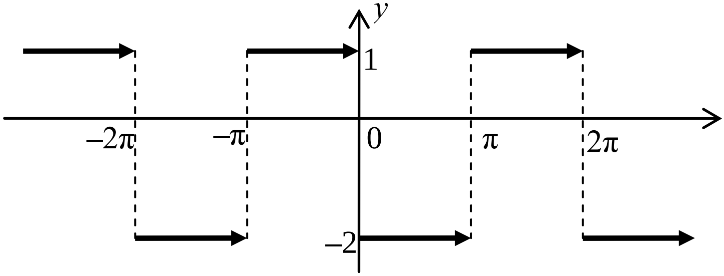
24.



25.



26.



Задача 15. Разложить функцию в ряд Фурье на $(-l;\ l]$.

1. $y = e^{x}$, $x \in \left(-1; 1\right]$.

2. $y = e^{-x}$, $x \in \left(-1; 1\right]$.

3. $y = \pi^2 - x^2$, $x \in \left[-\pi; \pi\right]$.

4. $y = e^{2x}$, $x \in (-1; 1]$.

5. $y = x^2$, $x \in \left[-\pi; \pi\right]$.

6. $y = \mathrm{ch}\ 2x$, $x \in \left(-2; 2\right]$.

7. $y = |\sin x|, \quad x \in [-\pi; \pi].$

8. $y = |x| \cdot (1 - |x|), \quad x \in (-1; 1].$

9. $y = x^2 - 1, \quad x \in (-1; 1].$

10. $y = 1 - 2|x|, \quad x \in (-1; 1].$

11. $y = \cos\frac{\pi}{2}x, \quad x \in (-1; 1].$

12. $y = \sin\frac{\pi}{2}x, \quad x \in (-1; 1].$

13. $y = ch\pi x$**,** $x \in (-1; 1].$

14. $y = \operatorname{sh}\pi x, \quad x \in (-1; 1].$

15. $y = e^{2|x|}, \ x \in (-1; 1].$

16. $y = \operatorname{sign} x \cdot e^{\pi|x|}, \ x \in (-1; 1].$

17. $y = e^{\pi x}, \quad x \in (-1; 1].$

18. $y = \sin 3\pi x, \ x \in (-1; 1].$

19. $y = \operatorname{ch} 3x, \ x \in (-1; 1].$

20. $y = \operatorname{sh} x, \quad x \in (-2; 2].$

21. $y = \dfrac{\pi^2(1 - 3x^2)}{12}, \quad x \in (-1; 1].$

22. $y = \dfrac{\pi}{2}(1 - 2|x|), \ x \in (-1; 1].$

23. $y = \dfrac{\pi^3(x - x^3)}{12}, \ x \in (-1; 1].$

24. $y = 5(\pi x)^2 + 1, \ x \in (-1; 1].$

25. $y = 2x - 4, \quad x \in (-1; 1].$

Задача 16. Разложить функцию в ряд Фурье в комплексной форме на $(-l; \ l]$.

1. $y = x^2, \ x \in (-2; 2].$

2. $y = x^3, \ x \in (-2; 2].$

3. $y = e^x, \ x \in (-\pi; \pi].$

4. $y = \operatorname{sh} 3x, \ x \in (-\pi; \pi].$

5. $y = e^x, \ x \in (-3; 3].$

6. $y = x^2, \ x \in (-3; 3].$

7. $y = e^{2x}, \quad x \in (-2; 2].$

8. $y = e^x, \quad x \in (-2; 2].$

9. $y = \operatorname{ch} 3x, \quad x \in (-\pi; \pi].$

10. $y = e^{\frac{x}{2}}, \quad x \in (-4; 4].$

11. $y = \operatorname{sign} x \cdot \operatorname{ch} x, \quad x \in (-\pi; \pi].$

12. $y = |\operatorname{sh} 3x|, \quad x \in (-2; 2].$

13. $y = e^{x/3}, \quad x \in (-3; 3].$

14. $y = 3\operatorname{sign} x, \quad x \in (-2; 2].$

15. $y = e^{\pi x}, \quad x \in (-2; 2].$

16. $y = e^{2\pi x}, \ x \in (-2; 2].$

17. $y = x, \ \ x \in (-1,1]$.

18. $y = x, \ \ x \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$.

19. $y = x, \ \ x \in \left(-2; 2\right]$.

20. $y = 2x, x \in (-1,1]$.

21. $y = \pi x, \ \ x \in \left(-2; 2\right]$.

22. $y = 2\operatorname{sign} x, \ \ x \in \left(-2; 2\right]$.

23. $y = 5\operatorname{sign} x, \ \ x \in \left(-2; 2\right]$.

24. $y = 2\operatorname{sign} x, \ \ x \in (-3; 3]$.

Библиографический список

Высшая математика: Учебник / В.С. Шипачев. - М.: НИЦ ИНФРА-М, 2015. - 479 с.

Высшая математика: Учебник / Л.Т. Ячменёв. - М.: ИЦ РИОР: НИЦ Инфра-М, 2013. - 752 с.

Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. М.: Наука,.Т.1, - М.: Интеграл – Пресс, 2006

Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. М.: Наука,.Т.2 , - М.: Интеграл – Пресс, 2006

Содержание

Составители:
Бильданов Ринат Талгатович
Грунина Мария Викторовна
Бабин Владислав Николаевич

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. РЯДЫ

Учебно-методическое пособие

Издание второе, стереотипное

Редактор Н.К. Крупина

Подписано к печати «25» декабря 2017 г. Формат 60×84 1/16.
Объем 6,4 уч.-изд.л. Тираж 100 экз. Заказ № 1935

Отпечатано в мини-типографии Инженерного института НГАУ
630039, Новосибирск, ул. Добролюбова, 160